Une méthode pour optimiser la conduite de l'irrigation dans un contexte de rareté de la ressource en eau

Christophe Bontemps*, Stéphane Couture† et Jean-Philippe Terreaux‡

14 mai 2002

Version préliminaire

1 Introduction

Le problème d'optimisation de la conduite de l'irrigation n'est pas un problème récent mais tend toujours à être amélioré. De plus, les événements récents de sécheresse ou de restrictions de tours d'eau pour l'irrigation ont souligné l'importance d'un tel problème, l'offre d'eau alllouée aux agriculteurs étant de plus en plus limitée. Différentes domaines de la recherche se sont penchés sur ce problème : cela va de l'agronomie, à l'hydrologie tout en passant par l'économie. Ce problème qui semble a priori simple devient en fait très vite compliqué à résoudre d'un point analytique de par essentiellement des différentes fonctions qui interviennent dans la description du problème : citons comme exemple la fonction de

*LEERNA-INRA, Toulouse. bontemps@toulouse.inra.fr
†CEMAGREF, Montpellier. couture@montpellier.cemagref.fr
‡IGREF, CEMAGREF, Montpellier. jean-philippe.terreaux@cemagre.fr

production. Mais avant tout il convient de définir ce problème qui est le suivant. Un exploitant agricole dispose d'une quantité d'eau totale limitée qu'il doit répartir au mieux au cours de la saison d'irrigation, sur une parcelle de culture donnée. Nous tentons alors de répondre à deux questions : quand irriguer et combien d'eau apportée à chaque application ?

Il existe, dans la littérature, différentes procédures de modélisation pour évaluer la conduite d'irrigation optimale. Principalement, ces méthodes font appel à des techniques de formalisation mathématique courantes telles que la programmation dynamique (Yakowitz [5] ; Rao *et al.* [4]), la théorie du contrôle (Zavaleta *et al.* [6]). Cependant, il est très difficile d'obtenir des solutions analytiques à ce problème ; il faut alors avoir recours à des techniques numériques, plus ou moins sophistiquées.

L'objectif de cet article est de proposer une méthode originale pour résoudre le problème d'allocation optimale d'une quantité d'eau limitée. Dans un premier temps, nous décrivons le programme de l'exploitant agricole. Ce dernier doit répartir au mieux une offre d'eau fixée, au cours de la saison d'irrigation afin de maximiser son profit de fin de campagne. Nous dégageons alors, en utilisant la théorie du contrôle, les conditions nécessaires d'optimalité et expliquons la prise de décision du producteur agricole. Dans un deuxième temps, nous proposons une méthode numérique permettant d'obtenir des solutions à notre problème, des solutions analytiques n'étant pas calculables. Notre méthode repose d'une part sur une limitation des espaces des choix possibles par une méthode de Monte-Carlo et d'autre part sur un algorithme de résolution intégrant un modèle agronomique, un module de calcul économique et un moteur de recherche de l'optimum. Enfin, nous appliquons notre approche pour optimiser les décisions d'irrigation pour des données relatives à la région du Sud-Ouest de la France. Dans cette région, la ressource en eau est limitée.

Cet article est organisé comme suit. Le modèle de prise de décisions d'irrigation est exposé d'un point de vue analytique dans la section 2. Nous dégageons alors les conditions nécessaires d'optimalité de ce programme. La procédure numérique de résolution est décrite dans la section 3. La section 4 présente une application de notre méthode à des données portant sur le Sud-Ouest de la France pour différents climats. Finalement, nous concluons dans la section 5.

2 Le modèle

Présentons dans un premier temps le cadre théorique puis dans un second temps, décrivons les conditions nécessaires d'optimalité.

2.1 Le cadre d'analyse

Pour simplifier, on considère un agriculteur unique qui produit et irrigue une seule culture, sur une période de temps correspondant à celle d'une campagne. Ce producteur agricole fait face à une offre d'eau limitée, notée Q, initialement négociée et disponible pour toute la campagne d'irrigation. L'exploitant agricole dispose d'une connaissance parfaite des conditions climatiques auxquelles il fait face.

On considère une culture donnée, sur une période de temps correspondant à celle de la campagne, $t = 1, ..., T$. Au cours de cette période de temps, l'agriculteur prend de multiples décisions. Ces dernières contribuent à fixer le niveau de deux variables de choix qui peuvent varier dans le temps : la décision d'irriguer et la quantité d'eau apportée à chaque date.

A la date $t = 1$, l'agriculteur connaît l'eau disponible pour la saison, Q, la réserve utile[1], $\bar{V}$, et l'état de la biomasse de la plante, $\bar{M}$. L'agriculteur doit prendre des décisions d'irriguer ou pas à chaque date $t = 1, ..., T-1$, et doit choisir la quantité d'eau appliquée, notée q_t à chaque date t. Par conséquent, nous faisons face à un problème dynamique de choix discrets à horizon fini sous offre d'eau limitée, avec les trois variables d'état, $(M_t, V_t, Q_t) \quad pour \quad t = 1, ..., T$.

[1]La réserve utile est le stock d'eau dans le sol accessible par la plante.

La formation de la biomasse de la plante est un phénomène dynamique défini par le processus suivant :

$$M_{t+1} - M_t = f_t(M_t, V_t) \tag{1}$$

Cette expression du développement de la biomasse n'est en fait qu'une forme synthétisée de la dynamique de la croissance de la plante. Le changement de biomasse[2], $f_t(\cdot)$, est supposé n'être qu'une fonction de son état de développement, M_t, et du stock d'eau contenue dans le sol, V_t. La fonction, f_t, est supposée continûment différentiable et croissante en chacun de ces arguments. Plus le développement de la plante est important, plus la plante croît[3] ($f_M > 0$). Plus la réserve utile est importante, plus la plante croît ($f_V > 0$).

La dynamique de la réserve utile est donnée par un bilan net apports-prélèvements :

$$V_{t+1} - V_t = g_t(M_t, V_t, q_t) \tag{2}$$

La fonction $g_t(\cdot)$, synthétisant le bilan net entrées-sorties, est une fonction continûment différentiable, décroissante avec ces deux premiers arguments et croissante avec le dernier. Plus la plante croît, plus elle consomme de l'eau. Plus le stock d'eau est important, plus la plante prélève de l'eau. Plus l'apport par l'irrigation est important, plus la réserve utile augmente.

La quantité d'eau disponible au cours de la campagne évolue selon le processus suivant :

$$Q_{t+1} - Q_t = -q_t \tag{3}$$

Le quota a une dynamique décroissante.

La quantité d'eau apportée à chaque période de décision, q_t, est contrainte par la condition suivante :

$$\underline{q} \geq q_t \geq \bar{q} \quad pour \quad q_t > 0 \tag{4}$$

[2]La fonction de transition de la biomasse est une fonction très complexe faisant intervenir un nombre très important de variables. Pour faciliter la présentation du cadre théorique de notre analyse, nous avons simplement considéré ces deux variables comme les plus importantes.

[3]On note $f_M \equiv \frac{\partial f_t(M_t,V_t)}{\partial M_t}$

Une dose d'irrigation ne doit pas correspondre à des niveaux trop faibles ou trop élevés. Les apports minimal et maximal sont contraints par le matériel (diamètres des tuyaux, puissance de la pompe,...).

La date finale ($t = T$) correspond à la date de récolte, supposée exogène[4]. Soit Y la fonction de rendement de la plante. Cette quantité dépend uniquement de la biomasse finale à la date T et est notée $Y(M_T)$.

Le profit par hectare irrigué de l'agriculteur s'écrit :

$$\Pi = r \cdot Y(M_T) - C_{FT} - \sum_{t=1}^{T-1} (c \cdot q_t + \delta_t \cdot C_F) \tag{5}$$

où r est le prix de la production supposé exogène et déterministe, C_{FT}, les coûts fixes de production, c, le prix de la ressource en eau ; δ_t est une variable binaire qui prend la valeur 1 si l'agriculteur irrigue et 0 sinon ; C_F représente les coûts fixes par tour d'eau d'irrigation dus aux coûts de travail et d'énergie.

2.2 Les conditions nécessaires d'optimalité

Le problème de maximisation du profit de l'exploitant agricole est le suivant :

$$Max_{\{\{q_t\}_{t=1,\cdots,T-1}\}}\{-\sum_{t=1}^{T-1} (c \cdot q_t + \delta_t \cdot C_F) + r \cdot Y(M_T) - C_{FT}\} \tag{6}$$

[4]Cette date pourrait être endogénéisée et déterminée par la condition de transversalité.

$$
s/c \qquad \begin{cases}
M_{t+1} - M_t = f_t(M_t, V_t) & (\lambda_{t+1}) \\
V_{t+1} - V_t = g_t(M_t, V_t, q_t) & (p_{t+1}) \\
Q_{t+1} - Q_t = -q_t & (\alpha_{t+1}) \\
\\
\delta_t = \begin{cases} 0 & si \quad q_t = 0 \\ 1 & si \quad q_t > 0 \end{cases} \\
\\
\underline{q} \leq q_t \leq \bar{q} \qquad pour \quad q_t > 0 \\
\\
M_t \geq 0, \quad V_t \geq 0, \quad Q_t \geq 0 \\
M_1 = \bar{M}_1, \quad V_1 = \bar{V}, \quad Q_1 = Q
\end{cases}
$$

On supposera qu'en $t = 1$, la biomasse a atteint un niveau exogène, $\bar{M}_1$, et que l'on démarre avec un réservoir à pleine capacité, $\bar{V}$.

Les lettres en parenthèses $(\lambda_{t+1}, p_{t+1}, \alpha_{t+1})$ représentent les variables adjointes associées aux dynamiques des variables d'état. Elles s'interprètent comme les contributions marginales d'une unité supplémentaire de la variable d'état sur l'objectif final ou les prix implicites de ces variables à chaque période de décision.

Nous allons maintenant appliquer la théorie du contrôle, pour dégager des résultats analytiques relatifs aux conditions nécessaires que devrait vérifier le sentier de décisions optimal.

Comme $f_t(\cdot) > 0$, la plante croît toujours entre deux intervalles et donc, $M(t) > 0 \ \forall t \in [1, T]$. Une situation où la plante meurt n'est pas envisagée. On suppose pour les mêmes raisons que le réservoir sol n'est jamais vide (sinon la plante périt), et donc que $V(t) > 0 \ \forall t \in [1, T]$. Il en résulte que les contraintes d'état pures $M(t) > 0$ et $V(t) > 0$ ne sont jamais saturées sur l'intervalle $[1, T]$.

Les conditions nécessaires d'optimalité décrivant le programme d'irrigation optimal sont les suivantes[5] :

- *Le principe du maximum discret :*

$$p_{t+1} = \begin{cases} < c + \alpha_{t+1} \quad si \quad q_t = 0 \\ \\ = c + \alpha_{t+1} \quad si \quad q_t \in [\underline{q}, \bar{q}] \\ \\ > c + \alpha_{t+1} \quad si \quad q_t = \bar{q} \end{cases} \tag{7}$$

  Cette condition (7) détermine l'opportunité d'une irrigation. Si la valeur de l'eau dans le réservoir sol, p_{t+1}, est supérieure à la valeur du quota, α_{t+1}, augmentée du coût unitaire variable, c, alors l'exploitant agricole irrigue ; sinon, il n'irrigue pas.

- *Le système des équations adjointes :*
  - *Les valeurs de la biomasse :*

    $\forall t = 1, \cdots, T-1,$

    $$\lambda_{t+1} - \lambda_t = -\lambda_{t+1} \cdot \frac{\partial f_t}{\partial M_t}\Big|_{(M_t^*, V_t^*)} - p_{t+1} \cdot \frac{\partial g_t}{\partial M_t}\Big|_{(M_t^*, V_t^*)} \tag{8}$$

    La variation, au cours du temps, de λ peut être positive ou négative. Elle dépend du signe de $-\lambda_{t+1} \cdot \frac{\partial f_t}{\partial M_t}\big|_{(M_t^*, V_t^*)} - p_{t+1} \cdot \frac{\partial g_t}{\partial M_t}\big|_{(M_t^*, V_t^*)}$. Comme, par hypothèse, $\frac{\partial f_t}{\partial M_t} > 0$ et $\frac{\partial g_t}{\partial M_t} < 0$, la valeur d'avenir de la plante augmente si la productivité marginale de la biomasse dans le réservoir sol est supérieure à la productivité marginale en valeur de la biomasse.

  - *Les valeurs de la réserve utile :*

    $\forall t = 1, \cdots, T-1,$

    $$p_{t+1} - p_t = -\lambda_{t+1} \cdot \frac{\partial f_t}{\partial V_t}\Big|_{(M_t^*, V_t^*)} - p_{t+1} \cdot \frac{\partial g_t}{\partial V_t}\Big|_{(M_t^*, V_t^*)} \tag{9}$$

    p_t peut augmenter ou diminuer au cours de la saison ; son sens de variation dépend du signe $-\lambda_{t+1} \cdot \frac{\partial f_t}{\partial V_t}\big|_{(M_t^*, V_t^*)} - p_{t+1} \cdot \frac{\partial g_t}{\partial V_t}\big|_{(M_t^*, V_t^*)}$ qui est indéterminé par les hypothèses posées. La valeur de l'eau dans le sol augmente si la productivité marginale de l'eau

[5] Les détails des calculs sont donnés en Annexe A.

dans le réservoir sol est supérieure à la productivité marginale de l'eau en tant que facteur de croissance de la biomasse.

– *Les valeurs du quota :*

$$\alpha_{t+1} - \alpha_t = 0 \quad si \quad Q_t > 0 \tag{10}$$

α_t est une constante, α, tant que l'irrigant n'a pas épuisé tout son quota.

- *Les conditions de transversalité :*

$$\lambda_T = r \cdot \frac{dY}{dM}|_{(M_T^*)} \tag{11}$$

$$p_T = 0 \tag{12}$$

La valeur marginale de la biomasse à la date de récolte doit égaliser la recette marginale (équation 11). L'eau contenue dans le réservoir sol n'a plus de valeur après la récolte[6] (équation 12).

L'ensemble des conditions (7-12) décrivent le sentier des décisions d'irrigation optimal.Il n'est pas possible de dégager des solutions analytiques[7]. Il convient alors de recourir à une approche numérique pour obtenir des solutions à ce problème.

3 La procédure numérique de résolution

La difficulté de ce problème réside d'une part dans la définition des fonctions considérées et d'autre part dans la taille de l'espace des décisions admissibles. Nous proposons une méthode pour résoudre chacune de ces difficultés : l'utilisation d'une méthode de Monte-Carlo pour limiter l'espace des possibles (section 3.1) et le couplage d'un modèle agronomique à un modèle de calcul économique (section 3.2).

[6] On considère qu'il n'y a pas de cultures suivantes sur la parcelle.

[7] Peu de problèmes de contrôle peuvent être résolus de façon analytique.

3.1 Limitation de l'espace des possibles : utilisation d'une méthode de Monte-Carlo

Définissons tout d'abors l'espace des décisions admissibles puis procédons à une limitation de cet espace par une méthode de Monte-Carlo.

3.1.1 Définition de l'espace des admissibles

Le modèle général est rendu opérationnel grâce à la décomposition de certaines variables, notamment les variables de décisions. Alors que dans le modèle analytique, les variables de décision sont les quantités d'eau apportées à chaque période : $q_1, \cdots, q_{T-1}$, dans la procédure numérique, nous raisonnons en terme de séquence sur l'ensemble des décisions prises pour toute la campagne. La conduite d'irrigation est alors un vecteur de quantités : $s = (q_1, \cdots, q_{T-1})$. On suppose par la suite que la saison d'irrigation comprend 10 périodes de décision. Soit $s \in S$ une séquence de décisions définie par $S = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10})$, avec S l'espace des séquences de décisions admissibles. Cet espace S est défini par :

$$S = \Bigg[s = (q_1, ..., q_{10}) \quad tel \quad que \quad :$$

- $$\sum_{t=1}^{10} q_t \leq Q \tag{13}$$

- $$\underline{q} \leq q_t \leq \bar{q} \qquad pour \ q_t > 0 \tag{14}$$

- $$\underline{A} \leq \sum_{t=1}^{10} I_{\{q_t>0\}} \leq \bar{A} \tag{15}$$

- $$\sum_{t=4}^{7} I_{\{q_t>0\}} \geq \hat{A} \Bigg] \tag{16}$$

L'exploitant agricole dispose d'un quota fixé, Q, pour toute la campagne. La somme des quantités apportées pour toutes les périodes doit être inférieure ou égale au quota (équation 13). S'il décide d'irriguer à une date, les quantités apportées sont limitées pour des raisons techniques (équation 14) ; la dose minimale est fixée à $\underline{q} = 20$ et la dose maximale à $\bar{q} = 80$. Les quantités intermédiaires augmentent par pas de 10. Le nombre de tours d'eau est aussi limité (équation 15) : au minimum, l'agriculteur doit effectuer $\underline{A}$ tours d'eau et au maximum il peut procéder à $\bar{A}$ arrosages. Posons $\underline{A} = 2$ et $\bar{A} = 8$.

On impose en plus des contraintes sur certaines variables de décision. On sait, d'un point de vue agronomique, que certaines périodes de croissance de la plante, connues, sont des périodes de forte sensiblité de la culture au stress hydrique. Nous imposons alors que durant ces périodes (ici $t = 4, 5, 6, 7$) au minimum $\hat{A}$ irrigations sont réalisées. Fixons $\hat{A} = 2$.

3.1.2 Balayage de l'espace des possibles par une méthode de Monte-Carlo

Malgré les contraintes imposées aux séquences de décisions, l'espace admissible reste encore très grand. Par exemple, pour le cas limité suivant : l'agriculteur dispose d'un quota de 1500 m^3/ha et a choisi de réaliser 4 tours d'eau, il existe alors 218400 séquences de décisions possibles. Le nombre de séquences est relativement important et il n'est pas possible de balayer l'ensemble de l'espace des admissibles. C'est pourquoi nous avons opté pour l'utilisation d'une méthode de Monte-Carlo pour obtenir une solution à notre problème. L'objectif est de tirer aléatoirement parmi l'ensemble des séquences possibles un certain nombre de points et d'arriver ainsi, à une solution à notre problème.

• **Principes de base**

La méthode de Monte-Carlo est une méthode numérique permettant de résoudre des problèmes mathématiques très complexes pour lesquels il n'est pas possible d'obtenir, sans restrictions trop fortes, des solutions analytiques. Elle repose sur la réalisation de simulations qui utilisent des séquences de nombres aléatoires. Elle fournit des solutions approximatives. L'erreur statistique de ce résultat peut être estimée comme une fonction du nombre de tirages qui doit être déterminé pour atteindre un résultat de précision donnée. La simulation utilise des nombres aléatoirement tirés, ce qui nécessite de définir une méthode permettant de créer ces nombres. Il est nécessaire de déterminer, en premier lieu, le nombre de simulations nécessaires pour avoir une solution satisfaisante, sans trop allonger les temps de calcul.

Il faut, en second lieu, définir la procédure de création de nombres pseudo-aléatoires.

- **Evaluation du nombre de simulations**

Le premier problème est la détermination du nombre de simulations afin d'obtenir un résultat satisfaisant. Nous cherchons à déterminer le nombre de simulations le plus faible, n, qui garantit une précision de grandeur ϵ, avec un niveau de confiance de $1-\delta$, avec $0<\delta<1$ (soit pour $\epsilon = 1$ % et $\delta = 5$ %, une précision de 1 % avec un niveau de confiance de 95 %). Selon Fishman [2], la détermination de ce nombre peut être réalisée par l'utilisation de l'inégalité de Tchébychev.

- **Création de nombres pseudo-aléatoires**

Le deuxième problème est lié à la définition de la procédure de génération de suites de nombres pseudo-aléatoires (Hammersley et Handscomb [3]).

3.2 Algorithme de résolution

Nous avons créé une procédure numérique (Figure 1) intégrant le modèle agronomique EPIC-PHASE [8], un modèle économique et un algorithme de recherche de l'optimum. Plaçons-nous pour un quota fixé et pour des conditions climatiques données. Le modèle agronomique EPIC-PHASE détermine, pour chaque conduite d'irrigation possible, le rendement de la culture. C'est un modèle de simulation de croissance de la plante qui fonctionne à pas de temps journalier. Il décrit les principales relations du système sol - climat - technique - plante. Il permet de prévoir la croissance de la plante en fonction de l'évolution du stock d'eau du sol et il évalue, au final, le rendement de la culture. Ce modèle nous fournit, pour un niveau de quota donné et pour des conditions climatiques fixées, les couples $(s_k, Y_k)_{k=1,\dots,K}$, séquences de décisions tirées aléatoirement - rendements. Etant donnés les prix des facteurs et de la production, le modèle économique intègre cette information et calcule le profit pour chaque séquence de décisions. Au final, l'algorithme d'optimisation globale, reposant sur un

[8] Le modèle EPIC-Phase a été développé par la station d'agronomie INRA Toulouse (Cabelguenne et Debaeke [1]).

FIG. 1 – Procédure numérique de résolution, pour un quota donné et pour des conditions climatiques fixées.

balayage de l'espace des séquences, définit la séquence de décisions qui maximise le profit de l'agriculteur. Nous obtenons alors le profit maximisé, π^*. Nous répètons cette procédure pour différents niveaux de quotas et pour différents scénarios climatiques.

4 Une application

4.1 Description de la région

Nous appliquons cette méthodologie pour définir les conduites d'irrigation optimales avec des données se référant à la région du Sud-Ouest de la France. Dans cette région délimitée par le bassin hydrographique de la Garonne, l'agriculture représente le premier poste de prélèvements d'eau et les deux tiers des consommations nettes sur l'année. Elle est souvent citée comme zone où les conflits autour de la ressource en eau sont importants. L'irrigation de cette zone est récente et caractérisée par une part importante de grandes cultures comme le maïs. Les besoins d'irrigation varient de façon importante en fonction des données climatiques. L'eau nécessaire pour l'irrigation, essentiellement par aspersion, est prélevée surtout en rivière, de façon individuelle ou collective, réalimentée artificiellement par des réserves de haute montagne.

4.2 Données

Deux types de données ont été utilisées. La première concerne les données nécessaires pour utiliser le modèle de simulation agronomique. Il s'agit de données relatives à la culture considérée, aux paramètres climatiques et pédologiques et aux itinéraires techniques.

La deuxième catégorie porte sur les données économiques nécessaires pour calculer le profit de l'agriculteur. Le prix de marché de la culture dans la région étudiée est en moyenne, de 1440 F/tonne. Ce prix de marché est connu pour chaque année. Les coûts totaux comprennent un terme variable lié à la consommation, un terme fixe dû au tour d'eau et un terme fixe lié aux autres frais. Les coûts fixes regroupent les frais d'engrais (750 F/ha), de semences (750 F/ha), de phytosanitaires (450 F/ha) et d'assurance grêle (200 F/ha) ; ils sont chiffrés à 2150 F/ha. Les coûts par tour d'irrigation sont évalués à 150 F ; ils comprennent les coûts d'énergie et de travail. Les coûts variables sont fonction du coût marginal du m^3/ha de la ressource évalué à 0,25 F/ha.

4.3 Hypothèses

Les données nécessaires au modèle EPIC-PHASE ont été créées par expérimentation sur le site d'Auzeville (Cabelguenne et Debaeke [1]). Il s'agit d'un sol profond argilo-sableux, de profondeur de $1,60\ m$ avec une réserve utile importante, égale à 300 mm environ, caractéristique de la région considérée.

La culture sélectionnée pour les simulations est le maïs, en raison de son importance relative dans la zone étudiée. Les itinéraires techniques hors irrigation sont décrits par un calendrier type des opérations culturales hors irrigation qui a été réalisé à l'aide des recommandations des agronomes de l'INRA ainsi que de l'observation des pratiques des exploitants de la région et considéré comme optimisé. Le calendrier d'irrigation est défini de mi juin à fin août, mois qui correspondent aux périodes de floraison et de remplissage des grains[9]. Il est constitué de tours d'eau espacés de 5 à 10 jours. Ce calendrier résume le comportement des agriculteurs limités en ressources disponibles. Nous avons fixer la quantité d'eau disponible à 1500 $m^3/hectare$[10].

Pour appréhender la variabilité climatique, le modèle utilise les relevés météorologiques des années antérieures de la station agronomique d'Auzeville. Chacune des années est considérée comme un scénario climatique possible pour la campagne à venir. Nous disposons d'un fichier de 14 années climatiques de 1983 à 1996 contenant les relevés journaliers observés. Il couvre l'ensemble des situations climatiques possibles dans la région.

4.4 Résultats

5 Conclusion

Résumé de l'article

Extensions :

- cadre aléatoire
- fonction de demande en eau
- raisonnement au niveau de l'exploitation agricole

[9]Nous supposons que des apports plus précoces en phase végétative, au profit des périodes plus sensibles à l'eau sont interdits.

[10]Cette quantité correspond à la moyenne des quantités d'eau totales déclarées et utilisées par les agriculteurs de Midi-Pyrénées durant la campagne d'irrigation.

Références

[1] Cabelguenne M., Debaeke P. [1995], *Manuel d'utilisation du modèle EWQTPR (Epic-Phase temps réel) version 2.13*. Ed. Station d'Agronomie Toulouse INRA.

[2] Fishman G.S. [1995]. *Monte Carlo, Concepts, Algorithms, and Applications*. Springer, New York.

[3] Hammersley J.M., Handscomb D.C. [1967], *Les méthodes de Monte-Carlo*. Dunod, Paris.

[4] Rao, N.H. Sarma, P.B.S. and Chander, S. [1990]. Optimal multicrop allocation of seasonal and intraseasonal irrigation water. *Water Resources Research* 26(4) : 551-559.

[5] Yakowitz, S. [1982]. Dynamic programming applications in water resources. *Water Resources Research* 18(4) : 673-696.

[6] Zavaleta, L.R. Lacewell, R.D. and Taylor, C.R. [1980]. Open-loop stochastic control of grain sorghum irrigation levels and timing. *American Journal of Agricultural Economics* : 785-792.

A Les conditions nécessaires d'optimalité

A.1 L'Hamiltonien

L'Hamiltonien, H_t, du problème (6) s'écrit :

$$H_t = -(c \cdot q_t + \delta_t \cdot C_F) + \lambda_{t+1} \cdot f_t(M_t, V_t) + p_{t+1} \cdot g_t(M_t, V_t, q_t) - \alpha_{t+1} \cdot q_t \tag{A.1}$$

L'Hamiltonien est la contribution totale à l'objectif final due au passage de la période t à la période $t+1$, si l'on applique le contrôle q_t et si l'on a l'état du système (M_t, V_t, Q_t). Il comprend 4 termes : le premier représente la contribution directe à l'objectif final, les trois autres décrivent les variations des variables d'état et peuvent être considérés comme les contributions indirectes.

A chaque période de décision, t, il faut tenir compte de la contrainte technique (4) que doit respecter la dose apportée. Notons $\underline{\nu_t}$ et $\bar{\nu}_t$ les multiplicateurs associés à cette contrainte.

Le Lagrangien, L_t, pour la période t, s'écrit alors :

$$L_t = H_t + \underline{\nu_t} \cdot (q_t - \underline{q}) + \bar{\nu}_t \cdot (\bar{q} - q_t) \tag{A.2}$$

A.2 Les conditions nécessaires

Les conditions nécessaires d'optimalité obtenues par la théorie du contrôle sont décomposées en trois catégories : le principe du maximum discret, le système des équations adjointes et les conditions de transversalité, qui doivent cependant être résolues simultanément afin d'obtenir le programme de décisions d'irrigation optimal.

- **Le principe du maximum discret :**

A chaque période de décision, $t = 1, ..., T-1$, la variable de contrôle, q_t, doit maximiser l'Hamiltonien, H_t, sous la contrainte (4). Une condition nécessaire d'optimalité est que q_t maximise L_t à chaque étape t, pour $t = 1, ..., T-1$:

$$\frac{\partial L_t}{\partial q_t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -c + p_{t+1} - \alpha_{t+1} + (\underline{\nu_t} - \bar{\nu}_t) = 0 \tag{A.3}$$

que l'on peut réécrire :

$$p_{t+1} = \begin{cases} < c + \alpha_{t+1} \quad si \quad q_t = 0 \\ \\ = c + \alpha_{t+1} \quad si \quad q_t \in [\underline{q}, \bar{q}] \\ \\ > c + \alpha_{t+1} \quad si \quad q_t = \bar{q} \end{cases} \tag{A.4}$$

• **Le système des équations adjointes :**

Le système des équations adjointes définit la dynamique des valeurs *in situ* c'est-à-dire la dynamique des variables adjointes associées aux variables d'état : $(\lambda_{t+1}, p_{t+1}, \alpha_{t+1})$.

La dynamique des valeurs *in situ* de la biomasse est définie de la façon suivante :
$\forall\ t = 1, \cdots, T-1,$

$$\lambda_{t+1} - \lambda_t = -\frac{\partial H_t}{\partial M_t} = -\lambda_{t+1} \cdot \frac{\partial f_t(M_t, V_t)}{\partial M_t} - p_{t+1} \cdot \frac{\partial g_t(M_t, V_t, q_t)}{\partial M_t} \tag{A.5}$$

Les valeurs *in situ* de la réserve utile évoluent selon la dynamique suivante :
$\forall\ t = 1, \cdots, T-1,$

$$p_{t+1} - p_t = -\frac{\partial H_t}{\partial V_t} = -\lambda_{t+1} \cdot \frac{\partial f_t(M_t, V_t)}{\partial V_t} - p_{t+1} \cdot \frac{\partial g_t(M_t, V_t, q_t)}{\partial V_t} \tag{A.6}$$

La dynamique des valeurs *in situ* du quota est :
$\forall\ t = 1, \cdots, T-1,$

$$\alpha_{t+1} - \alpha_t = 0 \qquad si \qquad Q_t > 0 \tag{A.7}$$

• **Les conditions de transversalité :**

Les conditions de transversalité permettent de fixer le sentier des décisions optimal. Elles sont définies de la façon suivante :

$$\lambda_T \;=\; \frac{\partial \Pi}{\partial M_T} = r \cdot \frac{dY}{dM_T} \tag{A.8}$$

$$p_T \;=\; \frac{\partial \Pi}{\partial V_T} = 0 \tag{A.9}$$