ENSIMAG 1ère année, 2007-2008

TP Méthodes Numériques

Objectifs

Les objectifs de ce TP sont :
- de revenir sur les méthodes de résolution des équations différentielles vues en cours de MN ;
- d'utiliser un logiciel de calcul scientifique, `Scilab`, pour implémenter et résoudre les algorithmes et visualiser les résultats ;

le tout à partir d'un exemple classique en mécanique : le pendule.

Compte rendu

Vous devez rédiger un compte-rendu de TP dans lequel vous répondrez à toutes les questions de l'énoncé, expliciterez les méthodes employées, présenterez et commenterez les résultats obtenus. La qualité de la rédaction, de la synthèse, de l'analyse des résultats obtenus sont des critères importants pour la note. Notez que ce sujet ne constitue que **la base** de ce qui vous est demandé : soyez critique par rapport à vos résultats, proposez d'autres idées, solutions ou tests.
La dernière page de votre compte-rendu devra être une sorte de manuel d'utilisation où vous expliquerez comment utiliser vos programmes.

Le compte-rendu sera **dactylographié**, de préférence avec le logiciel LaTeX (vous aurez à votre disposition un fichier de réponses). Ce compte-rendu **n'excèdera pas 10 pages** et ne comportera **pas de programmes** !
Vous me ferez également parvenir vos fichiers `Scilab` : la lisibilité du code et la pertinence des commentaires seront pris en compte.

Le TP est à rendre **au plus tard le lundi 17 Mars 2008, à 17h00** : votre compte-rendu imprimé dans le casier prévu à cet effet, et vos fichiers `Scilab` déposés sur TEIDE. Tout retard devra m'être justifié en personne.

Modalités pratiques

Ce TP est à réaliser en **binôme**. Aucun trinôme n'est accepté. Vous devez vous inscrire sur TEIDE avant le 29 Février à 17h.

Pour toute question, commentaire ou demande de précisions, vous avez trois solutions :
- La page web du TP, accessible depuis le Kiosk de l'Ensimag.
- Le mail tous les jours, à toute heure.
- Vous pouvez aussi venir me voir à l'Ensimag, où j'assurerai une permanence. L'horaire sera indiqué sur le Kiosk.

C. Lucas
Carine.Lucas@imag.fr

Le problème du pendule, simple en apparence, peut donner des résultats surprenants. D'un point de vue mathématique, son étude n'est pas si facile. La modélisation de cet exemple classique en mécanique nous donne une équation différentielle sur l'angle du pendule, équation qui dépend des différents paramètres physiques.

1 Etude d'un pendule simple

Nous commençons ce travail par l'étude d'un pendule classique, composé d'une tige de masse négligeable de longueur $l > 0$ à l'extrémité de laquelle est placée une masse m. On note θ l'angle de la tige avec la verticale (voir Figure 1).

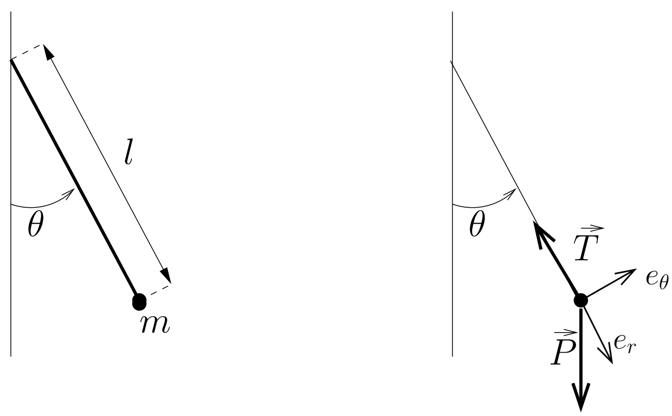

FIG. 1 – Pendule simple

D'après les lois de la mécanique, on a la relation : $m\vec{a} = \vec{T} + \vec{P}$, où $\vec{a}$ est l'accélaration, $\vec{T}$ représente la tension et $\vec{P}$ le poids. On décompose alors cette relation dans la base orthonormée (e_r, e_θ) et on obtient les deux égalités suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} ml\theta'' &=& -mg\sin\theta, \\ -ml\theta'^2 &=& mg\cos\theta - T, \end{array}\right.$$

où g désigne la constante universelle de gravitation (nous prendrons $g = 9.81\text{m.s}^{-2}$).
Ainsi, l'accélération angulaire $\theta''(t)$ du pendule vérifie :

$$\theta''(t) = -\frac{g}{l}\sin\theta(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{1}$$

Pour résoudre cette équation et obtenir l'angle θ en fonction du temps, nous devons préciser $\theta(0)$ et $\theta'(0)$, valeurs initiales respectives de l'angle et de la vitesse angulaire.

1.1 Réduction du modèle

Question 1.1 *Montrez que l'équation (1) peut se mettre sous la forme :*

$$Y(t)' = f(Y(t)), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

en précisant Y et f.
Explicitez également la condition initiale de cette équation.

1.2 Equations différentielles et `Scilab`

Question 1.2 *Rappelez brièvement quelles sont les différentes méthodes de résolution des équations différentielles vues en cours ainsi que quelques unes de leurs propriétés.*

Question 1.3 *Programmez sous* `Scilab` *les schémas d'Euler explicite et d'Euler implicite. Pour le second, vous utiliserez la commande* `fsolve`*.*
A l'aide de la commande `ode`*, trouvez les options pour utiliser la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.*

Question 1.4 *En vous intéressant par exemple à la résolution sur* $\mathbb{R}$ *de*

$$\begin{cases} x' = x, \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

établissez numériquement les ordres des méthodes d'Euler et de Runge-Kutta.

`Scilab` utilise une autre méthode de résolution, programmée dans la commande `ode` avec les options par défaut.

Question 1.5 *Résolvez analytiquement sur* $\mathbb{R}$ *l'équation :*

$$\begin{cases} \phi''(t) = -\phi(t), \\ \phi(0) = 0, \\ \phi'(0) = 1, \end{cases}$$

et comparez cette solution théorique aux résultats donnés par les méthodes d'Euler, de Runge-Kutta et le solveur de `Scilab`*. Que pouvez-vous dire ?*

1.3 Premières simulations numériques

Question 1.6 *On choisit* $\theta(0) = 0$ *et* $\theta'(0) = 0.3s^{-1}$*. Tracez* θ *et* θ' *en fonction du temps* t*, pour* t *variant entre 0 et 10s.*

On définit l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p par :

$$E_c(t) = \frac{1}{2}ml^2\theta'(t)^2, \qquad E_p(t) = mgl\left(1 - \cos\theta(t)\right),$$

et l'énergie totale E par la somme de E_c et E_p.

Question 1.7 *Montrez (théoriquement) que l'énergie totale du pendule reste constante.*

Question 1.8 *En prenant par exemple les valeurs numériques de la question 1.6, tracez ces trois énergies en fonction du temps.*

Question 1.9 *Tracez enfin le portrait de phase, c'est-à-dire* $\theta'(t)$ *en fonction de* θ*. De façon à obtenir un portrait de phase le plus complet possible, faites varier les deux conditions initiales sur une grande plage de valeurs.*

2 Le pendule amorti

Nous introduisons maintenant un amortissement dans notre système. L'équation (1) devient alors :

$$\theta''(t) = -\frac{g}{l}\sin\theta(t) - \lambda\theta'(t),$$

où λ est le coefficient d'amortissement.

Question 2.1 *Menez la même étude que pour le pendule simple (tracés de θ et θ', des énergies et du portrait de phase). Vous pouvez prendre $\lambda = 0.1s^{-1}$ par exemple. Comparez vos résultats au cas sans amortissement.*

3 Le pendule double

A la masse de ce pendule, nous accrochons un second pendule de manière à être dans la configuration suivante (on est toujours en deux dimensions) :

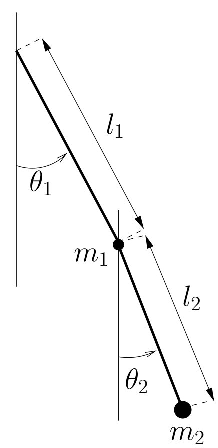

FIG. 2 – Pendule double

On peut montrer que les équations du mouvement sont données par :

$$(m_1+m_2)l_1\theta_1'' + m_2l_2\theta_2''\cos(\theta_1-\theta_2) + m_2l_2\theta_2'^2\sin(\theta_1-\theta_2) + (m_1+m_2)g\sin\theta_1 = 0, \quad (3)$$

$$l_1\theta_1''\cos(\theta_1-\theta_2) + l_2\theta_2'' - l_1\theta_1'^2\sin(\theta_1-\theta_2) + g\sin\theta_2 = 0 \quad (4)$$

3.1 Un cas simplifié : le premier pendule est à entraînement circulaire uniforme

Pour simplifier les équations (3-4), nous commençons par poser $\theta_1' = \omega$ constante.

Question 3.1 *Ecrivez l'équation correspondant à (4) avec cette hypothèse.*

Question 3.2 *Tracez la trajectoire de l'extrémité du pendule double. Il faudrait que l'utilisateur puisse entrer lui-même les valeurs de son choix pour les différents paramètres (valeurs initiales, plage de temps, nombre de points, valeurs des masses, longueurs des pendules ...).*
Vous pourrez également, avec la commande `xpause`*, montrer le mouvement du pendule décrivant cette trajectoire.*

Question 3.3 *Faites varier les paramètres. Donnez les différents types de courbes obtenues. Que peut-on observer en choisissant* $\omega = \sqrt{g/l_2}$ *?*

3.2 Le pendule double quelconque

On ne fait plus aucune hypothèse sur la vitesse angulaire du premier pendule.

Question 3.4 *Comment pouvez-vous réécrire les équations (3-4) pour en programmer "simplement" la résolution de la même façon que le pendule simple ?*

Question 3.5 *Donnez quelques exemples de trajectoire de l'extrémité du pendule.*

4 Conclusion

Question 4.1 *Avec le menu "GUI and Dialogs" de l'aide de* `Scilab`*, créez une interface graphique qui permette de choisir les méthodes, les paramètres physiques, les paramètres de résolution. Cette interface doit permettre de répondre à la majorité des questions numériques de ce TP.*

Question 4.2 *Conclusions personnelles sur ce TP : intérêt, difficultés rencontrées, temps de travail, planning ...*