

Adaptation d'un algorithme de Bazant au calcul des multilames visco-élastiques vieillissants

(Programme MULTIVIBAZ)

C. Huet (1)

Rappel d'un algorithme numérique dû à Bazant, et permettant la résolution pas à pas des équations de Volterra de la visco-élasticité linéaire avec vieillissement. Application de cet algorithme au calcul pas à pas de l'évolution de la déformation moyenne et de la courbure dans une structure hétérogène du type multilame (stratifié ou fibré assimilable à des poutres hétérogènes chargées dans un plan de symétrie avec conservation des sections planes). Calcul pas à pas des déformations et contraintes dans chaque lame, au niveau des interfaces. Calcul des flèches en une section pour différentes portées ramené à celui d'une portée type et décomposé en deux cas d'importance pratique : courbure parabolique (charge transversale uniforme) et courbure constante (moment constant, charge axiale excentrée sans effets du 2^e ordre; variations dimensionnelles des matériaux constitutifs). Prise en compte de la précontrainte qui entre dans le formalisme général moyennant l'attribution à l'acier d'une prédéformation égale à l'opposé du quotient de la précontrainte initiale par le module d'élasticité instantané de l'acier. Indications pratiques sur le programme MULTIVIBAZ et exemple de résultats.

1. INTRODUCTION

Le calcul des multilames en tenant compte du fluage et du vieillissement est d'une grande importance pour de nombreux problèmes intéressant les structures de bâtiment (flèche différée des planchers, fissuration des enduits monocouches ou multicouches, panneaux de murs composites, etc.).

Une solution formelle d'une grande généralité a été obtenue précédemment par une méthode d'opérateurs rhéologiques ([1], [4]). Son application exige toutefois la connaissance des fonctions relaxations, alors que seules les fonctions fluage sont en général connues.

Un algorithme numérique mis au point relativement récemment par Bazant [2], permet, d'une façon assez

générale, de ramener un problème quelconque de visco-élasticité avec vieillissement à une suite de problèmes élastiques avec *déformations libres (ou initiales)*.

La théorie des multilames élastiques résolvant justement un problème à dilatations libres, pour lequel nous avons mis au point un programme (MULTI-LAMELF) déjà largement utilisé, il était donc tentant d'examiner comment le principe de l'algorithme de Bazant pouvait être adapté à ce problème particulier des multilames.

La présente étude montre comment cela est effectivement possible, et indique les adaptations à faire sur le plan numérique.

Il en est résulté la rédaction d'un programme (MULTI-VIBAZ), permettant l'analyse des contraintes et déformations des multilames visco-élastiques comportant un nombre de lames visco-élastiques vieillissantes en nombre aussi élevé que l'on veut, les matériaux pouvant être tous différents.

(1) Centre Techniques des Tuiles et Briques (17, rue Letellier, 75015 Paris) et École Nationale des Ponts et Chaussées (28, rue des Saints-Pères, 75007 Paris).

2. ALGORITHME DE BAZANT

L'algorithme de Bazant est décrit en [2]. Il est le suivant. Du point de vue de la loi de comportement local du matériau, la réponse en déformation $\varepsilon(t)$ à une contrainte $\sigma(t)$ est donnée, lorsqu'il existe une dilatation libre $\varepsilon^0(t)$, par :

$$\varepsilon(t) - \varepsilon^0(t) = \int_0^t J(t, u) d\sigma(u) \tag{1}$$

(intégrale de Stieltjès) où $J(t, \tau)$ est la fonction fluage (t instant d'observation, τ instant de chargement).

Si on discrétise l'axe des temps, on aura pour l'instant t_r , en appliquant à (1) la formule des trapèzes dans chaque intervalle (t_{r-1}, t_r) :

à l'instant t_r :

$$\varepsilon(t_r) - \varepsilon^0(t_r) = \sum_{s=2}^r \frac{1}{2} [J(t_r, t_s) + J(t_r, t_{s-1})] \times [\sigma(t_s) - \sigma(t_{s-1})] \tag{2}$$

à l'instant t_{r-1} :

$$\varepsilon(t_{r-1}) - \varepsilon^0(t_{r-1}) = \sum_{s=2}^{r-1} \frac{1}{2} [(J(t_{r-1}, t_s) + J(t_{r-1}, t_{s-1})) \times [\sigma(t_s) - \sigma(t_{s-1})]] \tag{3}$$

Pour un chargement instantané en t_m , on posera $t_{m+1} = t_m$ dans $J(t, \tau)$.

La différence (2)-(3) s'écrit :

$$[\varepsilon(t_r) - \varepsilon(t_{r-1})] - [\varepsilon^0(t_r) - \varepsilon^0(t_{r-1})] = \frac{1}{2} [(J(t_r, t_r) + J(t_r, t_{r-1})) [\sigma(t_r) - \sigma(t_{r-1})]] + \frac{1}{2} \sum_{s=2}^{r-1} [J(t_r, t_s) + J(t_r, t_{s-1}) - J(t_{r-1}, t_s) - J(t_{r-1}, t_{s-1})] [\sigma(t_s) - \sigma(t_{s-1})] \tag{4}$$

Cette formule fait apparaître les incréments de σ et ε par

$$\Delta x_r = x(t_r) - x(t_{r-1}) \tag{5}$$

Le terme sous le signe \sum au deuxième membre est une combinaison linéaire des incréments $\Delta \sigma_s$ aux intervalles Δt_s antérieurs à l'intervalle de temps actuel Δt_r . On peut faire passer ce terme au 1^{er} membre et l'assimiler à un incrément de déformation libre fictif qui s'ajoute à l'incrément de dilatation libre réel $\Delta \varepsilon_r^0$.

En notant $\Delta \varepsilon_r''$ l'incrément de dilatation libre total qui en résulte, (4) peut s'écrire, avec des notations évidentes :

$$\Delta \varepsilon_r - \Delta \varepsilon_r'' = J_r'' \Delta \sigma_r \tag{6}$$

avec

$$J_r'' = \frac{1}{2} (J_{r,r} + J_{r,r-1}) \tag{7}$$

$$\Delta \varepsilon_r'' = \Delta \varepsilon_r^0 + \sum_{s=2}^{r-1} \frac{1}{2} (J_{r,s} + J_{r,s-1} - J_{r-1,s} - J_{r-1,s-1}) \Delta \sigma_s \tag{7 bis}$$

Ceci est une loi de comportement portant sur les incréments de contraintes et déformations et qui a perdu le caractère héréditaire : la forme est la même que dans le cas élastique. De même que dans ce cas, on peut donc inverser immédiatement par rapport à $\Delta \sigma_r$ et écrire :

$$\Delta \sigma_r = E_r'' (\Delta \varepsilon_r - \Delta \varepsilon_r'') ; \quad E_r'' = 1/J_r'' \tag{8}$$

Les formules (6) et (7) sont des lois de comportement incrémentales qui peuvent donc être introduites dans un problème quelconque (l'une ou l'autre suivant la commodité).

En faisant pour le premier pas $\Delta t_2 = t_2 - t_1$ (origine en t_1) :

$$\Delta \varepsilon_2'' = \Delta \varepsilon_2^0 = \varepsilon^0(t_2) \tag{9}$$

on pourra résoudre le problème pour chaque pas de proche en proche.

3. APPLICATION AUX MULTILAMES VISCO-ÉLASTIQUES VIEILLISSANTS

L'application de la loi de comportement incrémentale sous sa forme (8) permet de traiter le problème des multilames, sous forme incrémentale, de façon tout à fait analogue au cas élastique, traité par exemple en [6].

3.1. Calcul des contraintes et déformations

Les équations de base du multilame sont, pour la cote z et à l'instant t :

linéarité des déformations sur l'épaisseur (et continuité) :

$$\varepsilon(z, t) = A(t) + z B(t) \tag{10}$$

équilibre des contraintes et de leurs moments

$$n(z, t) = \int_{z_1}^{z_2} \sigma(z, t) dz \tag{11}$$

$$m(z, t) = \int_{z_1}^{z_2} \sigma(z, t) z dz \tag{12}$$

Ces équations sont valables à tout instant t .

Par différence entre deux instants t_r et t_{r-1} , on aura donc :

$$\Delta \varepsilon_r = \Delta A_r + z \Delta B_r, \quad (13)$$

$$\Delta n_r = \int_{z_1}^{z_2} \Delta \sigma_r dz, \quad (14)$$

$$\Delta m_r = \int_{z_1}^{z_2} \Delta \sigma_r z dz. \quad (15)$$

L'introduction de la loi de comportement (8) et de l'équation (13) dans (14) et (15) donne :

$$\begin{aligned} \Delta n_r &= \int_{z_1}^{z_2} (E_r'' \Delta A_r + z E_r'' \Delta B_r) dz \\ &\quad - \int_{z_1}^{z_2} E_r'' \Delta \varepsilon_r'' dz, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Delta m_r &= \int_{z_1}^{z_2} (z E_r'' \Delta A_r + z^2 E_r'' \Delta B_r) dz \\ &\quad - \int_{z_1}^{z_2} z E_r'' \Delta \varepsilon_r'' dz, \end{aligned} \quad (17)$$

où E'' prend successivement les valeurs E_{ir}'' quand on passe d'une lame i à l'autre.

Les termes de droite dans (16) et (17) sont en $\Delta \varepsilon_r''(z)$ et $z \Delta \varepsilon_r''(z)$ respectivement. Pour chaque lame i , $\Delta \varepsilon_r''(z)$ est lui-même fonction linéaire de z , de la forme :

$$\Delta \varepsilon_{ir}''(z) = \Delta \alpha_{ir} + z \Delta \beta_{ir} = \overline{\Delta \varepsilon_{ir}''} + (z - z_i) \Delta \beta_{ir},$$

où

$$\overline{\Delta \varepsilon_{ir}''} = \Delta \varepsilon_{ir}''(z_i) = \Delta \alpha_{ir} + z_i \Delta \beta_{ir}.$$

En effectuant les intégrations sur la section des multilames (i. e. entre z_1 et z_2), il vient :

$$\begin{aligned} \Delta n_r &= \Delta A_r \sum_i S_i E_{ir}'' \\ &\quad + \Delta B_r \sum_i S_i z_i E_{ir}'' - \sum_i S_i E_{ir}'' \overline{\Delta \varepsilon_{ir}''}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \Delta m_r &= \Delta A_r \sum_i S_i z_i E_{ir}'' + \Delta B_r \\ &\quad \times \sum_i (I_i + S_i z_i^2) E_{ir}'' \\ &\quad - \sum_i S_i z_i E_{ir}'' \overline{\Delta \varepsilon_{ir}''} - \sum_i I_i E_{ir}'' \Delta \beta_{ir}, \end{aligned} \quad (19)$$

où les notations sont celles de [1], z_i étant l'ordonnée du centre d'inertie de la lame i et où :

$$\begin{aligned} \Delta \beta_{ir} &= \frac{1}{2} \sum (J_{r,s} + J_{r,s-1} \\ &\quad - J_{r-1,s} - J_{r-1,s-1}) E_i'' (\Delta B_s - \Delta \beta_{is}). \end{aligned} \quad (19 \text{ bis})$$

De même que dans le cas élastique, on découple la

résolution en faisant, ici à chaque pas Δt_r , un changement d'origine tel que

$$\sum E_{ir}'' S_i h_{ir} \equiv \sum E_{ir}'' (z_i - z_{0r}) = 0, \quad (20)$$

ce qui définit z_{0r} par

$$z_0 = \frac{\sum E_{ir}'' S_i z_i}{\sum E_{ir}'' S_i}; \quad h_{ir} = z_i - z_{0r}. \quad (21)$$

On a alors finalement, pour la déformation ΔA_r en z_{0r} et la courbure ΔB_r :

$$\Delta A_r = \frac{\Delta n_r + \sum_i E_{ir}'' S_i \overline{\Delta \varepsilon_{ir}''}}{\sum_i E_{ir}'' S_i}, \quad (22)$$

$$\Delta B_r = \frac{\Delta m_r + \sum_i E_{ir}'' S_i h_{ir} \overline{\Delta \varepsilon_{ir}''} + \sum_i E_{ir}'' I_i \Delta \beta_{ir}}{\sum_i E_{ir}'' (I_i + S_i h_{ir}^2)}. \quad (23)$$

On reconnaît, à un terme supplémentaire près, les formules bien connues pour les multilames élastiques [6] exprimées ici de façon incrémentale, et faisant intervenir les dilatations libres totales (réelles et fictives) de chaque lame. Celles-ci interviennent sous forme d'un terme en $\overline{\Delta \varepsilon_{ir}''}$ qui représente la dilatation libre moyenne dans chaque lame, et d'un terme en $\Delta \beta_{ir}$ qui tient compte de ce que les dilatations libres fictives ne sont pas constantes sur l'épaisseur de chaque lame, mais varient linéairement avec la cote (il en serait de même dans ce cas pour le multilame élastique).

On en tire immédiatement les contraintes et déformations par

$$\Delta \varepsilon_r = \Delta A_r + y \Delta B_r, \quad (24)$$

avec

$$y = z - z_0 \quad (25)$$

et, pour la lame i ,

$$\Delta \sigma_{ir} = E_{ir}'' (\Delta \varepsilon_r - \Delta \varepsilon_{ir}''). \quad (26)$$

En particulier, pour le centre d'inertie de la lame i , on a :

$$\overline{\Delta \varepsilon_{ir}''} = \Delta A_r + h_i \Delta B_r, \quad (27)$$

$$\overline{\Delta \sigma_{ir}} = E_{ir}'' (\overline{\Delta \varepsilon_{ir}''} - \Delta \varepsilon_{ir}''). \quad (28)$$

En appliquant (28) aux incréments Δt_s antérieurs à Δt_r , on peut donc calculer à tout instant la valeur de $\overline{\Delta \varepsilon_{ir}''}$, qui dépend comme nous l'avons vu de $\Delta \varepsilon_{ir}^0$ et de l'ensemble des $\overline{\Delta \sigma_{is}}$.

3.2. Calcul des flèches. Principe

Les résultats précédents donnent accès au calcul des flèches instantanées et différées pour un programme quelconque de variation des chargements extérieurs et des dilatations libres (gonflements ou retraits) de chaque matériau entrant dans la constitution du multilame.

Il est toutefois nécessaire de dissocier les divers types de sollicitation suivant leur dépendance par rapport à x .

En effet, les calculs du paragraphe 3.1 précédent sont valables pour chaque section x en y introduisant les valeurs des sollicitations qui correspondent à cette section.

Par contre, le calcul d'une flèche demande une double intégration de la courbure ΔB_r , par rapport à x sur toute la portée.

On peut alors procéder de deux façons :

(a) répéter le calcul complet pour un nombre suffisant de sections et sommer numériquement à la fin;

(b) séparer les diverses contributions, et ne faire le calcul de façon séparée, que pour une section, la double intégration en x se faisant ensuite de façon analytique pour chaque contribution séparée; la flèche totale s'obtient alors par addition des flèches partielles (à cause de la linéarité : principe de superposition).

La méthode *b* est nettement plus économique sur le plan numérique, et c'est celle que nous adoptons.

L'équation générale pour la flèche $f(x)$ dans la section x est, à tout instant t :

$$-\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = B(x, t), \quad (29)$$

où B est la courbure.

On a donc, entre deux instants t_r et t_{r-1} :

$$-\frac{\partial^2 \Delta f_r(x)}{\partial x^2} = \Delta B_r(x). \quad (30)$$

On obtient $\Delta f_r(x)$ par double quadrature dès que l'on connaît la variation de ΔB_r , avec x . Connaissant le résultat de cette intégration, on peut alors calculer Δf_r , pour toute section particulière choisie.

Nous étudierons ici le cas particulier (important pour la pratique) d'une poutre sur appuis simples soumise (outre un moment constant, une charge axiale et des dilatations libres) à une charge transversale uniformément répartie.

3.3. Flèche d'un multilame sous charge transversale uniforme

Considérons un multilame où les matériaux sont sans dilatations libres, et qui est soumis à une charge transversale uniforme $q(t)$. Nous notons par l'indice 1 les sollicitations relatives à ce cas de charge particulier.

3.3.1. Flèche à mi-portée pour une portée fixe

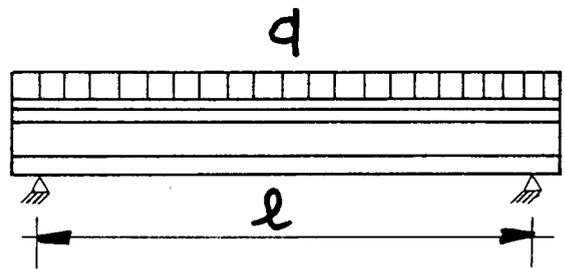
Le système étant (extérieurement) isostatique, le moment m_1 dans une section d'abscisse x est donné, suivant la formule classique [3], par :

$$m_1(x, t) = \frac{1}{2} x(l-x) q(t). \quad (31)$$

Entre deux instants t_r et t_{r-1} , on a donc :

$$\Delta m_{1,r}(x) = \frac{1}{2} x(l-x) \Delta q_r. \quad (32)$$

Dans ce cas particulier, on a $\Delta \varepsilon_r^0 \equiv 0$, et par conséquent, d'après (7 bis), les $\Delta \varepsilon_r''(x)$ sont combinaisons linéaires des $\Delta \sigma_{is}(x)$.



Par conséquent, si $\Delta \sigma_{is}(x)$ contient le facteur $1/2 x(l-x)$, il en sera de même, d'après (22), (23), (27) et (28), pour $\Delta \sigma_{i(s+1)}$.

Or ceci est vrai pour $s=2$ puisque l'on a ici $\Delta \varepsilon_{i2}'' = \Delta A_2 = 0$ et que Δm_r , qui reste seul au numérateur de (23), contient ce facteur.

Pour ce mode de sollicitation, tous les $\Delta \sigma_{is}$ contiennent donc $\forall s$ le facteur commun $1/2 x(l-x)$, qui sort donc du signe somme (par rapport à s).

Il en résulte que tous les $\Delta \varepsilon_r''$ contiennent $\forall i$ le facteur commun $1/2 x(l-x)$, qui sort donc du signe somme (par rapport à i).

Par conséquent, $\Delta A_r(x)$ et $\Delta B_r(x)$ contiennent tous deux, dans ce cas particulier, le facteur $1/2 x(l-x)$.

On peut donc écrire :

$$\Delta A_{1,r}(x) = \frac{1}{2} (l-x) \Delta a_r \equiv \frac{4}{l^2} \Delta A_{1,r} \left(\frac{l}{2}\right) x(l-x), \quad (33)$$

$$\Delta B_{1,r}(x) = \frac{1}{2} x(l-x) \Delta b_r \equiv \frac{4}{l^2} \Delta B_{1,r} \left(\frac{l}{2}\right) x(l-x), \quad (34)$$

où Δa_r et Δb_r sont indépendants de x , et exprimés ici par les valeurs de $\Delta A_{1,r}$ et $\Delta B_{1,r}$, à mi-portée.

On a donc, d'après (30) :

$$-\frac{\partial^2 \Delta f_{1,r}(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{2} x(l-x) \Delta b_r. \quad (35)$$

Ceci s'intègre de façon classique, compte tenu des conditions aux limites

$$\Delta f_r(0) = \Delta f_r(l) = 0 \quad (36)$$

en

$$\Delta f_{1r}(x) = \frac{-4}{l^2} \Delta B_{1r} \left(\frac{l}{2} \right) \left[\frac{l^3}{12} x - \frac{l}{6} x^3 + \frac{x^4}{12} \right]. \quad (37)$$

A mi-portée, on a donc :

$$\Delta f_{1r} \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{5}{48} l^2 \Delta B_{1r} \left(\frac{l}{2} \right). \quad (38)$$

Dans la suite, on notera par un astérisque les quantités à mi-portée.

On a donc :

$$\Delta f_{1r}^* = \frac{5}{48} l^2 \Delta B_{1r}^*. \quad (39)$$

3.3.2. Influence de la portée sur la flèche

Le calcul précédent est valable pour une portée bien définie. On peut penser que, lorsque l'on prend la même structure avec une autre portée, il est nécessaire de recommencer tout le processus de calcul itératif.

Nous allons voir que c'est inutile, et que l'on n'a besoin d'effectuer la partie itérative du calcul que pour une seule portée, le résultat pour les autres portées s'en déduisant par une formule simple.

Notons $y^*[l]$ une quantité y relative à l'abscisse $l/2$ d'une travée de portée l .

On a

$$\Delta m_{1r}^*[l] = \frac{l^2}{8} \Delta q_{1r} = l^2 \Delta m_{1r}^*[1]. \quad (40)$$

Par conséquent, on aura successivement :

$$\Delta \sigma_{1s}^*[l] = l^2 \Delta \sigma_{1s}^*[1], \quad (41)$$

$$\Delta B_{1r}^*[l] = l^2 \Delta B_{1r}^*[1], \quad (42)$$

$$\Delta f_{1r}^*[l] = l^4 \Delta f_{1r}^*[1]. \quad (43)$$

Il suffit donc de faire l'ensemble des calculs itératifs pour une portée égale à l'unité (par exemple 1 m), pour en déduire ensuite par (43) le résultat pour toutes les portées.

On calculera donc successivement :

$$\Delta f_{1r}^*[1] = \frac{5}{48} \Delta B_{1r}^*[1], \quad (44)$$

$$\Delta f_{1r}^*[1] = l^4 \Delta f_{1r}^*[1]. \quad (45)$$

Ceci n'est bien entendu valable que pour ce mode 1 de chargement, où la courbure dépend de x par une fonction en $x(l-x)$.

3.3.3. Flèche d'un multilame sous courbure constante

Les autres modes de sollicitation considérés ici ayant une influence sur la flèche sont :

- moment constant (par exemple moment sur appuis supposés connus);
- charge axiale excentrée (les effets du second ordre étant négligés);
- dilatations libres des matériaux (pour un multilame non symétrique).

Tous ces modes de chargement ont en commun de conduire à une courbure constante, i.e. indépendante de x (pour la charge axiale excentrée, cela n'est vrai qu'à l'approximation du 1^{er} ordre, où l'on suppose la flèche négligeable devant l'excentricité).

Du point de vue du calcul des flèches, on peut donc grouper en un seul mode, le mode 2, tous ces types de sollicitation.

On a ainsi successivement, en suivant le même processus que précédemment :

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta f_{2r}(x) = \Delta B_{2r} = \text{Cte}, \quad (46)$$

ce qui donne, compte tenu des appuis simples en 0 et l :

$$\Delta f_{2r}(x) = \frac{1}{2} \Delta B_{2r} x(l-x), \quad (47)$$

$$\Delta f_{2r} \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{l^2}{8} \Delta B_{2r}. \quad (48)$$

Ceci est une flèche comptée positive vers le haut. Si on la prend positive vers le bas (alors que les excentricités sont comptées positives vers le haut), on aura, au milieu d'une travée de portée l :

$$\Delta f_{2r} \left(\frac{l}{2} \right) = -\frac{l^2}{8} \Delta B_{2r}, \quad (49)$$

ΔB_{2r} est indépendant de x , et l'est aussi de la portée.

De même que précédemment, on pourra déduire les résultats, pour des portées diverses l , de ceux obtenus en pratiquant l'itération pour la seule portée égale à l'unité. On aura ainsi finalement :

$$\Delta f_{2r}^*[1] = -\frac{1}{8} \Delta B_{2r}^*[1], \quad (50)$$

$$\Delta f_{2r}^*[l] = l^2 \Delta f_{2r}^*[1], \quad (51)$$

avec

$$\Delta A_{2r} = \frac{\Delta n_r + \sum_i E_{ir}'' S_i \overline{\Delta \varepsilon_{i2r}''}}{\sum_i E_{ir}'' S_i}, \quad (52)$$

$$\Delta B_{2,r} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} \Delta m_{2,r} + \sum_i E''_{ir} S_i h_{ir} \Delta \varepsilon''_{i2,r} \\ + \sum_i E''_{ir} I_i \Delta \beta_{i2,r} \end{array} \right\}}{\sum_i E''_{ir} (I_i + S_i h_i^2)}, \quad (53)$$

où $\Delta m_{2,r}$ est indépendant de x et

$$\overline{\Delta \varepsilon''_{i2,r}} = \Delta \varepsilon_{ir}^0 + \frac{1}{2} \sum_{s=2}^{r-1} \times (J_{ir,s} + J_{ir,s-1} - J_{ir-1,s} - J_{ir-1,s-1}) \overline{\Delta \sigma_{is}}, \quad (54)$$

$$\overline{\Delta \sigma_{is}} = E''_{is} (\overline{\Delta \varepsilon_{i2,s}} - \overline{\Delta \varepsilon''_{i2,s}}), \quad (55)$$

$$\overline{\Delta \varepsilon_{i2,s}} = \Delta A_{2,s} + h_i \Delta B_{2,s} \quad (56)$$

qui se calculent de proche en proche à partir de

$$\overline{\Delta \varepsilon''_{i2}} = \Delta \varepsilon_{i2}^0 \quad (57)$$

et où

$$E''_{is} = \frac{2}{J_{is,s} + J_{is,s-1}}. \quad (58)$$

4. PRISE EN COMPTE DE LA PRÉCONTRAÎNTE ET CALCUL DES PERTES DE PRÉCONTRAÎNTE

Rappelons que la précontrainte par fils ou câbles (qui se détendent lorsque le béton flue ou prend du retrait) ne peut être considérée comme une force restant constante dans le temps. Nous avons montré en [4] que pour prendre en compte correctement la précontrainte et son évolution dans le temps, il suffit de la considérer comme une dilatation libre initiale de l'acier égale à

$$\varepsilon_a^0 = - \frac{\sigma_{pa}}{E_a},$$

où σ_{pa} est la précontrainte initiale (juste après relâchement des fils) et E_a le module d'élasticité de l'acier.

On peut tenir compte en outre d'une relaxation concomitante de l'acier. Il y a alors lieu d'introduire dans les données la fonction fluage de l'acier, duale de sa fonction relaxation (le cas non vieillissant étant admis comme cas particulier).

5. PROGRAMME MULTIVIBAZ

La théorie précédente a été appliquée à l'élaboration d'un programme de calcul, nommé MULTIVIBAZ, écrit en FORTRAN V UNIVAC ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ La rédaction et la mise au point du programme ont été réalisées par J. C. Lebegue, Technicien supérieur au CTTB. Diverses vérifications ont été effectuées par F. Sauvage, Ingénieur Civil des Ponts et chaussées.

Ce programme a été implanté en exploitation publique dans un centre de calcul parisien ⁽²⁾.

Il nous a donné l'occasion d'une amélioration de l'algorithme de Bazant qui conduit à une division par trois du temps de calcul par rapport à la version décrite en [2]. Cet algorithme modifié est décrit en [4], où nous l'avons appliqué à notre méthode d'opérateurs matriciels ([8], [9]).

Lorsque les données comprennent des modes de chargement divers (mode 1 et mode 2), le calcul itératif est effectué sur chacun des modes de façon séparée, les résultats étant ensuite simplement additionnés par application du principe de superposition.

Les résultats relatifs à chacun des modes sont cependant fournis en même temps que le résultat total, ce qui permet d'étudier l'influence respective de ces divers modes.

Les calculs itératifs en mode 1 sont effectués pour une seule portée, égale à 1 m.

Les résultats pour des portées différentes sont édités par commande au niveau des données.

Le programme permet également d'étudier avec précision et sans difficulté particulière des programmes de chargement comportant des discontinuités grâce à une technique de pas logarithmique variable (une nouvelle origine des temps étant prise au niveau de chaque discontinuité, ce qui permet une documentation convenable de l'influence de celle-ci).

Les géométries complexes (produits creux, etc.) sont traitées sans difficulté par décomposition en lames élémentaires à section rectangulaire ou trapézoïdales.

Les changements de géométrie, brusques (clavages) ou progressifs (reprises de bétonnage) sont pris en compte automatiquement par équation à zéro des modules élastiques des éléments de structure non présents antérieurement, et application de la même technique de pas variable.

Un jeu de cartes PARAMETER à la disposition de l'utilisateur permet d'optimiser le nombre de lames, de matériaux et de pas de temps en fonction du problème considéré et des possibilités de l'ordinateur.

Les résultats sont édités à des temps fixés par l'utilisateur.

A titre d'exemple des coûts du programme, le calcul d'un plancher à poutrelles céramiques et béton précontraint préfabriqué, avec dalle de compression en béton armé coulé en œuvre sur entrevous céramiques (structure décomposée en 14 lames, 5 matériaux, dont 3 visco-élastiques et vieillissants), étudié entre 1 jour et 10 ans (45 pas de temps, édition des résultats pour 20 valeurs du temps) nécessite environ 36 secondes d'ordinateur UNIVAC 1108 pour 120 pages éditées, soit un prix de revient de l'ordre de 200 FHT.

⁽²⁾ Toute personne désireuse d'utiliser ce programme peut le faire en demandant les renseignements et le manuel d'utilisation au CTTB, 17, rue Letellier, 75015 Paris.

Un exemple de résultats est fourni en annexe sous forme d'un graphique.

6. CONCLUSION

La formulation générale présentée dans la première partie de cet article permet au programme MULTIVIBAZ d'effectuer des calculs de redistribution de contrainte dans des structures composites extérieurement isostatiques (bien qu'intérieurement hyperstatiques) sans qu'il y ait lieu de procéder à une nouvelle mise en équation dans chaque cas particulier, alors même que ce problème est souvent considéré comme insoluble en dehors de cas très simples.

Le programme s'applique quel que soit le nombre de lames et de matériaux en présence (dans les limites compatibles avec les possibilités de l'ordinateur, suffisantes pour la plupart des cas pratiques). Un grand nombre de matériaux visco-élastiques, vieillissants ou non, et éventuellement mis en œuvre à des âges différents, peuvent être présents simultanément et présenter au cours du temps des variations dimensionnelles arbitraires et propres à chacun.

Ce programme a déjà donné lieu à des applications diverses telles que flèches différées et pertes de pré-contraintes dans des planchers composites, contraintes induites par les variations dimensionnelles gênées dans les enduits multicouches sur maçonneries, contraintes et déformations induites par les gradients de retrait dans des éprouvettes de fluage.

La comparaison des résultats obtenus avec ceux fournis par l'hypothèse du comportement élastique (programmes CTTB de la série MULTILAMEL) a montré la grande importance que prennent, pour l'évolution des contraintes et déformations dans les structures composites à base de béton, mortiers, etc., les comportements visco-élastiques et vieillissants présentés par ces matériaux.

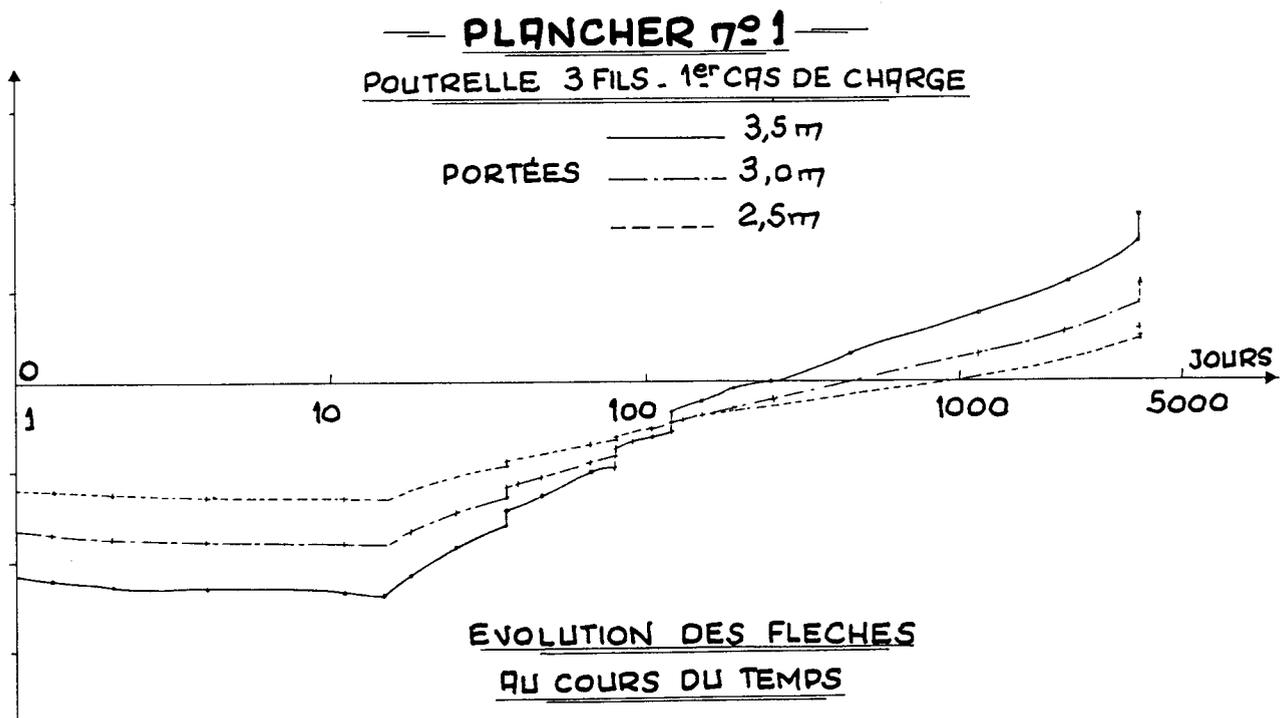
L'application de l'algorithme de Bazant modifié (et généralisé [4]) à notre méthode d'opérateurs matriciels ([8], [9], [12]) a été réalisée par F. Sauvage [11]. Ceci permet d'envisager l'application numérique effective aux structures extérieurement hyperstatiques (ossatures, poutres continues ou à béquilles, plaques composites en flexion cylindrique) des divers formalismes décrits en [4].

Elle permet également d'aborder par une nouvelle méthode (également décrite en [4]) le problème des multilames traité ici.

Enfin, le présent programme peut être utilisé, au moins dans une première approche bidimensionnelle, pour étudier le comportement macroscopique de matériaux composites (stratifiés, fibrés, etc.) à constituants visco-élastiques.

Il peut également être utilisé pour étudier la réponse d'une structure visco-élastique hétérogène soumise à un programme donné d'environnement variable (variations de températures, d'hygrométrie, etc.) lorsque (cas le plus fréquent) les propriétés (fonction fluage, variations dimensionnelles, etc.) des matériaux constitutifs sont sensibles à l'environnement, mais que l'on connaît la réponse de chacun des matériaux à une contrainte échelon sous ce programme d'environnement.

ANNEXE



RÉFÉRENCES

- [1] HUET C. — *Sur l'évolution des contraintes et déformations dans les systèmes multicouches constitués de matériaux visco-élastiques présentant du vieillissement*. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, série A, 1970, p. 213-215.
- [2] BAZANT Z. P. — *Numerical determination of stress response to a given strain history in concrete*. Bulletin d'information du Comité Européen du Béton, n° 80, février 1972; cf. aussi revue RILEM, n° 5, 1972.
- [3] TIMOSHENKO. — *Résistance des matériaux*, tome 1.
- [4] HUET C. — *Contributions à une théorie de la durabilité des constructions*. Publication CTTB/CSTB, Paris, 1975.
- [5] Commission chargée de formuler des avis techniques, Groupe spécialisé n° 3, Structures, Ossatures, Charpentes. Cahier des Prescriptions techniques communes aux Planchers. Additif aux règles de calcul des planchers à poutrelles préfabriquées en béton précontraint par armatures adhérentes et table de compression en béton armé coulé *in situ* (calcul des flèches actives).
- [6] HUET C. — *Bases pour l'étude des effets différés dans les structures céramiques béton*. Terre Cuite Informations Techniques n° 54, 3^e trimestre 1972.
- [7] HUET C. — *Formules de base pour l'évolution des contraintes et déformations dans les complexes céramique-béton*. 3^e Congrès International sur les Maçonneries en briques, Essen; avril 1973.
- [8] HUET C. — *Opérateurs intégrodifférentiels matriciels pour l'étude des systèmes à réponse différée présentant du vieillissement*. C. R. Acad. Sc., t. 278, série A, 22 vril 1976, p. 1119-1122.
- [9] HUET C. — *Opérateurs matriciels en viscoélasticité linéaire avec vieillissement et application aux structures visco-élastiques hétérogènes*. Symposium IUTAM sur la visco-élasticité, Göteborg, 1974.
- [10] GAUCHER C. — Thèse de Docteur-Ingénieur de l'ENPC, Paris (en préparation au LCPC, Paris).
- [11] SAUVAGE F. — *Rédaction et mise au point d'un ensemble de sous-programmes devant permettre l'application de la méthode des opérateurs au calcul des structures hétérogènes comportant un ou plusieurs matériaux visco-élastiques linéaires avec vieillissement*. Travail de fin d'étude, École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1978.
- [12] HUET C. — *Opérateurs matriciels pour la viscoélasticité avec vieillissement*. Cahiers du Groupe Français de Rhéologie, t. 4, n° 6-15, juin 1978 (Revue de l'Industrie Minérale, n° spécial).

SUMMARY

Adaptation of Bazant algorithm to calculation of ageing visco-elastic multi-layered systems. — *The author restates a numerical algorithm defined by Bazant to solve Volterra equations of linear visco-elasticity with ageing. This algorithm is applied to step by step calculation of the development of mean deformation and curvature in a heterogeneous structure of the multi-strip type (stratified or fibrous which can be likened to heterogeneous beams loaded in a symmetrical plane retaining plane cross-sections). Stresses and deformations are calculated step*

by step in each strip at the interfaces. The deflexions in a cross section for different spans are expressed in terms of a typical span divided into two cases of practical importance: parabolic curvature (uniform transverse load) and constant curvature (constant moment, eccentric axial load without second order effects; dimensional variations in materials used). The prestressing is taken into account in the general formalism through the attribution to the steel of a predeformation equal to the opposite of the quotient of the initial prestress to its instantaneous modulus of elasticity. The article concludes with practical indications on the MULTIVIBAZ program and example of results.