

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	Problématique	5
1.2	Plan du travail	8
1.2.1	Spectre du Laplacien (chapitres 2 et 3)	8
1.2.2	Applications (chapitres 4 et 5)	11
1.2.3	Exemples et résultats numériques (chapitre 6)	14
1.2.4	Manuel d'utilisation (chapitre 7)	16
1.3	Notations et prérequis	16
1.3.1	Domaines et surfaces	16
1.3.2	Espaces de Sobolev	17
1.3.3	Théorie spectrale abstraite	18
1.3.4	Spectre du Laplacien	18
2	Analyse numérique du spectre du Laplacien	21
2.1	Formulation variationnelle du problème au valeurs propres	21
2.2	Méthode de Galerkin	23
2.3	Eléments finis	26
2.3.1	Eléments finis de Lagrange	26
2.3.2	Eléments finis simpliciaux	28
2.3.3	Méthode des éléments finis pour les domaines euclidiens	29
2.3.4	Méthode des éléments finis pour les domaines de coques	33
2.3.5	Méthode des éléments finis pour les domaines de surfaces	35
3	Résolution numérique	39
3.1	Maillage par macro-éléments	40
3.1.1	Macro-éléments de type quadrilatère	40
3.1.2	Macro-éléments de type quadrilatères à une face courbe	41
3.1.3	Macro-éléments de type triangle	42
3.1.4	Généralisation à des macro-éléments ayant plusieurs faces courbes	43
3.2	Traitements de triangulation	44
3.2.1	Renumérotation	44
3.2.2	Raffinement	45
3.3	Maillage de Delaunay	47

3.3.1	Appartenance d'un point au cercle circonscrit d'un triangle	50
3.3.2	Indice d'un point par rapport à une courbe	51
3.4	Maillage mixte	55
3.5	Calcul matriciel	55
3.5.1	Construction des matrices de rigidité et de masse	57
3.5.2	Construction des matrices locales	58
3.5.3	Intégration numérique	59
3.6	Résolution du problème aux valeurs propres matriciel	61
3.6.1	Méthode de la puissance	61
3.6.2	Méthodes de projection	63
3.6.3	Méthode des sous-espaces de Krylov	63
3.6.4	Algorithme de Lanczos	64
4	Problèmes d'anses fines	67
4.1	Énoncé du théorème	68
4.2	Preuve du théorème sous hypothèses fortes	72
4.2.1	Convergence d'une sous-suite de valeurs propres	73
4.2.2	Convergence faible d'une sous-suite de fonctions propres	74
4.2.3	Identification du problème limite sur Ω_1	75
4.2.4	Convergence forte des fonctions propres sur Ω_1	77
4.2.5	Identification du problème limite sur Ω_2	77
4.2.6	Convergence forte des fonctions propres sur Ω_2	78
4.2.7	Identification des solutions limites	79
4.2.8	Convergence de la suite entière de valeurs et fonctions propres	82
4.3	Preuve du théorème sous hypothèses faibles	82
4.4	Métrique non euclidienne	84
5	Optimisation de forme	85
5.1	Méthode de variation du bord	86
5.2	Dérivée normale d'une fonction propre de Dirichlet	90
5.2.1	Calcul matriciel	90
5.2.2	Construction des matrices	91
5.3	Changement de topologie des domaines	92
6	Exemples et résultats numériques	95
6.1	Premiers exemples	96
6.1.1	Carré, cylindre et tores	96
6.1.2	Disque et sphères	106
6.2	Vérification d'une propriété de symétrie	115
6.2.1	Demi-tores	115
6.2.2	Hémisphères	117
6.3	Domaines isospectraux	118
6.4	Domaines à anses fines	126

6.4.1	Anses planes brutes	127
6.4.2	Autres anses	130
6.5	Domaines optimaux	133
6.5.1	Présentation générale des domaines optimaux	135
6.5.2	Présentation détaillée des domaines optimaux	138
7	Manuel d'utilisation	151
7.1	Procédures générales	154
7.2	Maillage par macro-él. et traitements de triangulation	155
7.2.1	Définition du domaine	156
7.2.2	Maillage par macro-éléments	157
7.2.3	Fichier de conditions au bord	157
7.2.4	Assemblage de triangulations	157
7.2.5	Renumérotation	158
7.2.6	Raffinement	158
7.2.7	Fichier de visualisation	159
7.3	Maillage de Delaunay	160
7.4	Résolution du problème de Poisson	162
7.5	Résolution du problème aux valeurs propres	162
7.6	Procédures d'utilisation générale	164
7.7	Calcul de la dérivée normale d'une fonction propre de Dirichlet	166
7.8	Optimisation de forme	167
7.9	Quelques remarques géom. concernant la métrique	171