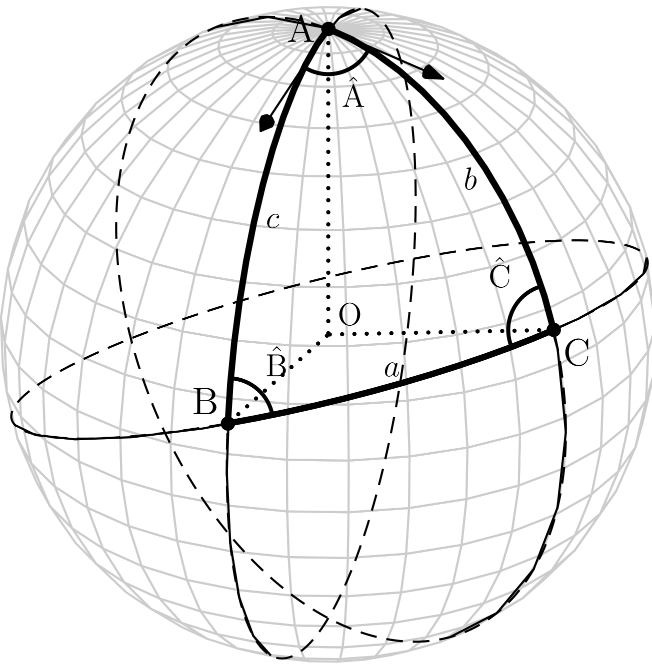
Trigonométrie sphérique.
Le mode d'emploi.

Les triangles sphériques :

$\mathcal{S}$ désigne une sphère de centre O et de rayon 1.



- **<u>Les grands cercles :</u>** Ce sont les cercles de centre O et de rayon 1.

- **<u>Les triangles sphériques :</u>** Ils sont formés par des arcs de grands cercles se coupant aux sommets A, B et C.
  La longueur d'un côté d'un triangle sphérique est égal à la mesure en radians de son angle (géométrique) au centre O. On les note généralement a, b et c en correspondance avec les sommets opposés.

- **<u>Les angles sphériques :</u>** Ce sont les angles géométriques des vecteurs tangents aux côtés d'un triangle sphérique (voir figure). On les note $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ en correspondance avec les sommets du triangle.

Les formules fondamentales :

On ne considère ici que des triangles sphériques dont les longueurs des côtés appartiennent à l'intervalle $]0, \pi[$.

- **La somme des angles :** $0 < a + b + c < 2\pi$ et $\pi < \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 3\pi$.
  Le nombre $\sigma = \pi - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C})$ est appelé l'excès sphérique.

- **Les formules des cosinus :**

  – $$\left\{\begin{array}{lcl} \cos a & = & \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \widehat{A} \\ \cos b & = & \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \widehat{B} \\ \cos c & = & \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \widehat{C} \end{array}\right.$$

  – $$\left\{\begin{array}{lcl} \cos \widehat{A} & = & -\cos \widehat{B} \cos \widehat{C} + \sin \widehat{B} \sin \widehat{C} \cos a \\ \cos \widehat{B} & = & -\cos \widehat{A} \cos \widehat{C} + \sin \widehat{A} \sin \widehat{C} \cos b \\ \cos \widehat{C} & = & -\cos \widehat{A} \cos \widehat{B} + \sin \widehat{A} \sin \widehat{B} \cos c \end{array}\right.$$

  On les appelle aussi formule de Gauss.
  Carl Friedrich Gauss (1777-1855) était un mathématicien allemand.

- **La formule d'analogie des sinus :**
  $$\left\{\begin{array}{lcl} \cos \widehat{A} & = & -\cos \widehat{B} \cos \widehat{C} + \sin \widehat{B} \sin \widehat{C} \cos a \\ \cos \widehat{B} & = & -\cos \widehat{A} \cos \widehat{C} + \sin \widehat{A} \sin \widehat{C} \cos b \\ \cos \widehat{C} & = & -\cos \widehat{A} \cos \widehat{B} + \sin \widehat{A} \sin \widehat{B} \cos c \end{array}\right.$$
  Cette formule ne permet pas de préciser si les angles sont aigus ou obtus.

Les autres formules :

- **Les formules des 4 éléments consécutifs :**
  $$\left\{\begin{array}{lcl} \cot a \sin b & = & \cos b \cos \widehat{C} + \sin \widehat{C} \cot \widehat{A} \\ \cot b \sin c & = & \cos c \cos \widehat{A} + \sin \widehat{A} \cot \widehat{B} \\ \cot c \sin a & = & \cos a \cos \widehat{B} + \sin \widehat{B} \cot \widehat{C} \end{array}\right.$$
  La cotangente est définie par $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$.

- **Les formules de Delambre :**
  $$\left\{\begin{array}{lcl} \cos \dfrac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2} \cos \dfrac{c}{2} & = & \cos \dfrac{a+b}{2} \sin \dfrac{\widehat{C}}{2} \\ \cos \dfrac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2} \sin \dfrac{c}{2} & = & \sin \dfrac{a+b}{2} \sin \dfrac{\widehat{C}}{2} \\ \sin \dfrac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2} \cos \dfrac{c}{2} & = & \cos \dfrac{a-b}{2} \cos \dfrac{\widehat{C}}{2} \\ \sin \dfrac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2} \sin \dfrac{c}{2} & = & \sin \dfrac{a-b}{2} \cos \dfrac{\widehat{C}}{2} \end{array}\right.$$
  Jean-Baptiste Delambre (1749-1822) était un astronome.

- **<u>Les formules de Neper :</u>**

$$\begin{cases} \tan\dfrac{a+b}{2} = \dfrac{\cos\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}}{\cos\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}}\tan\dfrac{c}{2} \\ \tan\dfrac{a-b}{2} = \dfrac{\sin\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}}{\sin\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}}\tan\dfrac{c}{2} \\ \tan\dfrac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2} = \dfrac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\dfrac{\widehat{C}}{2} \\ \tan\dfrac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2} = \dfrac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cot\dfrac{\widehat{C}}{2} \end{cases}$$

  John Neper (1550-1617) était un mathématicien écossais, inventeur des logarithmes.

- **<u>La formule de Girard :</u>**
  Si R désigne le rayon de la sphère, l'aire du triangle sphérique ABC est

$$\mathcal{A} = R^2(\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}-\pi) = R^2\sigma$$

  où σ est l'excès sphérique du triangle.
  Albert Girard (1595-1632) était ingénieur.