
Domaine d'application des opérateurs de mécanique de la rupture et conseils d'utilisation

Résumé :

La caractérisation de l'état des pièces fissurées s'appuie sur la détermination du taux de restitution d'énergie et des facteurs d'intensité de contraintes, bases de nombreux critères en mécanique de la rupture (amorçage en fond de fissure, propagation de défauts, méthodes simplifiées).

Ce document présente les fonctionnalités disponibles dans *Code_Aster*, indique leur domaine de validité et donne des conseils d'utilisation. On évoque les calculs élastiques (linéaires ou non linéaires) et élastoplastiques (formulations *GTP* en ductile et *Gp* en fragile). En revanche, on n'aborde pas le calcul des dérivées du taux de restitution d'énergie.

La lecture de ce document peut se faire à deux niveaux :

- pour un nouvel utilisateur en mécanique de la rupture, voulant connaître les méthodes utilisées et les commandes du *Code_Aster* nécessaires à la réalisation de son étude,
- pour un utilisateur plus averti, à la recherche de conseils d'utilisation pour résoudre certains points délicats et désireux de prendre connaissances de travaux de recherches récents.

Il est fait constamment référence aux Manuels d'Utilisation et de Référence, dont la lecture demeure indispensable. La bibliographie doit également permettre au lecteur d'approfondir le sujet qui l'intéresse.

Table des matières

1 Généralités.....	4
1.1 Objectif d'une étude en mécanique de la rupture.....	4
1.2 Paramètres caractéristiques de la mécanique élastique linéaire de la rupture en quasi-statique	4
1.2.1 Facteurs d'intensité des contraintes.....	4
1.2.2 Taux de restitution d'énergie.....	4
1.3 Extension à l'élastoplasticité.....	5
1.3.1 Élasticité non linéaire.....	5
1.3.2 Approche Gp (rupture fragile).....	5
1.3.3 Approche GTP (rupture ductile).....	7
1.3.4 Autres approches.....	7
2 Cadre d'utilisation des fonctionnalités de mécanique de la rupture dans Code_Aster	8
2.1 Rappel des méthodes de calcul disponibles.....	8
2.1.1 Méthode θ	8
2.1.2 Calcul par extrapolation du champ de déplacements.....	10
2.2 Domaine de validité en général.....	12
2.2.1 Modèle.....	12
2.2.2 Caractéristiques du matériau.....	12
2.2.3 Relation de comportement utilisée en post-traitement de mécanique de la rupture	13
2.2.4 Chargement.....	14
2.2.5 État initial.....	14
2.2.6 Contact /frottement.....	15
2.3 Validité du calcul de G en non-linéaire.....	15
2.3.1 Thermo-élasticité non linéaire.....	15
2.3.2 Thermo-élastoplasticité.....	15
3 Mise en œuvre d'une étude de mécanique de la rupture.....	16
3.1 Maillage.....	16
3.1.1 Cas d'une fissure maillée.....	16
3.1.2 Cas d'une fissure non maillée.....	17
3.2 Calcul élastique linéaire.....	18
3.2.1 Cas d'une fissure maillée.....	18
3.2.2 Cas d'une fissure non maillée.....	18
3.2.3 Utilisation des résultats.....	18
3.3 Calcul non-linéaire.....	19
3.3.1 Calcul du paramètre GTP [R7.02.07].....	19
3.3.2 Calcul du paramètre Gp [R7.02.16].....	20
3.3.3 Indicateurs de décharge et de perte de radialité.....	20
4 Recommandations d'utilisation.....	21
4.1 Introduction du champ θ	21

4.1.1 Conditions à respecter.....	21
4.1.2 Conseil sur le choix des couronnes Rinf et Rsup.....	21
4.1.3 Problème de la discrétisation en 3D.....	22
4.2 Méthodes d'interpolation en 3D.....	23
4.2.1 Cadre général.....	23
4.2.2 Méthodes de lissage de G et Thêta.....	24
4.2.3 Remarques et conseils.....	24
4.3 Conseils pour les calculs avec POST_K1_K2_K3.....	26
4.4 Normalisation, symétries.....	26
4.4.1 2D contraintes planes et déformations planes.....	26
4.4.2 Axisymétrie.....	27
4.4.3 3D.....	27
4.4.4 Symétrie du modèle.....	27
5 Conclusions.....	28
6 Documentation du Code_Aster relative à la mécanique de la rupture	29
7 Bibliographie	31

1 Généralités

1.1 Objectif d'une étude en mécanique de la rupture

L'objectif d'une étude est généralement d'étudier le risque d'amorçage d'un défaut existant et / ou sa vitesse de propagation [bib1,bib10]. Les outils à mettre en œuvre sont différents selon le type de phénomène considéré :

- En rupture fragile : la plasticité reste confinée en fond de fissure. La fissure se propage le long des plans cristallographiques (clivage). En première approche, un calcul élastique est souvent suffisant («approche classique», cf. §1.2). Cette approche a cependant des limites (appelées effet : effet petit défaut, effet de pré-chargement à chaud...), liées au développement de la plasticité en pointe de fissure. D'autres approches élastoplastiques ont donc été développées, cf. §1.3.
- En rupture ductile : la plasticité est généralisée. La rupture (déchirure) s'amorce généralement autour d'inclusions. Des calculs élastoplastiques sont le plus souvent indispensables, cf. §1.3.

1.2 Paramètres caractéristiques de la mécanique élastique linéaire de la rupture en quasi-statique

1.2.1 Facteurs d'intensité des contraintes

Les facteurs d'intensité des contraintes caractérisent la singularité des contraintes en pointe de fissure. Leur expression générale est de la forme : $K = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma(r) \sqrt{r}$. Trois facteurs d'intensité des contraintes sont définis, associés aux trois modes d'ouverture de la fissure.

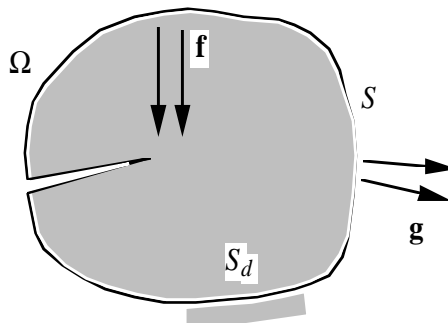
En élasticité linéaire, les facteurs d'intensité des contraintes permettent de décomposer le champ de déplacement \mathbf{u} en une partie singulière et une partie régulière [bib1,bib10] :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_R + K_I \mathbf{u}_S^I + K_{II} \mathbf{u}_S^{II} + K_{III} \mathbf{u}_S^{III} .$$

1.2.2 Taux de restitution d'énergie

On considère un solide élastique fissuré occupant le domaine Ω . Soient :

- \mathbf{u} le champ de déplacement,
- T le champ de température,
- \mathbf{f} le champ de forces volumiques appliquées sur Ω ,
- \mathbf{g} le champ de forces surfaciques appliquées sur une partie S de $\partial\Omega$,
- \mathbf{U} le champ de déplacements imposés sur une partie S_d de $\partial\Omega$.
- $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes,
- $\boldsymbol{\varepsilon}$ le tenseur des déformations,
- $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{th}}$ le tenseur des déformations d'origine thermique,
- $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, T)$ la densité d'énergie libre.



Le taux de restitution d'énergie G correspond à l'approche énergétique de la rupture de Griffith [bib9]. Il est défini par l'opposé de la dérivée de l'énergie potentielle à l'équilibre $W(\mathbf{u})$ par rapport au domaine Ω :

$$G = \frac{-\partial W(\mathbf{u})}{\partial \Omega}$$

$$\text{avec : } W(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), T) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\Omega - \int_S \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} d\Gamma$$

On rappelle que le taux de restitution d'énergie est équivalent à l'intégrale de Rice en élasticité linéaire [bib6].

En élasticité linéaire plane, les coefficients d'intensité de contraintes sont reliés au taux de restitution d'énergie par la formule d'Irwin :

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \text{ en déformations planes}$$

$$G = \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \text{ en contraintes planes}$$

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \text{ avec } \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \text{ en 3D}$$

1.3 Extension à l'élastoplasticité

1.3.1 Élasticité non linéaire

Les définitions précédentes ne sont rigoureuses qu'en thermoélasticité linéaire mais des extensions sont possibles aux problèmes non linéaires. En particulier, il est possible de définir et de calculer le taux de restitution d'énergie en élasticité non linéaire, à condition que le chargement reste radial et monotone.

L'application de l'approche globale en dehors de son domaine de validité conduit à des résultats non satisfaisants : problèmes de « transférabilité » d'éprouvettes à structures (effet petit défaut [bib3]), mauvaise prise en compte de l'histoire du chargement (effet de pré-chargement à chaud [bib11]), ...

1.3.2 Approche G_p (rupture fragile)

L'approche énergétique G_p a été développée par EDF R&D pour dépasser les limites de l'approche globale classique dans le cadre de la rupture fragile par clivage. On part de la théorie de Francfort Marigo en élasticité [bib7]. Cette théorie est une généralisation du critère de Griffith pour les matériaux élastiques fragiles.

On applique le principe de minimisation de l'énergie, pour prédire l'initiation ou la propagation d'une fissure de surface S d'une surface créée dS . On définit, à partir de l'énergie élastique, un paramètre G_{el} , taux de restitution de l'énergie en élasticité [bib12] par la formule suivante :

$$G_{el} = -[W_e(dS) - W_e(0)] / Aire(dS)$$

où W_e est l'énergie élastique.

On étend ensuite cette approche à la plasticité, en faisant l'hypothèse que la dissipation plastique et la dissipation liée à la rupture sont indépendantes.

On peut alors définir un paramètre G plastique, noté G_p , comme un taux de restitution de l'énergie en plasticité incrémentale [bib58] par la formule suivante :

$$G_p = -[W(dS) - W(0)] / Aire(dS)$$

où W est l'énergie totale (énergie libre + énergie d'écroissage + énergie dissipée plastiquement).

Mais on se retrouve alors confronté à 2 paradoxes de la théorie de Griffith [bib22] :

- le paradoxe de Rice (qui stipule qu'en élastoplasticité le taux de restitution d'énergie est nul),
- les effets d'échelle de la théorie de Francfort-Marigo induits par l'hypothèse de Griffith.

On fait alors le choix de modéliser le défaut sous forme d'entaille et non de fissure [bib23].

On définit un taux de restitution d'énergie G_p applicable à une fissure représentée en entaille, en s'appuyant sur la formulation de Francfort-Marigo et sur la mécanique continue de l'endommagement, moyennant quelques hypothèses supplémentaires.

Remarque :

Une autre alternative consiste à s'orienter vers une théorie de Francfort-Marigo basée sur un autre modèle que celui de Griffith, comme celui de Barenblatt (cf. modèles à zones cohésives [R7.02.11], § 1.3.4).

On suppose que cette entaille a la forme d'un cigare, le fond d'entaille (Γ) étant représenté par un demi-cercle de rayon r . La zone correspondant à la propagation de l'entaille est notée $Z_e(\Delta l)$ (Zone endommagée) et dépend de Δl , distance propagée, conformément à la figure ci-dessous :

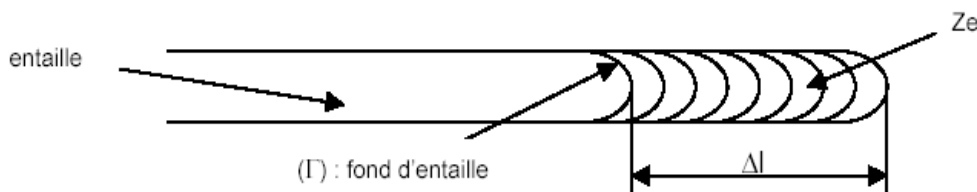


Figure 1.3.2-1: Entaille et zone endommagée pour l'approche G_p

Le paramètre G_p est défini par la formule suivante :

$$G_p = \max_{\Delta l} \left[\left(\int_{Entaille(\Delta l)} (w_e \cdot dS) \right) / \Delta l \right]$$

où w_e est l'énergie élastique.

Ce paramètre permet de prédire :

- la propagation progressive de l'entaille (quand le maximum est obtenu pour $\Delta l = 0$)
- la propagation brutale de l'entaille (quand le maximum est obtenu pour $\Delta l \neq 0$).

On peut utiliser G_p pour analyser des situations de rupture fragile par clivage, quand l'approche $G-\theta$ n'est pas valide. Il peut s'agir de problèmes avec :

- décharges [bib18][bib20],
- chargements non proportionnels,
- contraintes résiduelles,
- effet petit défaut [bib3], [bib21].

Des conseils et descriptions sur la mise en donnée et le déroulement d'une étude avec cette approche sont donnés dans la documentation U2.05.08.

1.3.3 Approche GTP (rupture ductile)

L'approche *GTP* est une généralisation de l'approche classique en *G* [R7.02.07] ; l'énergie prise en compte pour le calcul du taux de restitution est l'énergie mécanique totale [bib17][bib19]. L'énergie dissipée se répartit d'une part en rupture et d'autre part en plasticité sans qu'il soit possible de quantifier a priori séparément ces deux types de dissipation : l'énergie est considérée comme intégralement dissipée dans la rupture, ce qui constitue une hypothèse pessimiste.

Le paramètre *GTP* permet d'analyser les situations de chargements non monotones du défaut, pour des comportements de matériau irréversibles [bib4][bib5].

1.3.4 Autres approches

D'autres approches sont possibles pour traiter d'un problème de mécanique de la rupture élastoplastique :

Approche locale de la rupture par clivage - Beremin : les approches locales reposent sur une connaissance fine des mécanismes physiques mis en jeu lors de la rupture, ici l'amorçage par plastification de microfissures. Le critère local de rupture du modèle de Beremin, proposé au début des années 1980, est basé sur une contrainte critique [R7.02.06]. En introduisant ensuite une loi statistique de répartition des microfissures, on peut exprimer la probabilité de rupture de la structure.

Le calcul de la probabilité de rupture se fait en post-traitement du calcul élastoplastique classique, et nécessite l'identification préalable de deux paramètres matériaux spécifiques.

Approche locale de la rupture ductile – Rousselier : le comportement du matériau et l'endommagement sont liés par la définition de potentiels élastoplastiques endommageables. La rupture est décrite implicitement par l'adoucissement de la réponse globale de la structure.

Le modèle de Rousselier [R5.03.07] traite plus précisément de la germination et de la croissance des cavités, et repose sur des lois de comportement spécifiques. Pour limiter la dépendance du résultat au maillage (orientation, finesse), une approche régularisée (modèle non local à gradient de variables internes) a également été développée dans *Code_Aster*.

Modèles à zones cohésives : ces modèles sont basés sur la notion de force résiduelle de cohésion entre les lèvres de la fissure. En fond de fissure, une zone d'élaboration de la fissure apparaît, qu'on peut rapprocher de la notion d'endommagement. La prédiction de l'évolution de la fissure est basée sur un principe de minimisation d'énergie.

La mise en œuvre des modèles à zones cohésives nécessite la définition d'éléments finis spécifiques (à discontinuité ou de joint) pour représenter la zone fissurée [R3.06.09], puis l'utilisation dans le calcul de la loi de comportement des éléments cohésifs [R7.02.11]. L'originalité de ce modèle par rapport aux précédents est qu'il peut intrinsèquement traiter à la fois l'amorçage et la propagation du défaut (en quasi-statique, en dynamique et en fatigue).

On ne reviendra pas sur ces approches dans le présent document. Une description des approches, de leurs avantages et de leurs inconvénients peut être trouvée dans [bib8].

2 Cadre d'utilisation des fonctionnalités de mécanique de la rupture dans Code_Aster

2.1 Rappel des méthodes de calcul disponibles

2.1.1 Méthode thêta

Calcul du taux de restitution d'énergie

La difficulté du calcul du taux de restitution d'énergie vient de la dérivation par rapport au domaine d'une intégrale dépendant de ce même domaine. Une méthode rigoureuse est la méthode thêta, qui est une méthode lagrangienne de dérivation de l'énergie potentielle [bib14][bib15][bib16]. Elle consiste à introduire un champ θ et à considérer des transformations $F^\eta : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M} + \eta \theta(\mathbf{M})$ du domaine de référence Ω en un domaine Ω_η qui correspondent à des propagations de la fissure. Ces transformations ne doivent pas modifier les bords du domaine hormis le fond de fissure.

Cette méthode est détaillée dans [R7.02.01] et [R7.02.04]. On pourra aussi se référer à [bib31]. L'utilisation de la méthode, développée dans l'opérateur CALC_G de Code_Aster, est décrite au §4.1.

Avec la méthode thêta, le taux de restitution d'énergie G est solution de l'équation variationnelle :

$$\int_{\Gamma_0} G(s) \theta(s) \cdot \mathbf{m}(s) ds = G(\theta), \forall \theta \in \Theta$$

où \mathbf{m} est la normale unitaire au fond de fissure Γ_0 situé dans le plan tangent à $\partial\Omega$ et rentrant dans, Ω et où $G(\theta)$ est défini par l'opposé de la dérivée de l'énergie potentielle $W(\mathbf{u}(\eta))$ à l'équilibre par rapport à l'évolution initiale du fond de fissure η :

$$G(\theta) = \left. \frac{-d W(\mathbf{u}(\eta))}{d \eta} \right|_{\eta=0}$$

On note Θ l'ensemble des champs θ admissibles (voir §4.1.1).

Pour un problème thermo-élastique linéaire ou non-linéaire l'expression de $G(\theta)$ est :

$$\begin{aligned} G(\theta) = & \int_{\Omega} [\sigma(\mathbf{u}) : (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \theta) - \Psi(\varepsilon(\mathbf{u})) \operatorname{div} \theta] d\Omega \quad \leftarrow \text{terme classique} \\ & - \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial T} (\nabla T \cdot \theta) d\Omega \quad \leftarrow \text{terme dû à la thermique} \\ & + \int_{\Omega} [(\nabla \mathbf{f} \cdot \theta) \mathbf{u} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \operatorname{div} \theta] d\Omega \quad \leftarrow \text{terme dû aux forces volumiques } \mathbf{f} \text{ sur } \Omega \\ & + \int_{\Gamma_f} \left[(\nabla \mathbf{F} \cdot \theta) \mathbf{u} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} (\operatorname{div} \theta - \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}}) \right] d\Gamma \quad \leftarrow \text{terme dû aux forces surfaciques } \mathbf{F} \text{ sur } \Gamma_f \end{aligned}$$

Si on se place dans l'hypothèse des grands déplacements (mais toujours en élasticité non linéaire en petites déformations), il faut remplacer le terme

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} u_{i,p} \theta_{p,j} d\Omega \quad \text{par} \quad \int_{\Omega} F_{ik} S_{kj} u_{i,p} \theta_{p,j} d\Omega$$

avec \mathbf{S} le tenseur des contraintes de Piola-Lagrange appelé encore deuxième tenseur de Piola-Kirchoff, \mathbf{F} le gradient de la transformation qui fait passer de la configuration de référence à la configuration actuelle.

Si l'on tient compte des déformations initiales ε_{ij}^0 et des contraintes initiales σ_{ij}^0 , il faut ajouter le terme :

$$\int_{\Omega} \left[\left(\sigma_{ij} - \frac{1}{2} \sigma_{ij}^0 \right) \varepsilon_{ij,k}^0 - \left(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{th} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^0 \right) \sigma_{ij,k}^0 \right] \theta_k d\Omega .$$

Il semblerait que cette expression ne permette pas d'imposer à la fois déformations initiales et contraintes initiales (même si les champs sont en équilibre). Il n'est donc pas possible pour le moment d'imposer à la fois déformations initiales et contraintes initiales (voir §2.2.5).

Pour un problème thermo-élastoplastique l'expression de $G(\theta)$ retenue dans Code_Aster est :

$$G(\theta) = \int_{\Omega} \sigma_{ij} u_{i,k} \theta_{k,j} - \tilde{\Psi} \theta_{k,k} - \left(\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial T} T_{,k} + (R + \sigma_y) p_{,k} + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \beta_{ij}} \beta_{ij,k} - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,k}^p \right) \theta_k d\Omega$$

avec :

$\tilde{\Psi}$ l'énergie mécanique totale,

ε^p le tenseur des déformations plastiques,

p la variable interne scalaire d'écrouissage isotrope (déformation plastique cumulée),

β une ou plusieurs variables tensorielles ou scalaires d'écrouissage cinématique,

σ_y la limite d'élasticité linéaire initiale,

R le rayon de la surface de charge pour l'écrouissage isotrope.

Pour un chargement radial et monotone : $\sigma_{ij} \varepsilon_{ij,k}^p = (R + \sigma_y) p_{,k} + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \beta_{ij}} \beta_{ij,k}$ et on retrouve l'expression de $G(\theta)$ en thermo-élasticité non linéaire [R7.02.03].

Calcul des facteurs d'intensité des contraintes

En thermo-élasticité linéaire, on peut associer à G une forme bilinéaire symétrique $g(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ par la formule de polarisation. On peut ensuite montrer que cette forme bilinéaire définit un produit scalaire pour lequel les fonctions singulières u_s sont orthogonales entre elles et orthogonales avec le déplacement régulier u_R [R7.02.05].

Par suite, on peut calculer les facteurs d'intensité des contraintes à partir de $g(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ par la méthode thêta :

Finalement, de manière générale :

$$\begin{cases} K_I = E g(\mathbf{u}, \mathbf{u}_S^I) \\ K_{II} = E g(\mathbf{u}, \mathbf{u}_S^{II}) \end{cases} \quad \text{en contraintes planes}$$

$$\begin{cases} K_I = \frac{E}{1-\nu^2} g(\mathbf{u}, \mathbf{u}_S^I) \\ K_{II} = \frac{E}{1-\nu^2} g(\mathbf{u}, \mathbf{u}_S^{II}) \end{cases} \quad \text{en déformations planes et en 3D}$$

$$\text{et } K_{III} = 2\mu \cdot g(\mathbf{u}, \mathbf{u}_S''') \text{ en 3D}$$

Ce calcul est possible dans *Code_Aster* avec l'option `CALC_K_G` de l'opérateur `CALC_G`.

Calcul local – calcul global

En dimension 2, le fond de fissure Γ_0 se ramène à un point. Un seul champ θ suffit pour calculer le taux de restitution d'énergie (option `CALC_G`) ou les facteurs d'intensité des contraintes (option `CALC_K_G`).

En dimension 3 la dépendance de $G(\theta)$ vis-à-vis du champ θ sur le fond de fissure est plus complexe. Dans *Code_Aster*, on peut calculer :

- le taux de restitution global G correspondant à une progression uniforme de la fissure (option `CALC_G_GLOB`) ;
- le taux de restitution d'énergie local $G(s)$ solution de l'équation variationnelle précédente (option `CALC_G`). Les champs θ_i nécessaires à la résolution de l'équation variationnelle et au calcul de $G(s)$ sont décrits dans le §4.2.

2.1.2 Calcul par extrapolation du champ de déplacements

La méthode de calcul des facteurs d'intensité des contraintes par extrapolation du déplacement, développée dans l'opérateur `POST_K1_K2_K3`, est basée sur le développement asymptotique du champ de déplacement en fond de fissure [R7.02.08].

En 2D, dans un milieu élastique, linéaire, isotrope et homogène, les champs de contraintes et de déplacement sont connus analytiquement pour les modes d'ouverture de la fissure (caractérisé par $K1$), de glissement plan ($K2$) et de glissement antiplan ($K3$), cf. [bib4]. Dans le cas général en 3D, on peut montrer que le comportement asymptotique des déplacements et des contraintes est la somme des solutions correspondants aux modes 1 et 2 (en déformations planes) et au mode 3 (antiplan), et de quatre autres solutions particulières, mais qui sont plus régulières que les précédentes [bib69].

Dans tous les cas, la singularité est donc la même et on peut écrire les relations suivantes dans le plan normal au fond de fissure, en un point M :

$$K_1(M) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)} [U_m] \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \right)$$

$$K_2(M) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)} [U_n] \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \right)$$

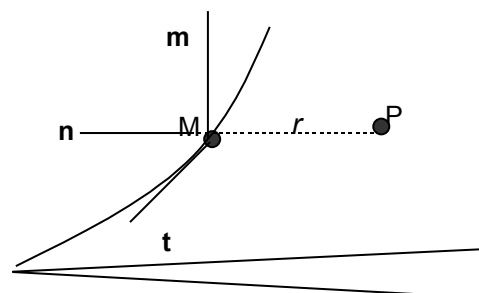
$$K_3(M) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1+\nu)} [U_t] \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \right)$$

avec :

- \mathbf{t}, \mathbf{n} dans le plan de la fissure en M ,
- \mathbf{t} vecteur tangent au fond de fissure en M ,
- \mathbf{n} vecteur normal au fond de fissure en M ,
- \mathbf{m} vecteur normal au plan de la fissure en M ,
- $[U]$ saut de déplacement entre les lèvres de fissure :

$$[U_m] = (U^{\text{lèvre supérieure}} - U^{\text{lèvre inférieure}}) \cdot \mathbf{m}$$

$r = \|\mathbf{MP}\|$ où P est un point du plan normal au



fond de fissure en M , situé sur une des lèvres.

Trois méthodes d'extrapolation sont disponibles [R7.02.08] et sont systématiquement mises en œuvre pour le calcul de $K1$, $K2$ et $K3$. À partir des facteurs d'intensité des contraintes, la formule d'Irwin permet ensuite de calculer le taux de restitution de l'énergie G .

La distance d'extrapolation `ABSC_CURV_MAXI` est le seul paramètre utilisateur. Des conseils pour le choix de ce paramètre et l'interprétation des résultats sont donnés dans le §4.3.

Remarques :

- On peut constater que les signes de $K2$ et $K3$ dépendent de l'orientation de \mathbf{t} et \mathbf{n} . Ceci n'est pas trop gênant dans la mesure où les critères de rupture ou de fatigue n'utilisent que les valeurs absolues de $K2$ et $K3$.
- La méthode utilisée ici est théoriquement moins précise que le calcul à partir de la forme bilinéaire du taux de restitution de l'énergie et des déplacements singuliers [R7.02.01 et R7.02.05] (opérateur `CALC_G`). Elle permet cependant d'obtenir facilement des valeurs relativement fiables des facteurs d'intensité des contraintes. La comparaison des différentes méthodes de calcul est toujours utile pour estimer la précision des résultats obtenus.

Remarque sur l'utilisation de `POST_K1_K2_K3` avec des éléments de Barsoum avec contact :

Le contact n'est généralement pas pris en compte correctement pour les nœuds au quart (sauf pour la formulation continue du contact). Le calcul de $K1$ sur un nœud sommet d'un éléments de Barsoum en présence de contact est donc faux. Ceci n'est pas bien grave en pratique car lorsqu'il y a contact, on sait que $K1$ doit être nul.

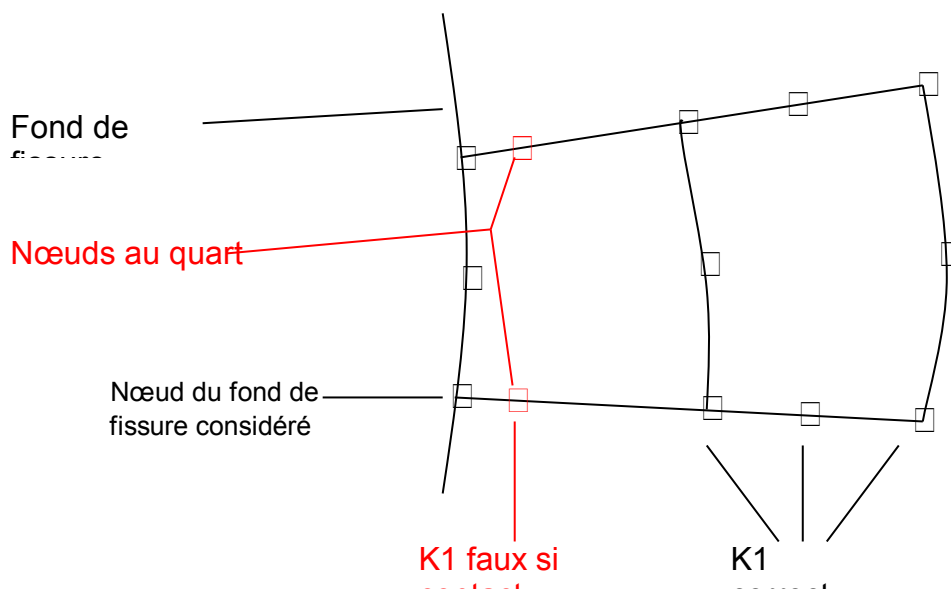


Figure 2.1.2-a : Barsoum et contact

2.2 Domaine de validité en général

Comme cela sera développé dans le chapitre suivant, la fissure peut être maillée (calcul classique) ou non maillée (utilisation de la méthode X-FEM). Sauf indication contraire, les informations suivantes sont valables dans les deux cas.

2.2.1 Modèle

Fissure maillée : les opérateurs `CALC_G` et `POST_K1_K2_K3` sont disponibles pour toutes les modélisations des milieux continus 2D et 3D : déformations planes, contraintes planes, 2D axisymétrique et 3D.

Ces modélisations correspondent pour un milieu bidimensionnel à des triangles à 3 ou 6 nœuds, des quadrangles à 4, 8 ou 9 nœuds et des segments à 2 ou 3 nœuds, pour un milieu tridimensionnel à des hexaèdres à 8, 20 nœuds ou 27 nœuds, des pentaèdres à 6 ou 15 nœuds, des tétraèdres à 4 ou 10 nœuds, des pyramides à 5 ou 13 nœuds, des faces à 4, 8 ou 9 nœuds.

Fissure non maillée (X-FEM) : les opérateurs `CALC_G` et `POST_K1_K2_K3` sont disponibles pour toutes les modélisations des milieux continus 2D et 3D (déformations planes, contraintes planes et 3D) à l'exclusion du 2D axisymétrique.

Tous les types géométriques de mailles sont disponibles.

Pour plus d'informations spécifiques concernant X-FEM, on pourra se référer à [U2.05.02].

	D PLAN	C PLAN	AXIS	3D
<code>CALC_G</code>	•	•	• (hors X-FEM)	•
<code>CALC_K_G</code>	•	•	• (hors X-FEM)	•
<code>POST_K1_K2_K3</code>	•	•	• (hors X-FEM)	•

Tableau 2.2.1-1 : Modélisations disponibles

2.2.2 Caractéristiques du matériau

Pour le calcul du taux de restitution d'énergie, les caractéristiques du matériau (module d'Young, coefficient de Poisson, coefficient de dilatation thermique et éventuellement limite d'élasticité, module d'écroutissage) peuvent dépendre de la température. Le calcul est valable pour un matériau homogène isotrope ou pour un bimatériau isotrope (fissure à l'interface de deux matériaux aux caractéristiques différentes).

Pour le calcul des coefficients d'intensité de contraintes à un instant donné, les caractéristiques du matériau doivent être indépendantes de la température. Le calcul est valable uniquement pour un matériau homogène isotrope (éventuellement pour un bimatériau si la pointe de fissure n'est pas située à l'interface des deux matériaux).

Les caractéristiques $S_y(T)$ et $D_SIGM_EPSI(T)$ ne sont traitées que pour un problème élastique non linéaire avec écroutissage isotrope linéaire de Von Mises `ELAS_VMIS_LINE` et avec l'option de calcul du taux de restitution d'énergie.

	Propriétés dépendant de la température	Bimatériau (fissure à l'interface)	Matériau orthotrope
<code>CALC_G</code>	•	•	–
<code>CALC_K_G</code>	•	–	–
<code>POST_K1_K2_K3</code>	•	–	–

Tableau 2.2.2-1 : Caractéristiques du matériau

1^{er} cas : On a un bimatériau mais la pointe de fissure est dans un seul matériau, cf. Figure 3.1-a. Si on est assuré que la couronne, définie entre les rayons inférieur `R_INF` et supérieur `R_SUP`, a comme support des éléments du même matériau, le calcul est possible quelle que soit l'option choisie. Sinon seules les options `CALC_G` et `CALC_G_GLOB` sont possibles.

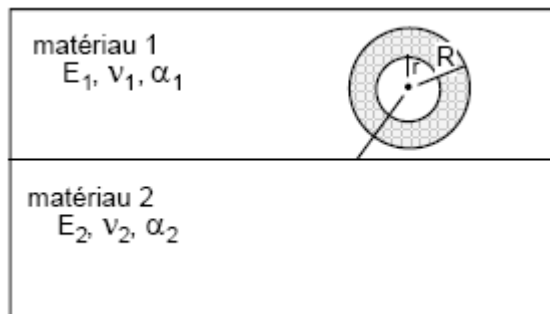


Figure 3.1-a : Bimatériau : 1^{er} cas

2nd cas : On a un bimatériau où la pointe de fissure est à l'interface, cf. Figure 3.1-b. À ce jour, seule les options de calcul du taux de restitution d'énergie (options `CALC_G_GLOB` et `CALC_G`) sont disponibles. Le calcul de coefficients d'intensité de contraintes n'est pas possible dans ce cas.

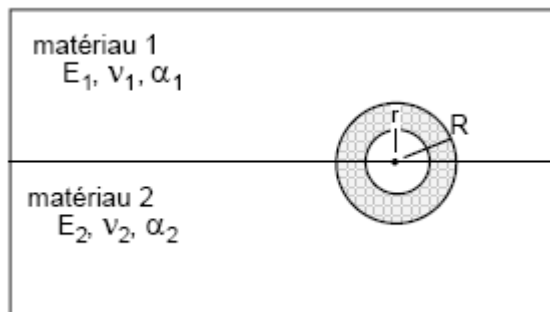


Figure 3.1-b : Bimatériau : 2nd cas

2.2.3 Relation de comportement utilisée en post-traitement de mécanique de la rupture

Logiquement, la relation de comportement utilisée lors du post-traitement en mécanique de la rupture est celle qui a servi lors du calcul mécanique.

On rappelle que le calcul du taux de restitution de l'énergie est possible dans les cas suivants (pour plus de détails, voir le Tableau 2.2.3-1) :

- thermoélasticité linéaire,
- thermoélasticité non linéaire (hyperélasticité),
- thermoélastoplasticité (critère de Von Mises avec écrouissage isotrope ou cinématique).

Le calcul des coefficients d'intensité de contraintes n'est quant à lui possible uniquement en thermoélasticité linéaire dans l'hypothèse des petites déformations.

Dans ces cas de figures, il n'y a donc aucune raison pour choisir une relation de comportement différente entre le calcul mécanique et le post-traitement. Dans ce cas, il ne faut donc **pas** renseigner `COMP_ELAS`/`COMP_INCR` sous `CALC_G`. Si ni `COMP_ELAS` ni `COMP_INCR` n'est présent sous `CALC_G` alors, le post-traitement sera exécuté avec la relation de comportement du calcul mécanique.

Le mot-clé facteur `COMP_ELAS`/`COMP_INCR` sous `CALC_G` ne sert que dans les cas très particuliers où l'on souhaite réaliser le post-traitement avec une loi de comportement différente de celle qui a servi au calcul mécanique. Ce mot-clé doit être utilisé avec une extrême prudence.

	RELATION	CALC_G	CALC_K G	POST_K1	K2	K3
COMP_ELAS	'ELAS'	•	•		•	
	'ELAS VMIS LINE'	•	-		-	
	'ELAS VMIS TRAC'	•	-		-	
COMP_INCR	'ELAS'	•	•		•	
	'VMIS ISOT TRAC'	•	-		-	

	'VMIS_ISOT_LINE'	•	-	-
	'VMIS_CINE_LINE'	-***	-	-
DEFORMATION	'PETIT'	•	•	•
	'GROT_GDEP'	• (hors X-FEM)	-	-

Tableau 2.2.3-1 : Lois de comportement compatibles pour le post-traitement en mécanique de la rupture

2.2.4 Chargement

Certains chargements sont associés à des termes supplémentaires dans l'expression du taux de restitution d'énergie ou des facteurs d'intensité des contraintes selon la méthode θ . Les chargements qui sont supportés actuellement pour le calcul en mécanique de la rupture sont les suivants :

- Dilatation thermique (transmise via les variables de commande) ;
- Forces volumiques : FORCE_INTERNE, PESANTEUR, ROTATION ;
- Forces surfaciques sur les lèvres de la fissure : PRES_REP , FORCE_CONTOUR , FORCE_FACE ;
- Déformation initiale (fissure maillée uniquement) : EPSI_INIT .

Il n'est pas possible de prendre en compte un déplacement imposé sur les lèvres de la fissure (DDL_IMPO ou FACE_IMPO) ou une force nodale sur celles-ci.

Les chargements sont transmis pour le post-traitement avec le mot clé EXCIT de CALC_G. Par défaut (mot clé EXCIT absent), tous les chargements du calcul mécanique sont utilisés dans le post-traitement en mécanique de la rupture. C'est donc la méthode conseillée. Si le mot clé EXCIT est présent avec une partie seulement des chargements, un message d'alarme est émis.

Il est important de noter que les seuls chargements qui ont une influence dans un calcul de mécanique de la rupture avec la méthode θ sont ceux appliqués sur les éléments à l'intérieur de la couronne (entre R_{inf} et R_{sup} pour un comportement thermo-élastique linéaire ou non linéaire [R7.02.01 §3.3], entre le fond de fissure et R_{sup} pour une relation thermo-élastoplastique [R7.02.07]).

Remarque :

Si on fait un calcul en grandes rotations et grands déplacements (mot clé DEFORMATION = 'GROT_GDEP' sous le mot clé facteur COMP_ELAS) les seuls chargements supportés sont des charges mortes, typiquement une force imposée et pas une pression [R7.02.03 §2.4].

2.2.5 État initial

Pour une fissure maillée, il est possible de tenir compte d'un état initial (soit des contraintes initiales, soit des déformations initiales) pour le calcul du taux de restitution d'énergie. Deux possibilités sont offertes à l'utilisateur :

- définir des déformations initiales avec le mot-clé EPSI_INIT dans la commande AFFE_CHAR_MECA(_F) [U4.44.01] et les récupérer sous le mot-clé CHARGE dans la commande CALC_G [U4.82.03] (voir un exemple de mise en place dans le cas test sslp102);
- récupérer un champ de contraintes ou déformations initiales issu d'un calcul mécanique (evol_noli issu de la commande STAT_NON_LINE [U4.51.03]) avec le mot-clé ETAT_INIT.

Il n'est pas possible de prendre simultanément en compte des contraintes initiales et des déformations initiales.

Il semblerait qu'à l'heure actuelle, aucun test ne valide la prise en compte d'une contrainte initiale. Cette fonctionnalité est donc à utiliser avec prudence.

2.2.6 Contact /frottement

Le calcul des grandeurs de mécanique de la rupture dans *Code_Aster* n'est **pas valide** s'il y a contact avec **frottement** entre les faces de la fissure. En effet le calcul du taux de restitution d'énergie ne prend pas en compte les phénomènes dissipatifs.

En revanche si les éléments de contact frottant sont au delà de la couronne définie entre R_{inf} et R_{sup} les calculs de G , $G(s)$, $K1$ et $K2$ sont valides.

Par contre, il est possible pour le calcul de G et de $G(s)$ seulement de prendre en compte des conditions de contact sans frottement pour éviter l'interpénétration des lèvres de la fissure.

2.3 Validité du calcul de G en non-linéaire

Le problème essentiel dans les situations non linéaires provient de la difficulté de séparer les différentes contributions énergétiques. Il faut considérer deux classes de problèmes très distinctes :

- celle où, malgré les non linéarités géométriques ou de comportement, on peut exhiber un potentiel pour les actions intérieures et extérieures (élasticité non linéaire ou hyperélasticité),
- celle où un tel potentiel n'existe pas (thermo-élastoplasticité).

Pour la première classe, on peut étendre le critère de Griffith en utilisant l'énergie potentielle à l'équilibre, et calculer le taux de restitution d'énergie comme en thermo-élasticité linéaire.

Pour la seconde classe de problème, la difficulté essentielle vient du fait que la dissipation n'est pas uniquement due à la propagation de la fissure elle-même. On ne peut plus distinguer quelle part de l'énergie restituée sert à la propagation et quelle part est directement utilisée par un autre phénomène dissipatif (la plasticité en l'occurrence).

2.3.1 Thermo-élasticité non linéaire

Non linéarité de comportement : la relation de comportement élastique non linéaire est décrite en [R5.03.20]. Il est à noter que la loi élastoplastique de Hencky-Von Mises (écrouissage isotrope) dans le cas d'un chargement radial et monotone est équivalent à la loi élastique non-linéaire. Le matériau hyperélastique a un comportement mécanique réversible, c'est-à-dire que tout cycle de chargement n'engendre aucune dissipation. De ce fait la relation de comportement du matériau dérive du potentiel d'énergie libre et on sait donner un sens au taux de restitution d'énergie dans le cadre de l'approche énergétique de Griffith.

Non linéarité géométrique : on étend la relation de comportement à de grandes déformations, dans la mesure où elle dérive d'un potentiel (loi hyperélastique). Cette fonctionnalité est déclenchée par le mot-clé `DEFORMATION = 'GREEN'` dans la commande `CALC_G`.

Une telle relation de comportement permet en toute rigueur de prendre en compte de grandes déformations. Toutefois, on se cantonne à de grands déplacements et de grandes rotations, mais on reste en petites déformations. Cela pour assurer l'existence d'une solution et pour être identique à un comportement élastoplastique sous un chargement radial monotone [R5.03.20 §2.1].

2.3.2 Thermo-élastoplasticité

Le domaine de validité du calcul du taux de restitution d'énergie est limité au cadre thermo-élastique linéaire ou non-linéaire. Pour traiter le problème élastoplastique, deux solutions sont envisageables :

- se ramener à un problème thermo-élastique non-linéaire avec des hypothèses restrictives,
- utiliser une autre formulation, comme celle de l'approche énergétique.

2.3.2.1 Équivalence entre un problème thermo-élastique non linéaire et un problème thermo-élastoplastique

La relation de comportement élastique non linéaire offre la possibilité de traiter les problèmes de mécanique de la rupture en approchant le comportement thermo-élastoplastique. Dans le cas d'un **chargement radial monotone**, elle permet d'obtenir des déformations et des contraintes de la structure semblables à celles que l'on obtiendrait si le matériau présentait un écrouissage isotrope. L'utilisation des indicateurs de décharge et de perte de radialité permet de s'assurer de l'équivalence des lois de comportement, cf. §3.3.3.

Mais les conditions de chargements proportionnels et monotones, indispensables pour assurer la cohérence du modèle avec le matériau réel, conduisent à des restrictions importantes du champ des problèmes à même d'être traités par cette méthode (la thermique en particulier peut conduire à des décharges locales).

2.3.2.2 Approche G_{TP}

La formulation de G pour une relation thermo-élastoplastique (approche G_{TP}) n'est valable que pour un solide entaillé et pas pour un solide fissuré : la difficulté principale dans l'établissement de cette formulation est l'impossibilité de démontrer l'existence de la dérivée de l'énergie mécanique totale pour un domaine comportant une fissure, et ceci principalement par l'absence de connaissance des singularités des champs en plasticité. Il est important de noter que les termes pris en compte dans un calcul thermo-élastoplastique avec la méthode thêta sont ceux supportés par les éléments entre la pointe de fissure et R_{sup} (par opposition au calcul en thermo-élasticité non-linéaire où seuls les termes entre R_{inf} et R_{sup} sont non nuls).

3 Mise en œuvre d'une étude de mécanique de la rupture

3.1 Maillage

3.1.1 Cas d'une fissure maillée

Conditions à respecter : il n'y a aucune condition a respecter *a priori* sur le type de maillage en fond de fissure. Cependant, de la qualité du maillage dépend la qualité numérique des résultats issus du calcul mécanique (déplacements et contraintes) et par conséquent de la qualité des grandeurs en mécanique de la rupture.

La définition de la fissure par l'opérateur `DEFI_FOND_FISS` nécessite des groupes de mailles relatifs :

- aux mailles du fond de fissure (mailles linéiques en 3D, maille point en 2D),
- aux mailles des lèvres de la fissure (maillage surfaciques en 3D, mailles linéiques en 2D).

Remarques et conseils :

- Les calculs des grandeurs de mécanique de la rupture sont valides pour des éléments linéaires ou quadratiques, mais il est fortement conseillé d'utiliser des éléments quadratiques, en particulier en 3D. Le calcul de ces grandeurs nécessite en effet de déterminer avec une bonne approximation les champs de contrainte et de déformation qui varient fortement au voisinage du fond de fissure. Or, à nombre de nœuds identique, les éléments quadratiques donnent de meilleurs résultats que les éléments linéaires.
- Un maillage rayonnant en fond de fissure n'est pas obligatoire : les rayons R_{inf} et R_{sup} ne sont pas liés au maillage et la couronne peut être « à cheval » sur plusieurs éléments. Néanmoins la pratique montre qu'un maillage rayonnant en fond de fissure donne de bons résultats numériques.
- Le mailleur GIBI comporte une procédure automatique paramétrée qui permet de concevoir des maillages de blocs fissure en 3D. Cette procédure a été développée par EDF-R&D et a été validée pour assurer la bonne qualité du maillage. On obtient un maillage au format GIBI que peut reconnaître *Code_Aster* (commande `PRE_GIBI`). L'utilisateur renseigne un certain nombre de paramètres géométriques (dimensions de fissure, taille de bloc,...) ou topologiques (modélisation du tore de fond de fissure en couronnes, secteurs et tranches, déraffinement, nombre d'éléments,...) et le logiciel génère un bloc fissure, qui peut ensuite être intégré dans une autre structure. Une procédure similaire est en cours de développement dans la plateforme Salomé et devrait être disponible fin 2010.
- Lors de l'utilisation de maillages quadratique, il est **fortement conseillé** de positionner les nœuds milieux des éléments quadratiques touchant le fond de fissure au quart des arêtes (maillage de type **Barsoum**). Ainsi la dépendance en \sqrt{r} du champ de déplacement est mieux représentée et la qualité des résultats est améliorée. On peut directement introduire de

type d'éléments dans un maillage quadratique existant par le mot clé `MODI_MAILLE` (option 'NOEUD_QUART') de la commande `MODI_MAILLAGE` [U4.23.04]. Le temps de calcul n'est pas modifié, mais le gain en terme de qualité des résultats est considérable.

Vérification de la qualité du maillage : Pour apprécier la qualité du maillage il est conseillé de réaliser un calcul élastique et d'utiliser les estimateurs d'erreurs de discrétisation : les estimateurs d'erreurs de ZHU-ZIENKIEWICZ en élasticité 2D [R4.10.01], l'estimateur d'erreur par résidu [R4.10.02] et les estimateurs en Quantité d'Intérêt [R4.10.06], les Quantités d'Intérêt disponibles étant $K1$, $K2$ et $K3$ issus de la méthode n°3 de `POST_K1_K2_K3`.

Ces estimateurs sont implantés dans `Code_Aster` dans la commande `CALC_ELEM` [U4.81.01]. Ils sont activés à partir des options suivantes : `ERRE_ELEM_NOZ1` pour $ZZ1$, `ERRE_ELEM_NOZ2` pour $ZZ2$ et `ERRE_ELGA_NORE` pour l'estimateur en résidu par élément. L'estimation en Quantité d'Intérêt nécessite la mise en place d'un problème dual (voir par exemple le cas test `zzzz257`).

3.1.2 Cas d'une fissure non maillée

Conditions à respecter : l'utilisation de la méthode X-FEM permet de lever certaines difficultés liées au maillage. Notamment, un maillage libre de la structure saine suffit. Cependant, un maillage suffisamment fin reste nécessaire dans les zones à fort gradient (autour du fond de fissure par exemple). Il est vrai qu'en élasticité linéaire, l'enrichissement par les fonctions asymptotique améliorer la précision de la méthode : à même taille de maille, les éléments X-FEM seront donc plus précis en fond de fissure que les éléments classiques. Mais cela n'a une influence que très localement. Il faut donc un maillage relativement raffiné en fond de fissure.

À titre de comparaison entre un maillage classique avec un tore à n couches d'éléments en fond de fissure et un maillage libre X-FEM, on peut dire que la taille des éléments X-FEM en fond de fissure doit être de l'ordre de celle des éléments de la couche $n/2$ du tore.

Seul l'estimateur d'erreur par résidu est disponible pour les éléments X-FEM, en 2D uniquement.

Remarques et conseils :

- Pour fixer les idées, pour une fissure de longueur a en milieu infini, la taille des éléments en fond de fissure doit être entre $a/10$ et $a/20$ pour obtenir une erreur sur la taux de restitution d'énergie entre 1% et 2%.
- Afin d'obtenir un maillage raffiné en fond de fissure, deux approches peuvent être envisagées :
 - 1) L'introduction d'un bloc fissure consiste à définir lors de la création du maillage, une boîte englobant la fissure. Le maillage dans cette boîte sera réglé, et la finesse du maillage doit être un paramètre de la procédure de maillage. La boîte doit être suffisamment large si l'étude la propagation de la fissure est envisagée. Il est aussi nécessaire de créer une zone de raccord entre la boîte réglée, et le reste de la structure maillée en libre. On peut aussi utiliser les fonctionnalités avancées des mailleurs comme `Blsurf+GHS3D` qui permettent de définir des cartes de tailles localement.
 - 2) La deuxième approche consiste à réaliser un maillage adéquat par raffinements successifs d'un maillage libre initial jugé grossier [U2.05.02]. Le critère de raffinement est la distance au fond de fissure (opérateur `RAFF_XFEM` [U7.03.51]).

3.2 Calcul élastique linéaire

3.2.1 Cas d'une fissure maillée

Le calcul des différents paramètres de la mécanique de la rupture ne se fait qu'en post-traitement du calcul mécanique classique. La mise en œuvre d'une étude est donc la suivante :

- Lecture du maillage
- Définition du modèle, des matériaux, des chargements
- Calcul mécanique avec `MECA_STATIQUE` ou `STAT_NON_LINE`
- Définition des caractéristiques de la fissure

•En 2D pour toutes les options et en 3D pour le calcul de G : opérateur `DEFI_FOND_FISS` [U4.82.01]. Cette commande permet de définir en 2D le nœud du fond de fissure et la normale à la fissure ; en 3D les nœuds du fond de fissure et les mailles des lèvres de la fissure ; dans le cas d'une entaille ou d'une fissure initialement ouverte, on définira dans `DEFI_FOND_FISS` la normale au défaut et pas les lèvres du défaut.

•En 3D pour le calcul de K par la méthode G-thêta : opérateur `DEFI_FISS_XFEM` [U4.82.08].

•Définition des champs thêta (facultatif) : opérateur `CALC_THETA` [U4.82.02]

•Calcul avec l'opérateur `CALC_G` [U4.82.03] :

•option `CALC_G` ou `CALC_G_GLOB` : calcul de G

•option `CALC_K_G` : calcul de K et de G

•option `CALC_K_MAX`, `G_MAX`, `G_MAX_GLOB` : maximisation de K ou de G en présence de chargements signés ou non signés

•option `K_G_MODA`

•Calcul avec l'opérateur `POST_K1_K2_K3` [U4.82.05] : calcul de K et de G à partir des sauts de déplacement sur les lèvres (extraits directement par l'opérateur du champ de déplacement global).

3.2.2 Cas d'une fissure non maillée

Dans le cas d'une fissure non maillée, il y a une étape préalable de définition et d'enrichissement du modèle (méthode X-FEM, cf. [U2.05.02] pour plus de détails). La mise en œuvre d'une étude est donc la suivante :

- Lecture du maillage (sans fissure)
- Définition du modèle sain, des matériaux
- Définition de la fissure : `DEFI_FISS_XFEM`
- Création du modèle enrichi : `MODI_MODELE_XFEM`
- Définition des chargements (avec une charge spécifique : `LIAISON_XFEM`)
- Calcul mécanique avec `STAT_NON_LINE`
- Calcul avec l'opérateur `CALC_G` [U4.82.03] :
 - option `CALC_G` ou `CALC_G_GLOB` : calcul de G
 - option `CALC_K_G` : calcul de K et de G
- Calcul avec l'opérateur `POST_K1_K2_K3` [U4.82.05] : calcul de K et de G à partir des sauts de déplacement sur les lèvres (extraits directement par l'opérateur du champ de déplacement global).
- Création du maillage de visualisation et visualisation des champs résultats (contraintes, déplacement) : `POST_MAIL_XFEM` et `POST_CHAM_XFEM`.

3.2.3 Utilisation des résultats

Les facteurs d'intensité des contraintes et les taux de restitution d'énergie calculés peuvent servir à :

- évaluer le risque d'amorçage du défaut (comparaison avec la ténacité) ;
- calculer la vitesse de propagation en fatigue de la fissure (loi de Paris) pour un éventuel calcul de propagation (par remaillage ou avec `PROPA_FISS` pour une fissure non maillée [U4.82.11]) ;
- estimer la direction de bifurcation de la fissure sollicitée en mode mixte [bib2],[bib14], [U4.82.03].

3.3 Calcul non-linéaire

3.3.1 Calcul du paramètre GTP [R7.02.07]

Maillage : le défaut doit être modélisé par une **entaille** et non pas par une fissure. On rappelle que la normale au défaut doit être définie dans `DEFI_FOND_FISS`. De plus, il est nécessaire d'utiliser un maillage fin avec des éléments quadratiques au voisinage du fond de l'entaille pour avoir des résultats fiables dans les cas de décharge.

L'entaille peut avoir la forme d'un cigare ou d'une fissure prolongée d'un cercle en son extrémité, cf. figure ci-dessous. Une telle modélisation en 3D peut être délicate et conduire à des temps de calcul importants.

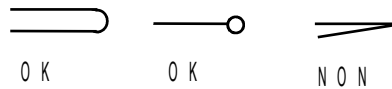


Figure 3.3.1-1 : Formes d'entaille possibles

Dans le cadre de la méthode θ on considère que l'entaille se propage en gardant la même forme (même si cela n'a pas de signification physique pour une entaille de type pastille).

Le type de l'entaille et le rayon en fond d'entaille n'ont pas d'influence sur les valeurs de GTP à condition que l'épaisseur de l'entaille soit faible par rapport aux dimensions de la structure.

Il est **impératif** de ne pas calculer GTP sur une entaille pointue (fissure classique) car les résultats seront faux ! En effet, les termes de gradient des déformations plastiques sont mal calculés numériquement.

Calcul : le calcul mécanique se fait de manière classique, avec l'opérateur `STAT_NON_LINE`, en utilisant une loi de comportement élasto-plastique (mot clé facteur `COMP_INCR`). Il est nécessaire de récupérer ensuite les champs des tenseurs de déformation plastique par l'opérateur `CALC_ELEM` [U4.81.01].

Post-traitement : le calcul de GTP se fait avec l'opérateur `CALC_G`. Le mot clé facteur `COMP_INCR` (avec `RELATION = 'VMIS_ISOT_LINE', 'VMIS_ISOT_TRAC', 'VMIS_CINE_LINE' ou 'VMIS_ISOT_PUIS'`) doit être présent dans la commande `CALC_G`.

Interprétation des résultats : cette formulation est issue de travaux de recherche assez récents et le paramètre GTP n'a pas encore de validité expérimentale.

La question principale porte sur l'interprétation à faire des résultats obtenus avec ce paramètre de rupture GTP , qui ne permet pas de dissocier l'énergie dissipée en rupture et celle dissipée en plasticité. Ainsi, au cours d'une décharge les valeurs de GTP sont d'abord décroissantes puis ensuite croissantes. Si l'on se place dans l'hypothèse de Griffith, on pourrait donc avoir propagation de la fissure en décharge, ce qui est problématique. Le critère de rupture associé à GTP reste donc à discuter.

Un exemple d'étude industrielle avec le paramètre GTP peut être trouvé dans [bib31]. Il s'agit dans ce cas de l'étude de la nocivité d'un défaut sous revêtement soumis à un choc thermique.

Un cas test de validation : `ssnp102`.

3.3.2 Calcul du paramètre G_p [R7.02.16]

On trouvera les conseils et recommandations à l'utilisation de la méthode dans la doc U2.05.08

3.3.3 Indicateurs de décharge et de perte de radialité

Ces indicateurs permettent de localiser les décharges locales et la perte de radialité (champ `DERA_ELGA` et `DERA_ELNO` calculé avec `CALC_ELEM`).

Attention à l'interprétation des indicateurs de décharge et de perte de radialité : la valeur donnée au temps t_i correspond au diagnostic de ce qui se passe entre t_i et t_{i+1} . Ainsi, la valeur calculée au dernier pas de temps n'a pas de sens. L'indicateur de décharge est négatif pour indiquer une décharge locale, et l'indicateur de radialité vaut 0 pour un trajet radial.

Remarque :

L'interprétation de l'indicateur de perte de radialité n'est pas aisée. On ne sait en particulier pas définir de seuil à partir duquel le calcul n'est plus valide.

Une solution alternative peut consister à comparer en post-traitement d'un calcul élastoplastique le G élastique non linéaire avec ou sans re-calcul des contraintes (mot clé `CALCUL_CONTRAINTES` de `CALC_G`).

Si on reste bien dans le domaine de validité du calcul de G (chargement radial et monotone), alors les résultats avec ou sans re-calcul des contraintes sont identiques. Dès qu'on sort de ce domaine de validité, l'écart croît. On peut donc vérifier à posteriori qu'on reste bien dans les hypothèses de calcul de G .

4 Recommandations d'utilisation

4.1 Introduction du champ θ

4.1.1 Conditions à respecter

Le champ θ est un champ de vecteurs, défini sur le solide fissuré, qui représente la transformation du domaine lors d'une propagation de fissure. Ce champ doit vérifier les conditions suivantes :

- la transformation ne doit modifier que la position du fond de fissure et pas le bord du domaine $\partial\Omega$. Le champ θ doit donc être tangent à $\partial\Omega$ (en particulier les lèvres de la fissure), i.e. en notant \mathbf{n} la normale à $\partial\Omega$: $\theta \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$.
- Le champ θ doit être localement dans le plan tangent aux lèvres de la fissure et en 3D normal à l'arête à laquelle il appartient. Ceci correspond à la direction de propagation de la fissure.
- Le champ θ doit également être continu sur Ω .

4.1.2 Conseil sur le choix des couronnes R_{inf} et R_{sup}

Dans Code_Aster, le choix a été fait de définir le champ θ de la façon suivante :

- la direction du champ est colinéaire à la direction de propagation de la fissure. En 3D, on prend la direction locale de la projection du nœud considéré sur le fond de fissure ;
- la norme de θ est définie à partir de deux couronnes (ou tores en 3D), de rayon R_{inf} et R_{sup} . En deçà de R_{inf} , le module du champ θ est constant, au delà il est nul et il est linéaire entre les deux, cf. Figure 4.1.2-1.

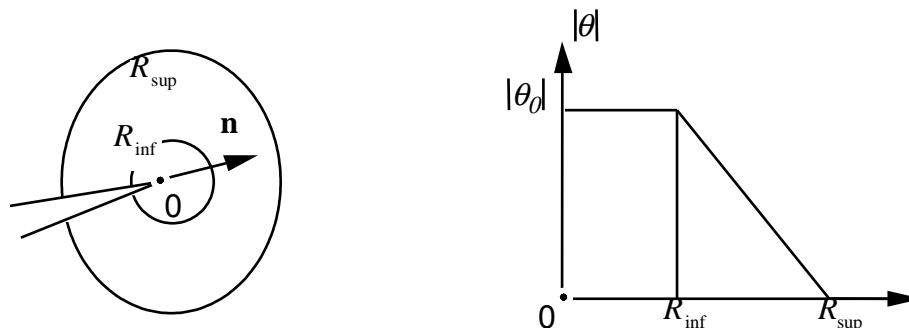


Figure 4.1.2-1: Définition géométrique du champ θ

La construction du champ θ est décrite précisément dans [R7.02.01]. Elle est implantée dans les commandes `CALC_THETA` et `CALC_G`.

En 2D et en axisymétrique le fond de fissure Γ_0 se limite à un point. L'utilisateur définit :

- les rayons R_{inf} et R_{sup} ,
- le module $|\theta_0|$ en fond de fissure (égal à 1 par défaut),
- la direction de propagation de la fissure m .

En 3D l'utilisateur définit :

- les rayons $R_{inf}(s)$ et $R_{sup}(s)$,
- les directions de propagation de la fissure uniquement aux extrémités du fond de fissure (mots clés `DTAN_ORIG` et `DTAN_EXTR` dans la commande `DEFI_FOND_FISS`, cf. paragraphe suivant),
- la topologie du fond de fissure : ouvert ou fermé suivant si la fissure est débouchante ou non,

- le module $|\theta_0|$ en fond de fissure (uniquement pour le calcul de G global sinon les P champs θ^i nécessaires à la résolution de l'équation variationnelle et au calcul de $G(s)$ sont calculés automatiquement selon la famille de fonctions d'interpolation choisie, voir §23).

Les directions du champ thêta hors extrémités sont calculés automatiquement à partir des lèvres de la fissure, mais l'utilisateur peut éventuellement les définir lui-même en utilisant le mot clé `DIRE_THETA`.

Remarque :

- Les champs de déplacement et de contrainte sont singuliers en fond de fissure ; la précision du calcul est donc moins bonne au voisinage du fond. On note que la forme du champ thêta choisie ($\theta \cdot m$ constant entre 0 et R_{inf}) permet justement d'annuler la contribution du terme classique de $G(\theta)$ à l'intérieur de la première couronne (terme en $\int_{\Omega} [\sigma(\mathbf{u}) : (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \theta) - \Psi(\varepsilon(\mathbf{u})) \operatorname{div} \theta] d\Omega$).
- Ne pas oublier que les chargements appliqués au-delà de R_{sup} ont une contribution nulle dans les post-traitements de mécanique de la rupture. Ceci peut être utile si on applique un chargement non supporté comme `FORCE_NODALE`, `DDL_IMPO` (en 2D) ou `FACE_IMPO` (en 3D).

Conseils sur le choix des rayons R_{inf} et R_{sup} : le calcul des grandeurs de mécanique de la rupture est théoriquement indépendant du choix de la couronne d'intégration (en l'absence de chargement sur les lèvres, volumique ou thermique). Néanmoins il est préférable de respecter quelques règles :

- ne jamais prendre R_{inf} ou trop petit par rapport aux dimensions du problème car les déplacements singuliers sont mal calculés au voisinage du fond de fissure (cf. remarque ci-dessus) ;
- le rayon supérieur R_{sup} peut être aussi grand que l'on veut à condition que la couronne ainsi définie soit contenue dans le solide. En 3D, il ne faut pas prendre un rayon R_{sup} trop grand, sinon la direction du champ thêta (calculée par projection sur le fond de fissure) peut être imprécise ;
- le choix des rayons R_{inf} et R_{sup} est indépendant de la topologie du maillage. Cependant, si le maillage est rayonnant en pointe de fissure, il est recommandé de prendre des couronnes d'intégration coïncidentes avec les couronnes du maillage (réduction des oscillations de G le long du fond de fissure en 3D) ;
- en thermo-élastoplasticité, on utilise une fissure comme entaille. On s'assurera que le rayon inférieur R_{inf} est bien supérieur au rayon de l'entaille.
- Prendre plusieurs couronnes consécutives pour vérifier [R1,R2], [R2,R3], [R3, R4],...

Pour se fixer les idées, pour une fissure de longueur a en milieu infini, la taille des éléments en fond de fissure doit être inférieure à $a/10$ pour obtenir une erreur raisonnable (de l'ordre du % sur KI). Pour les couronnes d'intégration, on prend alors généralement R_{inf} de l'ordre de 1 à 3 fois la taille des éléments au voisinage du fond ; et R_{sup} de 3 à 7 fois la taille des éléments.

4.1.3 Problème de la discrétisation en 3D

Fissure débouchante orthogonalement aux bords : en 3D, pour un nœud courant du fond de fissure, la direction de propagation est définie comme étant la moyenne des normales aux mailles segments du fond de fissure à sa gauche et à sa droite. Pour les nœuds extrémités, la normale est calculée à partir d'une seule maille, et peut donc être moins précise.

Il est donc recommandé, en particulier si la discrétisation du fond n'est pas très fine, de préciser les directions de propagation à l'origine et à l'extrémité du fond par les mots clés `DTAN_ORIG` et `D`

TAN_EXTR de DEFI_FOND_FISS (pour le calcul de G sur une fissure maillée) et/ou de CALC_G (calcul de K et fissures non maillées).

Fissure débouchante de façon non perpendiculaire : à l'extrémité débouchante du fond de fissure, le champ θ ne peut pas simultanément être normal à l'arête à laquelle il appartient (dans le plan tangent des lèvres de la fissure) et vérifier la condition $\theta \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial \Omega$.

La solution conseillée est d'imposer comme direction de propagation aux extrémités (mots clés DTAN_ORIG et DTAN_EXTR) la moyenne de la normale au fond de fissure en ce point θ_1 et de la tangente à l'arête θ_2 .

On peut également définir la direction du champ θ sur tous les nœuds du fond de fissure avec le mot clé DIRE_THETA dans les commandes CALC_THETA ou CALC_G. Au voisinage de l'extrémité débouchante, on choisit comme direction la moyenne de la normale au fond de fissure en ce point θ_1 et de la tangente à l'arête θ_2 .

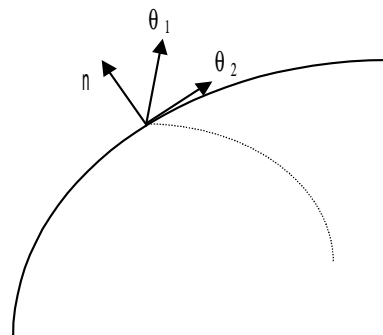


Figure 4.1.3-1: Direction de propagation aux extrémités de la fissure

4.2 Méthodes d'interpolation en 3D

4.2.1 Cadre général

Le taux de restitution d'énergie local $G(s)$ est solution de l'équation variationnelle $\int_{\Gamma_0} G(s)\theta(s) \cdot \mathbf{m}(s) ds = G(\theta)$, $\forall \theta \in \Theta$.

Pour résoudre cette équation :

on décompose le champ scalaire $G(s)$ sur une base que nous notons $(p_j(s))_{1 \leq j \leq N}$. Soit G_j les composantes de $G(s)$ dans cette base : $G(s) = \sum_{j=1}^N G_j p_j(s)$.

on se donne une base de fonctions tests pour θ en choisissant P champs θ^i indépendants pour la trace du champ θ sur le fond de fissure Γ_0 : $(\bar{\theta}^i(s))_{1 \leq i \leq P}$.

Les G_j sont déterminés en résolvant le système linéaire à P équations et N inconnues :

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} G_j = b_i, \quad i=1, P$$

$$\text{avec } a_{ij} = \sum_{k=1}^M \theta_k^i \int_{\Gamma_0} p_j(s) q_k(s) \cdot m(s) ds$$

$$b_i = G(\theta^i)$$

Ce système a une solution si on choisit P champs θ^i indépendants tels que : $P \geq N$ et si $M \geq N$. Il peut comporter plus d'équations que d'inconnues, auquel cas il est résolu au sens des moindres carrés.

4.2.2 Méthodes de lissage de G et Thêta

Dans *Code_Aster*, on a choisi deux familles de bases (cf. [§2.2]) :

- les polynômes de LEGENDRE $\gamma_j(s)$ de degré j ($0 = j = 7$),
- les fonctions de forme du nœud k de Γ_0 : $\varphi_k(s)$ ($1 = k = NNO =$ nombre de nœuds de Γ_0) (de degré 1 pour les éléments linéaires et de degré 2 pour les éléments quadratiques).

Ces familles de bases et les systèmes linéaires à résoudre sont décrits précisément dans la documentation de référence [R7.02.01]. L'utilisation des fonctions de forme est appelée 'LAGRANGE' dans *Code_Aster*. Deux variantes sont disponibles :

- 'LAGRANGE_REGU' : forme régularisée du lissage de LAGRANGE, consistant à prendre systématiquement des fonctions de forme linéaires et à étendre le support de chaque champ thêta sur 4 mailles consécutives (contre 2 avec 'LAGRANGE') ;
- 'LAGRANGE_NO_NO' : version simplifiée du lissage de LAGRANGE, permettant dans certains cas d'obtenir des résultats plus réguliers en fond de fissure.

Plusieurs options sont donc possibles selon la base de fonctions tests pour thêta et la base de décomposition pour G . Elles sont résumées dans le tableau suivant :

		Thêta	
		Polynômes de LEGENDRE	Fonctions de forme
$G(s)$	Polynômes de LEGENDRE	LISSAGE_THETA= 'LEGENDRE' LISSAGE_G = 'LEGENDRE'	LISSAGE_THETA='LAGRANGE' LISSAGE_G= 'LEGENDRE'
	Fonctions de forme		LISSAGE_THETA = 'LAGRANGE' LISSAGE_G = 'LAGRANGE' ou 'LAGRANGE_NO_NO' LISSAGE_THETA = 'LAGRANGE_REGU' LISSAGE_G = 'LAGRANGE_REGU'

Tableau 4.2.2-1 : Combinaisons possibles pour le calcul de G en 3D

4.2.3 Remarques et conseils

- **Choix de la méthode** : il est difficile de donner une préférence à l'une ou l'autre méthode. En principe les deux donnent des résultats numériques équivalents. Néanmoins la méthode Thêta : Lagrange est un peu plus coûteuse en temps CPU que la méthode Thêta : Legendre. Il est **indispensable d'utiliser plusieurs méthodes** et de comparer des résultats, afin de conforter la validité du modèle.
- **Choix du degré maximum des polynômes de Legendre** : ce choix dépend du nombre de nœuds en fond de fissure. Si on a un faible nombre de nœuds (une dizaine) il est inutile de prendre un degré supérieur à 3 (on conçoit facilement que les résultats sont médiocres si on essaie de trouver un polynôme

- de degré 7 passant par 10 points). Au delà d'une vingtaine de nœuds en fond de fissure on peut utiliser des degrés allant jusqu'à 7. L'expérience montre que le choix d'un degré égal à 5 donne de bons résultats dans la plupart des cas (cf. remarque ci-dessous).
- **Cas des fissures fermées** : si le fond de fissure est une courbe fermée, des problèmes de continuité de la solution au point arbitrairement choisi comme abscisse curviligne origine interdisent l'emploi des polynômes de Legendre. Si le fond de fissure a été déclaré « fermé » dans `DEFI_FOND_FISS`, on doit utiliser les fonctions de forme (Lagrange) pour décrire les fonctions G et Θ .
 - **Problème du non respect de la symétrie** : si on ne modélise que la moitié du solide par rapport à la fissure, on doit en principe avoir une courbe $G(s)$ dont la pente de la tangente est nulle à l'interface de la symétrie. Ceci n'est pas respecté par les deux méthodes. Les valeurs de $G(s)$ obtenues aux extrémités du fond de fissure doivent toujours être interprétées avec prudence, surtout si la fissure est débouchante de façon non perpendiculaire (voir § 22).
 - **Problème des oscillations avec Lagrange** : des oscillations peuvent apparaître avec la méthode Lagrange, en particulier si le maillage comporte des éléments quadratiques. Ces oscillations sont liées à un profil radial du champ θ qui est différent sur les nœuds sommet et sur les nœuds milieu. Un lissage de type '`LAGRANGE_NO_NO`' ou '`LAGRANGE_REGU`' permet de limiter ces oscillations. Par ailleurs, si le maillage est rayonnant en fond de fissure (fissure maillée), on rappelle qu'il est recommandé de définir des couronnes `R_INF` et `R_SUP` coïncidant avec les frontières des éléments.
 - **Cas des maillages libres** (en particulier fissures non maillées) : quand le maillage n'est pas régulier le long du fond de fissure (taille et répartition des éléments variables), de fortes oscillations peuvent apparaître avec la méthode Lagrange. Un lissage de type '`LAGRANGE_NO_NO`' ou '`LAGRANGE_REGU`' limite ces oscillations, mais peut être insuffisant en particulier pour les calculs X-FEM. Dans ce cas, il est recommandé d'utiliser l'opérande `NB_POINT_FOND` de `CALC_G` pour garantir une équi-répartition des points de calculs en fond de fissure. Le choix d'un rapport de l'ordre de 4 entre le nombre de points total en fond de fissure (à chercher dans les informations imprimées dans le fichier message par la commande `DEFI_FISS_XFEM`) et le nombre de points de calcul semble approprié pour limiter les oscillations avec la méthode Θ : Lagrange.

Illustration des problèmes d'oscillations avec Legendre : soit un cas de figure où la solution est constante sur le fond de fissure $G^{exact}(s) = \gamma_0(s)$. Si le terme devant le polynôme de Legendre de degré sept est mal calculé, à un facteur ε près (mais tous les autres coefficients devant les autres polynômes valent exactement 0), alors le résultat numérique est : $G(s) = \gamma_0(s) + \varepsilon \cdot \gamma_7(s)$. L'erreur relative commise sur G est donc :

$$e = \frac{G(s) - G^{exact}(s)}{G^{exact}(s)} = \varepsilon \cdot \frac{\gamma_7(s)}{\gamma_0(s)} = \varepsilon \sqrt{15} \frac{P_7\left(\frac{2s}{l} - 1\right)}{P_0\left(\frac{2s}{l} - 1\right)} = \varepsilon \sqrt{15} P_7\left(\frac{2s}{l} - 1\right)$$

Si on trace le rapport $\frac{e}{\varepsilon}$ en fonction de l'abscisse curviligne normée $\frac{s}{l}$, on obtient la figure suivante.

L'erreur aux extrémités (en $x=0$ et en $x=\frac{s}{l}$) est environ 2 à 3 fois plus grande que l'erreur maximale à l'intérieur du fond. Par exemple, si ε vaut 10^{-2} (soit 1% d'erreur), on commettra une erreur maximale de 1,5% partout, sauf aux extrémités où l'erreur atteindra 4%.

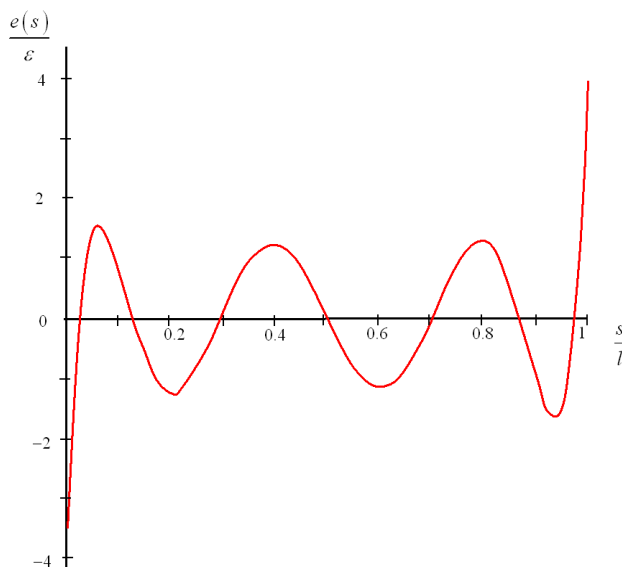


Figure 4.2.3-1 : rapport de l'erreur relative sur la précision en fonction de l'abscisse curviligne normée

4.3 Conseils pour les calculs avec POST_K1_K2_K3

• **Choix de la distance d'extrapolation** : la distance d'extrapolation `ABSC_CURV_MAXI` est le seul paramètre utilisateur. Typiquement, on prend cette distance égale à 3 à 5 fois la taille des éléments au voisinage du fond de fissure.

• **Cas des fissures maillées** : le maillage doit être de préférence quadratique et comporter suffisamment de nœuds perpendiculairement au fond de fissure. D'autre part, les résultats sont nettement améliorés si, dans le cas où le maillage est composé d'éléments quadratiques, on déplace les nœuds milieux (des arêtes qui touchent le fond de fissure), au quart de ces arêtes en les rapprochant du fond de fissure. Ceci est rendu possible par le mot clé `MODI_MAILLE` (option 'NOEUD_QUART') de la commande `MODI_MAILLAGE` [U4.23.04].

• **Cas des fissures non maillées** : la précision de la méthode est sensible au choix de la zone d'enrichissement de la méthode X-FEM (paramètre `RAYON_ENRI` de `DEFI_FISS_XFEM`). Dans l'idéal, le rayon d'enrichissement et l'abscisse curviligne maximale `ABSC_CURV_MAXI` sont de l'ordre de trois fois la taille de l'arrête minimale du maillage.

• **Performances** : dans le cas X-FEM, les calculs sont assez consommateurs en temps et en mémoire s'il y a beaucoup de points sur le fond de fissure. L'utilisation du mot clé `NB_POINT_FOND` permet de limiter le post-traitement à un certain nombre de points équi-répartis le long du fond.

• **Interprétation des résultats** : trois méthodes d'extrapolation sont développées et 5 valeurs de chacun des paramètres apparaissent dans le tableau résultat (valeurs minimales et maximales des méthodes 1 et 2 ; valeur de la méthode 3, comparable à une moyenne pondérée). La comparaison de chacune de ces valeurs permet d'estimer a posteriori la qualité du calcul : un résultat peut être considéré comme satisfaisant si les 5 valeurs ainsi fournies sont proches. De manière générale, la méthode 1 (valeur max) est souvent celle qui donne les résultats les plus précis et les plus stables, que ce soit en 2D ou en 3D. La méthode 3 présente l'intérêt de donner une valeur moyennée, moins sensible à la qualité locale du maillage et à la distance d'extrapolation.

4.4 Normalisation, symétries

4.4.1 2D contraintes planes et déformations planes

En dimension 2 (contraintes planes et déformations planes), le fond de fissure est réduit à un point et la valeur $G(\theta)$ issue de la commande `CALC_G` est indépendante du choix du champ θ :

$$G = G(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta$$

4.4.2 Axisymétrie

En axisymétrique il faut normaliser la valeur $G(\theta)$ obtenue avec Code_Aster pour les options `CALC_G`, `G_MAX` et `G_BILI` :

$$G = \frac{1}{R} G(\theta)$$

où R est la distance du fond de fissure à l'axe de symétrie [R7.02.01 §2.4.4].

Pour l'option `CALC_K_G`, les valeurs de G et de K fournies dans le tableau résultat sont directement les valeurs locales, il ne faut donc pas les normaliser.

4.4.3 3D

En dimension 3, la valeur de $G(\theta)$ pour un champ θ donnée est telle que :

$$g(\theta) = \int_{\Gamma_0} G(s) \theta(s) \cdot m(s) ds$$

Par défaut, la direction du champ θ en fond de fissure est la normale au fond de fissure dans le plan des lèvres. En choisissant un champ θ unitaire au voisinage du fond de fissure, on a alors :

$$\theta(s) \cdot \mathbf{m}(s) = 1$$

et :

$$G(\theta) = \int_{\Gamma_0} G(s) ds$$

Soit G le taux de restitution de l'énergie global, pour avoir la valeur de G par unité de longueur, il faut diviser la valeur obtenue par la longueur de la fissure l :

$$G = \frac{1}{l} G(\theta) .$$

4.4.4 Symétrie du modèle

Il est possible de prendre en compte une éventuelle symétrie ou anti-symétrie du problème traité directement sur le calcul du taux de restitution d'énergie G et les facteurs d'intensité des contraintes. Voir le mot-clé `SYME_CHAR` dans `CALC_G` [U4.82.03] et `POST_K1_K2_K3` [U4.82.05].

5 Conclusions

Les points à retenir sont les suivants :

- L'étude d'une fissure en élasticité (linéaire ou non) peut se faire sur une fissure maillée comme sur une fissure non maillée. Dans les deux cas le maillage doit être suffisamment fin au voisinage du fond de fissure pour capter correctement la singularité des contraintes.
- Les calculs sont possibles sur une fissure non plane, mais l'utilisateur doit veiller à ce qu'elle reste suffisamment régulière pour que les hypothèses de calcul soient valides : il ne faut pas avoir une singularité géométrique sur le fond ou sur les lèvres. Typiquement, le calcul est licite pour une fissure axisymétrique, mais pas pour un coin.
- En élasticité linéaire, plusieurs opérateurs (CALC_G, POST_K1_K2_K3) et plusieurs méthodes (d'extrapolation, de lissage, ...) sont disponibles. Il est **indispensable** de comparer les résultats des différentes méthodes et opérateurs pour s'assurer de la bonne qualité du modèle. Il est également recommandé d'évaluer la sensibilité du résultat au choix des paramètres des opérateurs (rayons d'intégration) et au raffinement du maillage.
- En élastoplasticité, la fissure doit être représentée par une entaille. En rupture fragile, l'opérateur POST_GP permet de calculer le paramètre G_p . Cette approche a déjà été validée sur plusieurs cas par comparaison à des résultats expérimentaux ; et appliquée sur des cas industriels. En rupture ductile, l'opérateur CALC_G permet de calculer le paramètre GTP . Le critère de rupture associé à ce paramètre reste encore à préciser.

6 Documentation du Code_Aster relative à la mécanique de la rupture

Documents de Référence :

[R7.02.01]	Taux de restitution de l'énergie en thermo-élasticité linéaire
[R7.02.03]	Taux de restitution de l'énergie en thermo-élasticité non linéaire
[R7.02.04]	Représentation Lagrangienne de variation de domaine
[R7.02.05]	Calcul des facteurs d'intensité de contraintes en thermoélasticité linéaire plane
[R7.02.07]	Taux de restitution d'énergie en thermo-élasto-plasticité
[R7.02.08]	Calcul des coefficients d'intensité de contraintes par extrapolation du champ de déplacements
[R7.02.16]	Taux de restitution d'énergie élastique en thermo-élasto-plasticité par l'approche Gp

Documents d'Utilisation :

[U4.82.01]	Opérateur DEFI_FOND_FISS
[U4.82.02]	Opérateur CALC_THETA
[U4.82.03]	Opérateur CALC_G
[U4.82.05]	Opérateur POST_K1_K2_K3
[U4.82.08]	Opérateur DEFI_FISS_XFEM
[U4.82.31]	Opérateur POST_GP

Cas test de Validation :

Numéro	Titre	Fissure		Modélisation					Comper.				Option K					Particularités
		Maillée	Non maillée	DP	CP	Axi	3D	Elas. Linéaire	Elas. Non liné	Elastoplastiq	Grande Déf.	CALC_G	CALC_G_GLO	CALC_K_G	POST_K1_K2	Autres		
hpla310	Fissure radiale dans un barreau soumis à un choc thermique	X				X		X			X						Thermique	
hpla311	Fissure circulaire dans une sphère soumise à une température uniforme sur les lèvres	X				X		X		X	X						Thermique	
hplp100	Plaque fissurée en thermoélasticité	X		X				X		X	X						Thermique ; Sensibilité	
hplp101	Plaque fissurée en thermoélasticité	X			X			X		X	X						Thermique ; Sensibilité	
hplp310	Fissure radiale dans un cylindre épais sous pression et chargement thermique	X		X				X		X	X						Thermique ; contact	
hplp311	Fissure au centre d'une plaque mince soumise à un flux thermique	X			X			X		X	X						Thermique	
hplv102	G en thermoélasticité pour une fissure circulaire en milieu infini	X				X		X		X							Thermique	
hplv103	G en thermoélasticité 3D pour une fissure circulaire	X				X	X	X		X	X	X					Thermique	
hsna120	Propagation d'un réseau de fissure en fatigue thermomécanique	X				X		X						X			Thermique ; propagation	
sdl114	Facteurs d'intensité des contraintes modaux	X			X		X	X					X	X			K_G_MODAL	
ssla310	Fissure radiale à l'interface d'un bimatériel	X				X		X		X							Bimatériau	
ssla311	Fissure circulaire soumise à une charge annulaire	X				X		X		X								
sslp101	Plaque fissurée en traction	X			X			X		X	X							
sslp102	Calcul de G avec déformations initiales	X		X				X		X							Etat initial	
sslp103	Calcul de K1 et K2 pour une plaque circulaire fissurée	X			X			X		X	X						Mode mixte	
sslp310	Fissure pressurisée dans un domaine plan illimité	X			X			X		X		X					MACR_ELAS_MULT	
sslp311	Fissure centrale dans une plaque à deux matériaux	X			X			X		X							Bimatériau	
sslp313	Fissure oblique dans une plaque infinie en traction	X			X			X				X	X				Mode mixte ; Arlequin	
sslp314	Fissure déviée à l'interface de 2 plaques élastiques	X			X			X		X	X							
sslp315	Propagation d'une fissure débouchante dans une plaque 2D	X	X	X				X				X	X				Propagation	
sslv110	Fissure semi-elliptique dans un milieu infini	X	X				X	X		X	X	X	X				Sensibilité	
sslv134	Fissure circulaire en milieu infini	X	X				X	X		X	X	X	X	X			G_BILI, G_GLOB, CALC_K_MAX	
sslv310	Fissure semi-elliptique débouchante en peau interne dans un cylindre sous pression	X				X	X	X		X	X							
sslv311	Fiss en quart d'ellipse au coin d'un disque épais	X					X	X				X						
sslv312	Fissure elliptique perpendiculaire à l'interface entre deux matériaux	X				X	X	X		X	X							
sslv313	Tube sous pression fissuré	X	X	X	X			X		X		X	X					
sslv314	Propagation de fissure dans une plaque 3D en mode I pur	X		X				X				X	X				Propagation	
sslv315	Propagation de fissure inclinée dans une plaque 3D	X		X				X				X	X				Propagation	
ssnp102	Plaque entaillée en plasticité	X		X			X		X		X							
ssnp110	Fissure de bord en élastoplasticité dans une plaque rectangulaire	X	X	X	X			X		X								
ssnp311	Fissuration en mode II d'une éprouvette élastoplastique	X		X				X		X								
ssnp312	Fissure parallèle à une interface dans une CT bimétallique	X	X	X				X		X								
ssnv108	Eprouvette CT en non linéaire	X	X		X		X	X		X								
ssnv166	Cylindre fissuré sous chargement multiple	X					X	X				X	X				Contact	
ssnv192	Eprouvette avec fissure centrale	X	X				X	X				X						
ssnv185	Fissure débouchante dans une plaque 3D	X	X				X	X		X		X	X					

7 Bibliographie

- 1) BUI H.D., Mécanique de la rupture fragile, Masson, 1977
- 2) BUI H.D., AMESTOY M., DANG VAN K., Déviation infinitésimale d'une fissure dans une direction arbitraire, C.R. Acad. SC. Paris, t. 289, série B, No 8, p99, 1979
- 3) DEBOST I., WADIER Y. : Application de l'approche énergétique à l'interprétation de l'effet petit défaut. Première partie : modèle de défaut de type fissure. Note HI-74/01/015/A, Juin 2001.
- 4) DEBRUYNE G., Proposition d'un paramètre énergétique de rupture ductile en thermoplasticité, IMA/MMN, HI-74/95/027/0, 1995
- 5) DEBRUYNE G., Etude d'un DSR, par une approche énergétique, durant un transitoire de petite brèche primaire 3"Note EDF R&D HT-64/02/010, 2002
- 6) DESTUYNDER Ph, DJAOUA M., Equivalence de l'intégrale de Rice et de G en mécanique de la rupture, C.R. Acad. SC. Paris, t. 290, série A, p347, 1980
- 7) FRANCFORT G. and MARIGO J.J. (1998), « Revisiting brittle fracture as an energy minimisation problem ». J. Mech. Phys. Solids, 46, n°8, pp 1319-1342.
- 8) GALENNE E. : Cartographie des approches disponibles en mécanique de la rupture. Note H-T64-2008-02200, Janvier 2009.
- 9) GRIFFITH A., The phenomena of Rupture and flow in solids, M.Eng. (of the Royal Aircraft Establishment), communicated by Taylor, F.R.S., 1920
- 10) LEBLOND J.B : "Mécanique de la rupture fragile et ductile" – Lavoisier, 2003.
- 11) LEFEVRE W., BARBIER G., MASSON R., ROUSSELIER G., A modified Beremin model to simulate warm pre-stress effect Nucl. Eng. Des. 198, 89-96 – 2002
- 12) LORENTZ E., WADIER Y., DEBRUYNE G . (2000), « Mécanique de la rupture en présence de plasticité : définition d'un taux de restitution d'énergie ». C.R.A.S. t. 328, série lib.
- 13) MEISTER E., Eléments bibliographiques sur la mécanique de la rupture des interfaces bimatériel, IMA/MMN, HI-74/93/116, 1994
- 14) MIALON P., Etude du taux de restitution de l'énergie dans une direction marquant un angle avec une fissure, note interne EDF, HI/4740-07, 1984.
- 15) MIALON P., Calcul de la dérivée d'une grandeur par rapport à un fond de fissure par la méthode théta, EDF, Bulletin de la direction des études et recherches, Série C, 1988
- 16) P. Destuynder, M. Djaoua, S. Lescure, Some remarks on elastic fracture mechanics (quelques remarques sur la mécanique de la rupture élastique), Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, vol. 2, n°1, p. 113-135, 1983
- 17) SIH G.C., Handbook of stress-intensity factor, Institute of Fracture and Solid Mechanics, Lehigh University, Bethlehem, Pennsylvania, 1973
- 18) WADIER Y., Mécanique de la rupture élastoplastique : étude numérique du paramètre GTP, et réflexions sur le critère de rupture. CR MMN/97/087, juillet 97.
- 19) WADIER Y., Quelques remarques sur le problème de charge/décharge en rupture élastoplastique, IMA/MMN, HI-70/95/020/0, 1995.
- 20) WADIER Y., DEBRUYNE G., « New energetic parameters for cleavage fracture and ductile tearing : application to the analysis of a subclad flaw located in a pressure vessel of a PWR ». PVP 2000, Seattle.

- 21) WADIER Y., LORENTZ E., « The energetic approach of elastic-plastic fracture mechanics applied to the problem of unloading ». SMIRT 16-2001, Washington.
- 22) WADIER Y., LORENTZ E., « New considerations and results on crack separation energy rates in elastic-plastic fracture mechanics ». ICF10, December 2001, Honolulu.
- 23) WADIER Y. : Présentation succincte de l'approche énergétique en rupture élastoplastique appliquée à la rupture par clivage. Note HT-64/03/001/A.
- 24) WADIER Y., LORENTZ E., Mécanique de la rupture fragile en présence de plasticité : modélisation de la fissure par une entaille, CRAS Paris, t. 332, p. 979–986, 2004
- 25) WADIER Y. : Lien entre les approches globale et locale de la mécanique de la rupture. Note H-T64-2007-00213, 2007.