

**MODELISATION ET SIMULATION HYBRIDES A L'AIDE DES RESEAUX DE  
PETRI PREDICATS-TRANSITIONS COUPLES A DES EQUATIONS  
ALGEBRO-DIFFERENTIELLES (RDP Pr/Tr-EAD)**

Jean-Claude HOCHON<sup>(1)</sup>, Ronan CHAMPAGNAT<sup>(2)</sup>, Robert VALETTE <sup>(2)</sup>

(1) : **IXI**, 76, rue de la Colombette, 31000 Toulouse - France  
Tél. : (33)5 61 99 70 70 - Fax : (33) 5 61 63 67 26  
Email : jean-claude.hochon@ixi.fr

(2) : **LAAS/CNRS**, 7 avenue du colonel Roche, 31077 Toulouse Cedex - France  
Tél. : (33)5 61 33 64 16 - Fax : (33) 5 61 33 69 36  
Email : {ronan, robert}@laas.fr

**Résumé** : Ce papier présente une méthode baptisée Rdp Pr/Tr-EAD couplant les réseaux de Petri et les équations algébro-différentielles pour modéliser et simuler des systèmes hybrides de complexité comparable entre les points de vue discret et continu. Après une formalisation de cette méthode, sa mise en œuvre au travers d'un simulateur hybride (obtenu par extension d'un simulateur discret) est exposée.

**Mots-clés** : Simulation mixte, Réseaux de Petri de haut niveau, Couplage de simulateurs.

**Abstract** : This paper presents a new method named Rdp Pr/Tr-EAD which combines Petri nets and differential algebraic equations for modeling and simulating hybrid systems which discrete and continuous points of view are comparable. After a formalisation of this method, a hybrid simulation technique based on it and implemented by an extension of a discrete simulator is exposed.

**Keywords** : Hybrid simulation, High-level Petri nets, Simulators combination.

## 1. Introduction

L'essor technologique dans plusieurs domaines ainsi que l'accroissement de la compétition industrielle au niveau mondial ont incité durant ces dernières années, à la mise en place de nouvelles stratégies dans les industries : on assiste de nos jours à une grande diversification des produits fabriqués en petites séries, phénomène maîtrisé d'une part par l'utilisation de plus en plus massive de systèmes d'information puissants, mais aussi d'autre part par l'utilisation d'ateliers de plus en plus automatisés et flexibles.

L'impact de cette mutation dans l'industrie se traduit par l'amélioration de la productivité, l'optimisation des coûts d'exploitation et de stockage et la diminution des risques de défaillances humaines. Mais ceci nécessite de bien maîtriser le cycle de développement et de production des produits, cycle qui est en constante réduction d'où l'adoption de techniques d'ingénierie concurrente. Cette maîtrise passe par l'utilisation de méthodes, techniques et d'outils adaptés aux

problématiques abordées dans les différentes phases du cycle de vie des produits (analyse, définition, production, exploitation et maintenance, fin de vie).

Parmi les classes d'outils les plus utilisés, on peut noter :

- des outils permettant de rendre plus efficaces les systèmes d'information technique : citons les outils de définition électronique de produits (permettant de définir des maquettes numériques dans le but de réduire le nombre de prototypes réellement réalisés), les systèmes de gestion de données techniques ou SGGT (permettant de mieux maîtriser les données techniques relatives à la définition des produits : arborescences produits, configurations de produits, ...). Ceux-ci concernent la phase de définition/conception et/ou la phase d'exploitation des produits.
- des outils intelligents d'aide à la décision permettant d'optimiser la recherche de la flexibilité en adaptant la production à l'évolution de la demande et de la technologie : citons les outils de gestion de production, des outils de planification et d'ordonnancement. Ceux-ci sont utilisés en phase de production.
- ...

Malgré cet essor technologique remarquable, on constate que certaines phases du cycle de vie des produits sont délaissées ou peu abordées : ce sont surtout les phases initiales de ce cycle de vie. On peut citer la modélisation de systèmes complexes, l'analyse de leurs défaillances ou encore la prédiction, l'évaluation et la maîtrise des performances de ces systèmes (disponibilité, coût, ...). On peut illustrer ce constat par les problématiques industrielles liées à la prochaine génération de systèmes satellitaires dédiés aux radiocommunications. Les marchés cibles sont la téléphonie mobile, la messagerie et le multimédia. L'enjeu pour les industriels est de satisfaire au plus tôt les utilisateurs et les investisseurs en proposant aux uns :

- une disponibilité de service et une qualité suffisantes pour fidéliser le marché très concurrentiel,
- une réduction des coûts d'utilisation,
- et une garantie pour une date d'entrée en service optimal, préoccupation primordiale pour capter le marché visé face à la concurrence ;

et en proposant aux autres, de disposer très en amont d'une vision qualité/prix avec deux soucis résultants :

- la diminution du coût de revient tout en maintenant un niveau de qualité acceptable,
- la maîtrise du coût global en appréhendant l'ensemble du cycle de vie et les besoins liés à l'évolution des services et au soutien logistique.

De nombreux systèmes sont à l'étude dans ce contexte, certains commençant même à être déployés en vue d'entrer en service dès 1998. Ces systèmes s'appuient, pour la plupart, sur des constellations de satellites en orbite, et leurs performances tant techniques, économiques que de disponibilité sont étroitement liées.

La définition puis la maîtrise de la qualité du service rendu nécessitent de considérer en permanence ces trois composantes extrêmement combinées, et ce, dès les phases initiales en vue de décider de l'investissement. Cette problématique est d'autant plus délicate que les délais de décision et de réalisation sont très courts.

Dans ce contexte, les industriels<sup>1</sup> doivent se doter d'environnements d'analyse système permettant aux équipes projets d'appréhender l'ensemble des composantes et offrant une bonne réactivité pour étudier la sensibilité des divers paramètres entrant en jeu dans le but de trouver les meilleurs compromis. Il en résulte donc une nécessité de comprendre, concevoir et gérer les systèmes en intégrant les procédés et leur environnement d'exploitation. Cette intégration nécessite souvent de savoir **représenter** et **évaluer** des **comportements discrets, continus** ou **hybrides**<sup>2</sup>, ces derniers étant souvent à la base des systèmes industriels.

La **simulation** est partie prenante dans cette démarche pour étayer les dossiers en amont et ainsi aider à répondre à plusieurs difficultés :

- complexité des systèmes : nombreuses ressources en interaction, déploiement progressif, régimes non stationnaires, renouvellement des satellites en orbite ;
- faible retour d'expérience : à ce jour, peu d'analyses comparatives ont été réalisées ;
- nécessité de réaliser des analyses partielles.

Notre expérience industrielle nous a démontré la nécessité de doter les phases initiales du cycle de vie des systèmes complexes de méthodes, techniques et outils permettant d'évaluer :

- la faisabilité et l'efficacité de politiques de production et de soutien (ordonnancement, pilotage, maintenance, ...),
- les performances opérationnelles (disponibilité, sécurité et coût d'exploitation) des systèmes considérés.

Les besoins industriels liés à un outil de simulation concernent à la fois des problématiques liées à la maîtrise de la sûreté de fonctionnement (principalement disponibilité et sécurité) des systèmes (produits et installations) et des problématiques liées à la validation du plan de fabrication dans le cadre d'une production perturbée (pannes, aléas, ...).

Nos travaux de recherche et développement consistent donc à définir des méthodes, techniques et outils permettant aux industriels dans divers domaines de construire des ateliers systèmes, leur permettant de mieux maîtriser les études dans les phases initiales du cycle de vie de leurs systèmes. Ces méthodes, techniques et outils sont basés sur l'utilisation des réseaux de Pétri (RdP) pour la modélisation et la simulation des systèmes complexes.

Nous avons mené une étude ayant regroupé plusieurs industriels et visant à analyser leurs besoins dans le domaine de la **simulation mixte** (cf. [Nakhle et al., 92], [Daubas, 94], [David, 96]) puis à comparer les méthodes et outils existants. Face aux limites de cet existant, nous avons mis au point une méthode de modélisation et de simulation mixte et initialisé le développement d'un outil supportant celle-ci.

Dans cet article, nous présentons cette méthode de modélisation mixte ainsi que les caractéristiques principales du simulateur. Après avoir décrit le contexte dans lequel s'est

---

<sup>1</sup> Outre ceux du spatial, les industriels concernés sont ceux qui utilisent des systèmes de production (exploités dans les industries agro-alimentaires ou du pétrole ; mais aussi dans le nucléaire, l'industrie manufacturière) ou qui fabriquent des produits complexes (industrie aéronautique, de la défense, de l'automobile, ...).

<sup>2</sup> c'est-à-dire couplant des phénomènes continus et des phénomènes discrets. Le terme « **mixte** » est aussi utilisé pour désigner ce type de comportements.

déroulée cette étude, le modèle hybride défini est présenté ; ensuite, sont abordés les problèmes inhérents au simulateur qui a été conçu, notamment d'un point de vue algorithmique. Enfin, les conclusions de cette étude ainsi que nos travaux futurs sont présentés.

## 2. Contexte des travaux et état de l'art

IXI mène depuis plusieurs années une réflexion autour des méthodes, techniques et outils dans le domaine de la Sûreté de Fonctionnement des systèmes complexes conjointement avec des industriels et des universitaires. Cette réflexion est menée autour de la technique des Réseaux de Petri (cf. [Peterson, 81]) et de leur utilisation dans l'industrie. Ces différents travaux réalisés sont souvent concrétisés par le développement d'outils de Modélisation Interactive et Simulation de Systèmes par Réseaux de Petri (MISS-RdP). On distingue deux outils principaux<sup>3</sup> : **MISS-RdP Standard** et **MISS-RdP Coloré**.

MISS-RdP reflète les préoccupations constantes d'évaluation de performances opérationnelles et de coût des systèmes, ce notamment dans les phases initiales des projets. Il est ainsi dédié à l'analyse des architectures redondées et reconfigurables, aux comportements dynamiques et processus parallèles avec tâches temporisées et synchronisations, aux ressources limitées et partagées pour l'implémentation des fonctions et des services, aux risques de défaillances et aux configurations dégradées. Il offre des fonctionnalités de :

- modélisation par utilisation des RdP temporels, stochastiques et interprétés. Ce type de RdP permet de décrire la dynamique fonctionnelle et dysfonctionnelle d'un système en intégrant à la fois les aspects temporels et aléatoires et les événements déterministes et indéterministes ;
- simulation par tirage de Monte Carlo (cf. [Kalos et al., 86], [CSEP, 95]) des modèles de RdP.

La structure statique des RdP est constituée de places (représentées par des cercles), de transitions (représentées par des rectangles) et d'arcs (représentés par des flèches)<sup>4</sup>. Une structure dynamique représentée par des jetons peut être superposée à celle-ci. **MISS-RdP Standard** est basé sur les RdP temporels, stochastiques et interprétés alors que **MISS-RdP Coloré** [Hochon et al., 97c] intègre en plus les RdP de haut niveau [ISO/IEC 15909, 97] grâce à l'utilisation de jetons colorés (chaque jeton est identifiable par une structure de données) [Jensen, 96], [Jensen, 97].

MISS-RdP offre une grande variété de mesures : probabilité d'être dans un état donné, temps moyen ou cumulé dans un état, nombre de passages dans un état ou de franchissements d'une transition, ... Ces mesures sont rendues possibles grâce à l'utilisation de la notion d'observations de type (états<sup>5</sup>, événements<sup>6</sup>, coûts<sup>7</sup>) permettant de décorréler la modélisation comportementale

---

<sup>3</sup> développés et commercialisés par la société IXI depuis 1992 pour la version « Standard » et 1995 pour la version « Coloré ».

<sup>4</sup> Il est à noter que des travaux de normalisation de la représentation des RdP sont actuellement en cours (ISO/IEC/JTC1/SC7/WG11).

<sup>5</sup> Ces observations sont définies par des conditions de marquage des places du RdP et des conditions de valeurs des variables globales (messages).

des mesures et observations issues de la simulation. L'aspect stochastique de MISS-RdP est caractérisé par la possibilité d'utiliser des lois de probabilité pour caractériser les instants de tir des transitions. Plusieurs lois de probabilité sont disponibles dans les outils MISS-RdP.

Dans la continuité des travaux autour de cette gamme d'outils, nous avons entrepris une étude consistant à doter MISS-RdP de capacités à prendre en compte des phénomènes continus des systèmes au niveau de la modélisation et de la simulation. Cette étude porte sur l'intégration de systèmes d'équations algébro-différentielles dans la modélisation par réseaux de Petri de systèmes complexes. Les études préliminaires ont consisté à analyser et évaluer différentes solutions possibles afin de bien répondre aux besoins des industriels.

Les besoins résultant de simulation mixte sont d'être capable d'établir un modèle simulable décrivant les comportements dynamiques du système et permettant de déterminer les événements (et leur date d'occurrence : instants discrets) faisant évoluer les états significatifs de ce système. Les instants discrets d'occurrence des événements sont généralement associés aux phénomènes suivants :

- phénomènes liés à un comportement discret : instants de défaillance, instants de remise en service, instants de changement de phase ou d'arrêt programmé,
- phénomènes liés à un comportement continu : atteinte de seuils sur des variables continues.

Certains événements étant aléatoires (par exemple les défaillances), la simulation doit mettre en œuvre la technique de Monte Carlo pour parcourir plusieurs scénarios de comportement en tenant compte des distributions de probabilités caractérisant l'occurrence de ces événements aléatoires.

Les premières études ont permis de formaliser les méthodes et concepts en faisant un état de l'art de la représentation et de la simulation des systèmes hybrides. Concernant la représentation des systèmes hybrides, trois approches de techniques de modélisation ont été étudiées et il en résulte pour chacune d'elles :

- **celle qui étend un modèle continu** : cette approche est applicable lorsque l'on veut étudier des systèmes continus avec très peu de changements de configurations et est totalement inapplicable dans le cas de procédés de fabrication hybrides. En effet, le nombre de booléens servant à coder les configurations deviendrait très grand et de plus, tous les seuils sont surveillés à tout moment alors qu'il suffirait de surveiller un petit nombre de seuils significatifs.
- **celle qui étend un modèle discret** : les modèles à événements discrets sont basés sur des états discrets et un temps discret explicité sous la forme d'une suite d'événements qui sont les changements d'états (fonction « état suivant » d'un automate fini ou franchissement de transition dans un réseau de Petri). Un tel modèle est particulièrement bien adapté pour décrire la succession des configurations d'un système hybride nécessaire à la fabrication d'un produit. Les RdP ont été étendus de diverses façons pour expliciter le temps de manière quantitative. Dans les réseaux de Petri temporels, la durée associée à une transition est une durée de sensibilisation. Le modèle hybride est alors formé d'un modèle

---

<sup>6</sup> Ces observations sont définies par des transitions, des entrées ou des sorties d'états, ou encore le passage d'un état à un autre.

<sup>7</sup> Ces observations permettent de prendre en compte des données économiques dans le cadre des analyses de performances opérationnelles. Les versions actuelles de MISS-RdP n'intègrent pas encore les observations de type « coût », mais l'étude de faisabilité a été menée (cf. [Hochon et al., 97a]).

discret (le RdP) qui est complété d'une seule variable continue : le temps. La condition pour que cette approche soit possible est que toutes les variables d'état continues soient des fonctions linéaires du temps, calculables à tout instant à partir de l'état discret. La modélisation de systèmes hybrides par des RdP temporels souffre cependant de certaines limites repoussées par l'utilisation de RdP de haut niveau (RdP colorés par exemple), ce qui permet d'associer des variables d'état continues à des jetons. Le modèle hybride est alors obtenu en représentant les configurations par des places (variables d'état discrètes) et les variables d'état continues par des attributs associés aux jetons. Des équations algébriques associées aux transitions permettent de calculer les dates des événements et les attributs des jetons à ces dates. Mais une limite incontournable subsiste : cette approche n'est valable que si l'on peut calculer explicitement la date d'occurrence d'un événement de sortie lors de l'entrée dans un état. Or, des durées de phases peuvent dépendre de l'évolution de certaines composantes continues de l'état, ce qui nécessite de disposer d'équations algébriques permettant de calculer les composantes continues à tout instant.

- **celle qui fait coopérer un modèle discret et un modèle continu** : cette approche a l'inconvénient d'être moins claire lorsque l'on utilise deux modèles distincts pour représenter un système hybride. La simulation d'un modèle hybride via des ordinateurs impose de discrétiser le temps de façon périodique (lorsque le pas d'intégration est fixe) ou aperiodique (lorsque le pas dépend de la dynamique du système). Le couplage d'un simulateur continu à un simulateur discret nécessite donc de résoudre des problèmes de synchronisation en faisant coïncider des dates du temps du simulateur continu avec des événements du simulateur discret, d'où la nécessité de contrôler la discrétisation du temps.

Les limites de chacune de ces approches nous ont poussé à définir une approche faisant coopérer un modèle discret et un modèle continu. Cette nouvelle approche est fondée sur l'utilisation d'un RdP pour représenter la partie discrète et d'un système d'équations algèbro-différentielles pour représenter la partie continue du système hybride. Le RdP pilote le système d'équations (lors de chaque changement de configuration, la structure du système est modifiée, de même que le système d'équations correspondant) et de façon symétrique, le système d'équations contrôle l'évolution du RdP (le système d'équations permettant de savoir à quelles dates seront franchies les transitions correspondant à des franchissements de seuils par des variables d'état continues). Ce modèle contient trois types de places (des places d'activités continues auxquelles sont associées des équations algèbro-différentielles, des places purement discrètes représentant des attentes ou des états discrets de ressources, des places de décision représentant l'impact de décisions de niveau supérieur sur le comportement du système) et deux types de transitions (transitions de seuil dont le tir est provoqué par une variable d'état continue et transitions purement discrètes dont la date de franchissement dépend uniquement du modèle discret).

Dans la section suivante, nous proposons une formalisation du couplage entre un modèle discret représenté par un RdP et un modèle continu représenté par des équations algèbro-différentielles au sein du RdP.

### **3. Formalisation du modèle hybride proposé : les RdP Pr/Tr-EAD**

Dans cette section, nous présentons et discutons le modèle hybride que nous avons défini : celui-ci permet de coupler des RdP et un ensemble d'équations comme introduit par [Daubas et al., 94] [Andreu, 96]. Ce modèle est baptisé « **RdP Pr/Tr-EAD** » [Champagnat et al., 97].

### 3.1 Définition du modèle

L'intégration entre les deux modèles se fait de la façon suivante : un jeton mis dans une place déclenche l'intégration des équations correspondantes. Parallèlement à l'intégration, un certain nombre de seuils sont surveillés. Chaque seuil est associé à une transition aval d'une place marquée. Quand le seuil est franchi, cela signifie que l'événement correspondant est apparu, et la transition associée à ce seuil est franchie. Un nouveau marquage est calculé et l'intégration du nouveau système démarre.

Le modèle RdP représente les différentes configurations du système (différentes connexions entre les entités du procédé). Pour chaque configuration (état discret), un ensemble d'équations est intégré. Un système d'équations est associé à une place s'il existe un phénomène continu dans l'état discret correspondant. Le modèle RdP utilisé doit manipuler des variables continues (test de seuil, suivi de variables continues, modification des valeurs lors de changement d'état). Par conséquent, nous utilisons des RdP prédicats-transitions (RdP Pr/Tr) [Genrich et al., 94]. La description de l'évolution des variables continues se fait par un ensemble d'équations. Ces équations peuvent être de type algébrique et/ou différentiel. C'est pour cela que nous parlerons d'équations algèbro-différentielles (EAD). L'ensemble des équations peut être de complexité variable (linéaire/non-linéaire, explicite/implicite), ce qui rendra la mise en œuvre plus ou moins complexe.

Chaque place  $P_i$  est associée à un ensemble d'EAD  $F_i$ . Le tir de transition correspond à un changement d'état. C'est pourquoi, à chaque transition  $T$ , deux fonctions sont associées. La première, appelée *fonction de sensibilisation*  $\varepsilon$ , permet de rajouter une contrainte supplémentaire au tir des transitions correspondantes. La transition  $T$  ne pourra être franchie que si ses places amont possèdent au moins un jeton, et si  $\varepsilon$  est vraie. Cette condition de sensibilisation permet d'exprimer qu'une variable franchit un seuil qui induit un changement de configuration (commandable ou non). La seconde, appelée *fonction de jonction*  $\mathfrak{J}$  [Barton, 92], permet de calculer les valeurs initiales des variables en accord avec l'état suivant.

Ce modèle est défini par le triplet  $\langle PI, T, M \rangle$  où  $PI$  est l'ensemble des places,  $T$  l'ensemble des transitions et  $M$  le marquage. Les places de ce modèle sont décrites par la paire  $\langle PI, F \rangle$  où  $PI$  correspond aux places du réseau ( $card(PI) = l$ ,  $l$  étant le nombre de places), et où  $F$  est l'ensemble des fonctions associées aux places.  $F$  est défini comme suit :

$$F = \begin{bmatrix} F_1(\dot{X}_1, X_1, t) \\ \vdots \\ F_l(\dot{X}_l, X_l, t) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$X_e$  étant l'ensemble des variables manipulées par les fonctions  $F_e$  associées à la place  $Pl_e$ . Nous avons :

$$F_e(\dot{X}_e, X_e, t) = \begin{bmatrix} f_{e1}(\dot{X}_e, X_e, t) \\ \vdots \\ f_{em}(\dot{X}_e, X_e, t) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Où  $f_{e1} \dots f_{em}$  sont des équations représentant l'évolution des variables continues et sont déduites des lois de la physique. Ainsi, chaque place du réseau (qui représente un état discret) peut décrire l'évolution d'une variable continue (grâce aux jeux d'équations F).

Les transitions de ce réseau sont quant à elles décrites par le triplet  $\langle T, E, J \rangle$ , où  $T$  représente l'ensemble des transitions du réseau ( $card(T)=\theta$ ,  $\theta$  étant le nombre de transitions),  $E$  est l'ensemble des fonctions de sensibilisation, et  $J$  l'ensemble des fonctions de jonction associées aux transitions. Nous avons alors  $E$  qui est défini comme suit :

$$E = \begin{bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_\theta \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Le seuil  $E_i$  associé à la transition  $T_i$  est défini comme étant la première solution de :

$$E_i(\dot{X}_i, X_i, t) = 0 \quad (3.4)$$

$X_i$  étant l'ensemble des variables continues utilisées par  $E_i$ . Cette fonction permet de détecter les événements d'état (une variable atteint une valeur prédéterminée), aussi bien qu'un événement de temps ( $t$  atteint une valeur pré-définie). Les fonctions de sensibilisation sont activées lorsque leurs transitions correspondantes sont sensibilisées. Lors du franchissement de transitions, les fonctions de jonction associées sont activées. Elles sont définies par :

$$J = \begin{bmatrix} J_1 \\ \vdots \\ J_\theta \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

La fonction  $J_i$  associée à la transition  $T_i$  lors du franchissement de  $T_i$  à la date  $t$  calcule les valeurs des variables ainsi que de leurs dérivées.

$$J_i : \begin{cases} \dot{X}_i(t^+) = j_{i\dot{X}}(\dot{X}_i, X_i, t^-) \\ X_i(t^+) = j_{iX}(\dot{X}_i, X_i, t^-) \end{cases} \quad (3.6)$$

Ce qui signifie que les valeurs des variables et de leurs dérivées juste après  $t$  (à  $t^+$ ) sont calculées à partir des valeurs des variables et de leurs dérivées juste avant  $t$  (à  $t^-$ ).

Le dernier élément de ce modèle est  $M$ , qui représente le marquage du réseau. Les variables du système se trouvent réparties dans l'ensemble des jetons du réseau. Lorsqu'une place comporte plusieurs jetons, chaque jeton instancie le système d'équations correspondant avec l'ensemble des variables qu'il transporte. Prenons par exemple le cas d'une place  $Pl_e$  contenant deux jetons A et B. Les équations suivantes seront actives, soit  $2m$  équations :

$$\begin{bmatrix} f_{e1}(\dot{X}_{eA}, X_{eA}, t) \\ \vdots \\ f_{em}(\dot{X}_{eA}, X_{eA}, t) \\ f_{e1}(\dot{X}_{eB}, X_{eB}, t) \\ \vdots \\ f_{em}(\dot{X}_{eB}, X_{eB}, t) \end{bmatrix}$$

### 3.2 Remarques sur le modèle

Ce modèle définit un automate hybride. Les états de l'automate correspondent au marquage accessible du réseau, et l'ensemble des équations associées à chaque état est l'union des ensembles d'équations associées aux places marquées de chaque état accessible. Un des intérêts d'un tel modèle est qu'aucune limitation n'est imposée sur la description de la partie continue. Cependant, lorsque le modèle est utilisé en simulation (pour déduire des lois de commande, valider un plan de production, surveiller l'évolution d'un système), il convient de prendre quelques précautions lors de l'écriture du système. En effet, un ensemble d'équations représente l'évolution des variables continues au sein d'une configuration. Généralement, le nombre de variables est inférieur au nombre d'équations indépendantes. Pour simuler un tel système il faut répartir les variables en « variables inconnues » (qui seront modifiées par les équations), et en « variables fixées » (qui n'évoluent pas entre deux configurations). Cette répartition doit se faire pour chaque configuration du système, c'est-à-dire pour tous les marquages accessibles. Regardons les conditions à respecter pour chaque état. Pour éviter d'instancier des variables à chaque jeton, nous nous restreignons au cas où chaque place ne peut contenir qu'un jeton au plus (RdP sauf).

Chaque état de l'automate correspond à une configuration du processus. Pour chaque état (marquage du RdP), trois conditions doivent être satisfaites. Soit  $mp$  l'ensemble des places marquées, l'ensemble des équations actives est :

$$U_{j \in mp} F_j(\dot{X}_j, X_j, t) \quad (3.7)$$

Cet ensemble d'équations doit être homogène (le nombre d'équations indépendantes doit être égal au nombre de variables inconnues). De plus les variables manipulées par  $E_i$  doivent appartenir à l'ensemble des variables du système. La troisième condition concerne la fonction de jonction. Il faut s'assurer qu'elle définisse correctement les conditions initiales pour chaque état qui peut résulter de ce franchissement.

Nous nous assurons que les places auxquelles au moins une équation est associée sont couvertes par un ensemble d'invariants de place disjoints ( $I_i$ ). Le marquage accessible est, par conséquent, formé par une place de chaque p-invariant plus des places auxquelles aucune équation n'est associée. Ce qui signifie qu'un sous-modèle représentant un équipement sera modélisé par un ensemble de places qui décrit toutes les configurations possibles de l'équipement. A chaque configuration, correspond une évolution des variables continues particulières. Le jeton correspondant à cet équipement sera caractérisé par l'ensemble des variables nécessaires pour décrire les différentes évolutions de cet équipement.

La section suivante présente le simulateur hybride mettant en oeuvre des modèles RdP Pr/Tr-EAD.

## 4. Le simulateur hybride

Dans cette section, nous décrivons la mise en œuvre d'un modèle RdP Pr/Tr-EAD au travers du simulateur en cours de développement dans l'outil **MISS-RdP Mixte**<sup>8</sup> [Hochon et al., 97d].

La mise en œuvre de la simulation d'un modèle RdP est faite généralement par l'intermédiaire d'un joueur de RdP. De nombreuses approches de mise en œuvre fortement influencées par les objectifs de simulation ont été développées. Nous nous intéressons ici aux simulateurs à événements discrets dont l'objectif est de calculer des statistiques relatives aux performances des systèmes représentés sous la forme de modèles RdP. Ceux-ci sont caractérisés par une mise en œuvre séquentielle dirigée par les événements.

La gamme d'outils MISS-RdP est dotée de simulateurs dont la mise en œuvre est basée sur l'utilisation d'un mécanisme d'inférence manipulant un système de règles compilés à partir d'un modèle de RdP et ne dépendant pas de ce modèle [Valette et al., 95]. Pour cela, on gère une horloge unique et un échéancier (unique aussi) qui est une liste de couples du type <événement, date d'occurrence>. Les événements de l'échéancier sont ordonnés chronologiquement et le simulateur évolue selon la cadence de l'horloge qui est mise à jour en fonction des occurrences des événements. L'algorithme général est donc une itération sur le cycle suivant :

Algorithme général du cycle du simulateur discret :

1. choisir le premier événement de l'échéancier
2. exécuter cet événement,
3. retirer cet événement de l'échéancier,
4. remettre à jour l'échéancier,
5. avancer l'horloge à la date du prochain événement.

Ces principes généraux sont conservés et extrapolés dans le cadre de modèles hybrides.

Un tir de transition correspond à un changement de configuration de l'état continu. On gère une liste d'équations. Lors d'un franchissement de transition, on enlève les équations associées aux places d'entrée, et on met les équations associées aux places de sortie, puis on calcule les conditions initiales du nouvel état. Ensuite, on détermine la liste des transitions sensibilisées afin d'établir la liste des fonctions de sensibilisation à surveiller. A partir de la liste des équations, de l'état initial et de la liste des seuils à surveiller, l'intégrateur continu est appelé pour exécuter une simulation qui s'arrête lorsque le premier seuil est franchi. A l'aide des informations sur ce seuil et sur l'état du système, on recherche la transition associée à l'événement, puis celle-ci est tirée. D'où l'algorithme général qui est une itération sur le cycle suivant :

---

<sup>8</sup> C'est le troisième outil de la gamme des produits MISS-RdP : cette version est une extension de MISS-RdP Coloré intégrant les RdP Pr-Tr/EAD définis en section 3 dans cet article. Une version opérationnelle et commercialisée sera disponible mi-98.

Algorithme général du cycle du simulateur hybride :

1. choisir le premier événement de l'échéancier.
2. exécuter cet événement (exécution des fonctions de jonction)
3. remettre à jour l'échéancier.
  - retirer l'événement courant (qui a été exécuté)
  - recalculer les dates d'occurrences des événements de l'échéancier
4. s'il existe une transition franchissable immédiatement, aller en 1. Sinon activer le simulateur continu avec les équations des places marquées en lui précisant les événements de temps ou d'état à détecter (ie. événements de transitions seuil, date d'occurrence de la première transition discrète de l'échéancier).
5. attendre la fin de la simulation continue (celle-ci doit fournir l'événement qui provoque sa fin).
6. retrouver la transition seuil concerné par l'événement qui a provoqué la fin de la simulation continue et mettre à jour l'échéancier. Aller en 1.

Pour la mise en œuvre de cet algorithme dans MISS-RdP, nous avons étendu son simulateur pour prendre en compte des modèles hybrides RdP Pr/Tr-EAD avec comme restriction l'utilisation d'équations explicites.

Dans le cas où, partant de  $x=f(t)$ , on peut calculer  $t=f^{-1}(x)$ , on peut donc calculer la date d'occurrence d'un événement lié à l'évolution des variables continues (ex. : date d'occurrence d'une transition seuil) ou à l'aide d'une fonction d'extrapolation donnant  $t=f(x)$ . Un premier algorithme envisageable est basé sur le principe suivant : on calcule les dates d'occurrence des événements seuils explicitement ( $t=f(x)$ ) puis on les range dans l'échéancier. Lors des tirs des transitions, on met à jour les variables continues ( $x=f(t)$ ). On obtient donc l'algorithme suivant pour MISS-RdP :

1. initialiser l'échéancier
    - calculer les dates d'occurrence des événements discrets
    - calculer les dates d'occurrence des événements seuils
  2. initialiser l'horloge
  3. TANTQUE simulation en cours FAIRE
    - a) calculer la liste des transitions tirables
    - b) sélectionner une transition tirable
    - c) Tirer cette transition
      - mettre à jour les variables discrètes
      - mettre à jour les variables continues ( $x=f(t)$ )
    - d) mettre à jour l'échéancier
      - retirer le événements qui ne sont plus à l'ordre du jour
      - calculer et ajouter les dates d'occurrence des événements discrets
      - calculer et ajouter les dates d'occurrence des événements seuils  
(  $t=f^{-1}(x)$  )
    - e) avancer l'horloge à la date du prochain événement
- FINTANTQUE

Remarques :

- Cet algorithme est limité aux EAD explicites ; néanmoins, il offre une puissance de calcul permettant de mettre en œuvre le modèle RdP Pr/Tr-EAD présenté dans la section précédente.
- Le couplage d'un simulateur continu permettrait de lever cette limite et de prendre en compte toute la puissance d'expression du modèle hybride défini dans cet article.

## 5. Conclusions

Dans cet article, nous avons défini et discuté un modèle combinant des réseaux de Petri prédicats-transitions avec des équations algébro-différentielles (RdP Pr/Tr-EAD). Dans un tel modèle, un système d'équations est associé à une place ; lorsque celle-ci est marquée, les équations associées sont intégrées. Les fonctions de jonction permettant de calculer les valeurs initiales liées à la simulation continue lors de chaque franchissement de transition et fonctions de sensibilisation caractérisant les franchissements de seuil sont aussi présentées. La puissance de cette technique est illustrée par la modélisation d'une unité de stockage de gaz [Champagnat et al., 98a], [Champagnat et al., 98b].

Nous proposons également un simulateur hybride permettant de mettre en œuvre de tels modèles. L'algorithme de celui-ci est aussi détaillé. La validation de cet algorithme est en cours dans la gamme d'outils MISS-RdP. Les problèmes rencontrés sont liés à la caractérisation des simulateurs continus à coupler au simulateur discret. Pour cela, une première version de ce simulateur se limitera à l'utilisation des équations explicites dans un simulateur discret. Le couplage d'un simulateur continu nécessite une caractérisation des outils de simulation continue capables de dialoguer avec le simulateur discret de MISS-RdP.

## 6. Références bibliographiques

- [Alla et al., 92] H. Alla, G. Bel, J.B. Cavaillé, J. Le Bail, « les systèmes de production par lots : une approche discret-continu utilisant les réseaux de Petri hybrides », Automatisation des procédés mixtes continus et séquentiels, AFCET-SEE, Paris, France, Janvier 1992.
- [Andreu, 96] D. Andreu « Commande et supervision des procédés discontinus : une approche hybride », Thèse de Doctorat de l'Université Paul Sabatier, Toulouse, France, Novembre 1996.
- [Barton, 92] P.I. Barton, « The modelling and simulation of combined discrete/continuous processes », PhD thesis, University of London, England, 1992.
- [Chabot et al., 98] J.-L. Chabot, JP Signoret, F. Ducamp, JM Mattei, T. Hutinet, P. Joulain, « Symulation hybride : méthode de modélisation intégrant phénomènes continus et discrets », article soumis au colloque  $\lambda\mu 11$  Arcachon 98.
- [Champagnat et al., 97] R. Champagnat, H. Pingaud, P. Esteban, R. Valette, D. Andreu, J.M. Le Lann, X. Joulia, « Formalisation des méthodes et concepts », rapport LAAS n° 97027, Septembre 1997.
- [Champagnat et al., 98a] R. Champagnat, H. Pingaud, H. Alla, C. Valentin-Roubinet, J.-M. Flaus, « A gas storage example as a benchmark for hybrid modeling », In Proceedings of ADPM'98, Reims, France, Mars 1998.
- [Champagnat et al., 98b] R. Champagnat, P. Estéban, H. Pingaud, R. Valette, « Modeling and simulation of a hybrid system through PR/TR PN-DAE model », In Proceedings of ADPM'98, Reims, France, Mars 1998.
- [CSEP, 95] Computational Science Education Project, « Introduction to Monte Carlo methods », Electronic book, <http://csep1.phy.ornl.gov/mc/mc.html>, 1995.
- [Daubas et al., 94] B. Daubas, A. Pagès, H. Pingaud, « Combined simulation od hybrid processes », IEEE-SMC, pages 320-325, San Antonio, USA, October 1994.
- [Daubas, 94] B. Daubas, « Modélisation et simulation des procédés continus et discontinus », Thèse de doctorat de l'INPT, Toulouse, France, Novembre 1994.
- [David et al., 92] R. David, H. Alla, « Du grafcet aux réseaux de Petri », Hermès, 2<sup>ème</sup> édition revue et augmentée, 1992.
- [David, 96] R. David, « Systèmes hybrides : modélisation par réseaux de Petri hybrides », Pôle productique Rhône-Alpes, France, Février 1996.

- [Genrich et al., 94] H.L. Genrich, H.M. Hanisch, K. Wollkaf, « Verification of recipe-based control procedures by means of predicate-transition nets ». Lectures notes in Computer Science n° 815, Application and Theory of PN, pp278-297, Zaragoza, Espana, 1994.
- [Hochon et al., 97a] J.-C. Hochon, A. Guevel, H. Antoniol, « Prise en compte de données économiques dans le cadre des analyses de performances de systèmes par simulation », rapport d'étude CNES-IXI, réf. IXI/TLS0120/AGL/D01. Septembre 1997.
- [Hochon et al., 97b] J.-C. Hochon, A. Guevel, « Analyse des évolutions de MISS-RdP pour répondre aux besoins du CNES en matière de bibliothèques de modèles génériques de constellations de satellites », rapport d'étude CNES-IXI, réf. IXI/TLS0121/AGL/D01. Septembre 1997.
- [Hochon et al., 97c] J.-C. Hochon, D. Claude, « MISS-RdP 5 : manuel de référence », Manuel d'utilisation, réf. : IXI/TLS/mrdp/MdR/D63.G. Juin 1997.
- [Hochon et al., 97d] J.-C. Hochon, F. Dannoux, « MISS-RdP Mixte : Spécifications fonctionnelles générales », rapport d'étude IXI, réf. IXI/TLS0124/FDX/SFG/NT01, rév. 0.
- [Hochon et al., 98] J.-C. Hochon, F. Dannoux, R. Champagnat, J.-P. Bertrand, P. Darfeuille, J.-P. Signoret : « Optimisation des systèmes de production industriels : apport des techniques de simulation mixte de phénomènes continus et discrets », article soumis au colloque  $\lambda\mu$ 11 Arcachon 98.
- [ISO/IEC 15909, 97] « High-level Petri nets : concepts, definitions and graphical notation », Committee Draft ISO/IEC 15909, version 3.4, October 1997.
- [Jensen, 96] K. Jensen, « An introduction to the practical use of Coloured Petri Nets », Advanced course on Petri Nets, Dagstuhl Germany, 1996.
- [Jensen, 97] K. Jensen, « Coloured Petri Nets. Basic concepts, analysis methods and practical use - vol. 3 : practical use », Monographs in Theoretical Computer Science, Springer-Verlag, 1997.
- [Kalos et al., 86] M. Kalos, P. Whitlock, « Monte Carlo Methods », Wiley-Interscience, New York, 1986.
- [Nakhle et al., 92] M. Nakhle, P. Pottier, « Spécification, description et simulation de systèmes techniques mixtes (continus et discrets) », Automatisation des procédés mixtes continus et séquentiels, AFCET-SEE, Paris, France, Janvier 1992.
- [Sibertin-Blanc, 85] C. Sibertin-Blanc, « High-level petri nets with data structures », in Applications and Theory of Petri Nets, Finland, June 1985.
- [Signoret] Modeling the behaviour of complex industrial systems with stochastic Petri Nets.
- [Valette et al., 95] R. Valette, H. Pinguaud, A. Pagès, D. Andreu, J.-C. Pascal, « Modeling, simulation and control of event-driven operation in process systems », In ETFA 95, IEEE, volume 3, pages 119-128, Paris, France, October 1995.