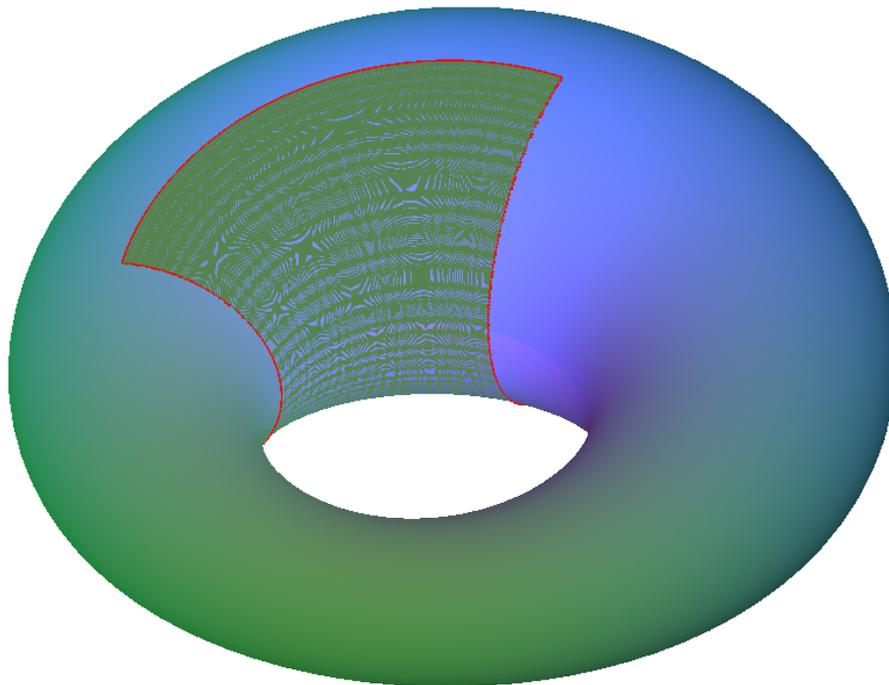


ABIDAT Sofiane
BERCHER Matthieu
ROBILLARD Damien

MIGS 2

CONVERTION D'UN CARREAU DE
BEZIER EN CARREAU DE CYCLIDE DE
DUPIN

Projet de CAO II



Université de Bourgogne
Année 2008 - 2009

Table des matières

1	Introduction	2
2	Notations utilisées	3
3	Caractérisation d'une cyclide de Dupin en fonction de ses cercles de courbure	4
3.1	Cercles opposés parallèles et non principaux	4
3.2	Cercles opposés non parallèles deux à deux	4
4	Construction des points de contrôle et des poids du CBRB	5
4.1	Algorithme de conversion de M. Ueda	5
4.2	Construction du CBRB convertible en CD4	6
4.2.1	Algorithme de construction : algorithme 1	6
4.2.2	Détails de l'algorithme	7
5	Algorithmes de conversion	9
5.1	Conversion d'un CBRB en tore ou sphere	9
5.1.1	Algorithme	9
5.1.2	Détails de l'algorithme	10
5.2	Conversion d'un CBRB convertible en CD4	13
5.2.1	Algorithme de conversion \mathcal{P}_y	14
5.2.2	Détails de l'algorithme \mathcal{P}_y	15
5.2.3	Algorithme de conversion \mathcal{P}_z	17
5.2.4	Détails de l'algorithme \mathcal{P}_z	18
6	Changement de base	23
7	Manuel d'utilisation et interface graphique	23
8	Conclusion	24
A	Interface graphique	25
B	Bibliographie	27

1 Introduction

Les cyclides de Dupin sont des surfaces étudiées pour la première fois par Dupin en 1822. Elles peuvent servir à représenter divers objets de la vie quotidienne, où à faire des jointures entre plan et cylindre par exemple. Les carreaux de Bézier, eux aussi, sont beaucoup utilisés dans l'industrie, la modélisation 3D... Ce projet consiste donc à utiliser ces deux modèles géométriques et de passer de l'un à l'autre par conversion. Nous verrons plus précisément la conversion d'un carreau de Bézier en carreau de cyclide de Dupin de degré 4.

Une surface peut être représentée principalement à l'aide de deux modèles mathématiques en utilisant soit une équation paramétrique soit une équation implicite. L'utilisation intuitive et la facilité de ne représenter qu'une partie de surface rendent le premier type, dit paramétrique, très populaire, surtout dans des applications industrielles (Bézier, B-Splines, NURBS). Le second type de surface, dit implicite, est très employé dans des applications de lancer de rayon, d'illumination de surface, de calcul d'intersection ou de détermination de l'intérieur d'objets délimités par leurs bords. Ainsi, il est essentiel pour la modélisation géométrique d'avoir des objets mathématiques possédant à la fois une équation paramétrique et une équation implicite si possible algébrique. Il est intéressant d'obtenir une équation implicite de degré peu élevé afin de limiter la taille des calculs, ce qui est le cas des cyclides de Dupin.

Pour créer et visualiser de telles surfaces, nous avons développé un logiciel interactif de conversion. Pour cela, nous avons programmé en C/C++ en utilisant la librairie graphique OpenGL et la bibliothèque d'interface graphique Qt.

2 Notations utilisées

Nous avons introduit les notations suivantes :

CD4 est une cyclide de Dupin de degré 4.

CD4A est une cyclide de Dupin de degré 4 en anneau.

CD4E est une cyclide de Dupin de degré 4 à croissant externe.

CD4I est une cyclide de Dupin de degré 4 à croissant interne.

CBRB est un Carreau de Bézier Rationnel Biquadratique.

CBRBCCD4 est un carreau de Bézier Rationnel Biquadratique Convertible en Cyclide de Dupin de degré 4.

CBRQ : Courbe de Bézier Rationnelle Quadratique.

$RQBC\{(P_0; P_1; P_2), (w_0; w_1; w_2)\}$: courbe de Bézier rationnelle quadratique de points de contrôle $(P_0; w_0), (P_1; w_1), (P_2; w_2)$.

3 Caractérisation d'une cyclide de Dupin en fonction de ses cercles de courbure

Avant de construire une cyclide de Dupin à partir d'un CBRB, nous avons besoin de savoir de quel type est la cyclide de Dupin. Pour cela, nous allons nous servir des quatre cercles (opposés deux à deux) définis par les courbes bordant le CBRB. On peut distinguer deux cas :

- si deux cercles opposés sont parallèles et non principaux
- si les cercles opposés ne sont pas parallèles deux à deux

3.1 Cercles opposés parallèles et non principaux

Nous obtenons soit un tore de révolution et nous avons dans ce cas $c = 0$, soit une sphère double, nous avons $a = c = 0$ et les deux autres cercles ont un diamètre en commun. Dans le cas contraire, si les deux autres cercles sont disjoints, nous obtenons un tore à collier. Si les deux autres cercles sont sécants, nous obtenons un tore croisé et les deux points d'intersection de ces deux cercles définissent un des axes du repère de la cyclide de Dupin, figure 1. Si les deux autres cercles sont tangents, nous obtenons un tore à collier nul. Dans tous les cas, les vecteurs \vec{i}_0 et \vec{j}_0 de la base de la cyclide de Dupin sont orthogonaux et appartiennent au plan vectoriel engendré par les deux cercles parallèles. Le troisième vecteur de la base est : $\vec{k}_0 = \vec{i}_0 \times \vec{j}_0$.

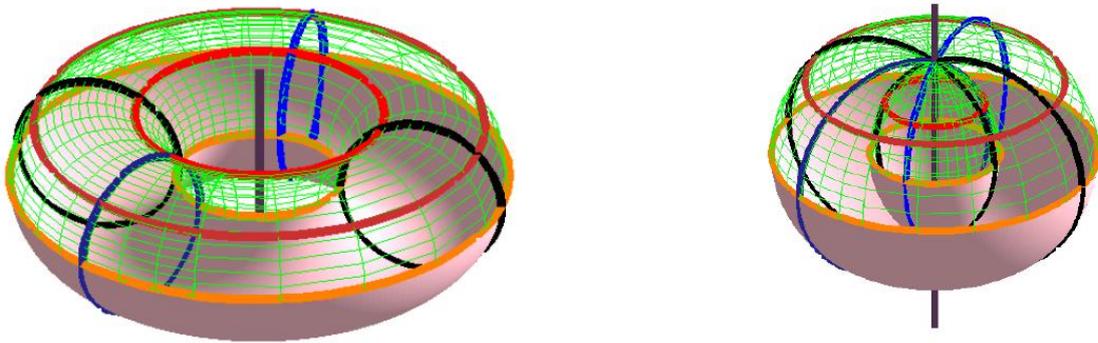


Fig 1 : Cercles de courbure caractérisant le type du tore défini par une cyclide de Dupin. Gauche : tore à collier. Droite : tore croisé.

3.2 Cercles opposés non parallèles deux à deux

Si les cercles opposés (C_3 avec C_4 et C_5 avec C_6) ne sont pas sécants, nous obtenons une CD4A (ring), figure 2. Δ_θ est alors la droite qui coupe les deux disques délimités par deux des quatre cercles. Dans le cas contraire, Δ est la droite définie par l'intersection des deux cercles sécants. Si Δ ne coupe pas les disques définis

par les deux autres cercles, nous obtenons une CD4E (horned) et \vec{j}_0 est un vecteur directeur de $\Delta = \Delta_\psi$. Sinon, nous obtenons une CD4I (spindle) et \vec{k}_0 est un vecteur directeur de $\Delta = \Delta_\theta$. Il suffit de connaître une des deux droites pour connaître l'autre droite.

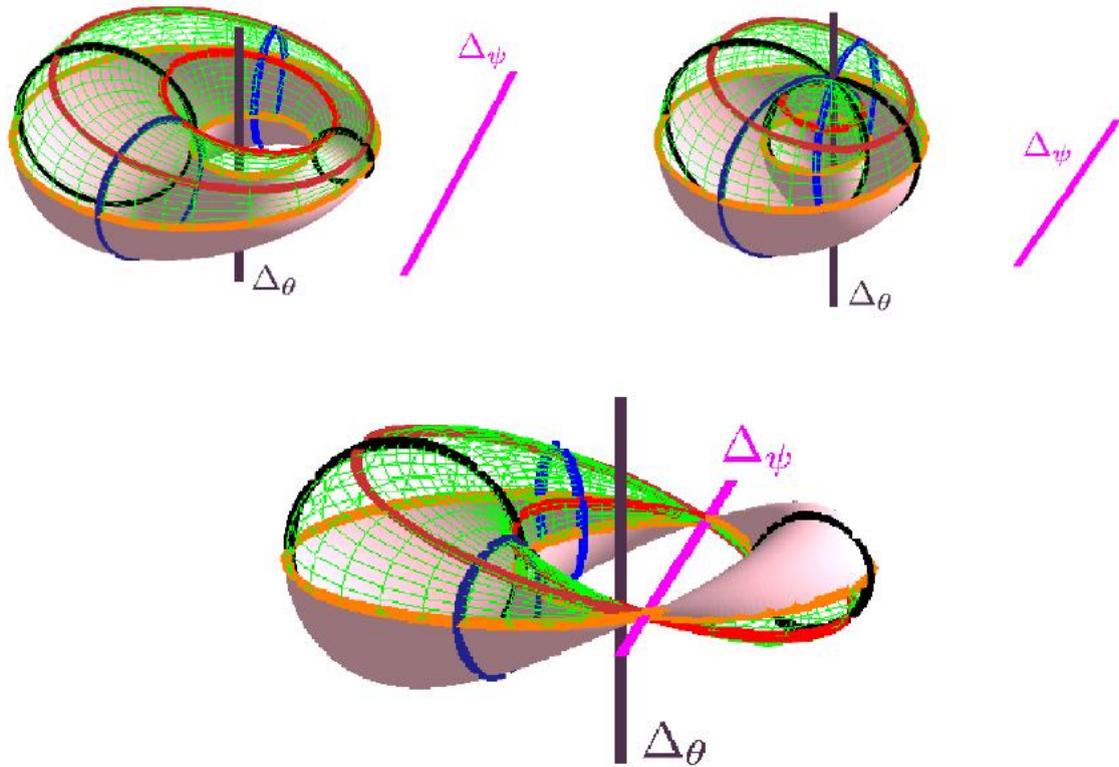


Fig 2 : Cercles de courbure caractérisant le type de la CD4.
Haut à Gauche : CD4A. Haut à droite : CD4I. Bas : CD4E.

4 Construction des points de contrôle et des poids du CBRB

4.1 Algorithme de conversion de M. Ueda

Il a montré que les quatre coins du carreau de cyclide sont cocycliques (PG1); que les courbes coordonnées sont orthogonales entre elles à chaque sommet du carreau (PG3); trois poids de sommets peuvent être égaux à 1 (et même les quatre si les quatre sommets forment un rectangle); le quatrième poids, qui ne dépend que de la position spatiale des quatres sommets, est $w_{22} = 1 - pq$ où :

$$p = \frac{\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_2 - (\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_3) \times \vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2}{\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_3 - (\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_2) \times \vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2}$$

et

$$q = \frac{\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_4 - (\vec{e}_4 \bullet \vec{e}_2) \times \vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2}{\vec{e}_4 \bullet \vec{e}_2 - (\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_4) \times \vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2}$$

$$\text{avec } \vec{e}_1 = \frac{1}{P_{00}P_{20}} \overrightarrow{P_{00}P_{20}}, \vec{e}_2 = \frac{1}{P_{00}P_{02}} \overrightarrow{P_{00}P_{02}}, \vec{e}_3 = \frac{1}{P_{02}P_{22}} \overrightarrow{P_{02}P_{22}}, \vec{e}_4 = \frac{1}{P_{20}P_{22}} \overrightarrow{P_{20}P_{02}}.$$

La deuxième propriété géométrique (PG2) provient des lignes de courbure circulaires, c'est-à-dire : P_{01} appartient au plan médiateur du segment $[P_{00}, P_{02}]$. P_{21} appartient au plan médiateur du segment $[P_{20}, P_{22}]$, P_{10} appartient au plan médiateur du segment $[P_{00}, P_{20}]$ et P_{12} appartient au plan médiateur du segment $[P_{22}, P_{02}]$. En effet, les courbes délimitant le CBRB sont des CBRQs et donc le point de contrôle intermédiaire de chaque courbe doit appartenir au plan médiateur des deux extrémités. Nous rappelons que $\vec{AB} \bullet (\vec{AC} \times \vec{AD}) = 0$ traduit le fait que les quatre points A, B, C et D sont coplanaires. La quatrième propriété géométrique (PG4) traduit le fait que le point P_{11} appartient à l'intersection des quatre plans, chaque plan étant engendré par les autres points du produit mixte. Le tableau 1 ci-dessous récapitule ces propriétés géométriques des points de contrôle $(P_{ij})_{0 \leq i, j \leq 2}$ d'un CBRB obtenu par conversion d'un carreau de CD4.

(PG1)	P_{00}, P_{02}, P_{22} et P_{20} sont cocycliques. $w_{00} = w_{20} = w_{02}$ et $w_{22} = 1 - pq$	
(PG2)	$P_{00}P_{01} = P_{01}P_{02}$, $P_{02}P_{12} = P_{12}P_{22}$, $P_{22}P_{21} = P_{21}P_{20}$ et $P_{00}P_{10} = P_{10}P_{20}$	
(PG3)	$\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \perp \overrightarrow{P_{00}P_{01}}$, $\overrightarrow{P_{02}P_{01}} \perp \overrightarrow{P_{02}P_{12}}$, $\overrightarrow{P_{22}P_{12}} \perp \overrightarrow{P_{22}P_{21}}$ et $\overrightarrow{P_{20}P_{21}} \perp \overrightarrow{P_{20}P_{10}}$	
(PG4)	$\overrightarrow{P_{00}P_{11}} \bullet \left(\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \times \overrightarrow{P_{00}P_{01}} \right) = 0$	$\overrightarrow{P_{02}P_{11}} \bullet \left(\overrightarrow{P_{02}P_{01}} \times \overrightarrow{P_{02}P_{12}} \right) = 0$
	$\overrightarrow{P_{22}P_{11}} \bullet \left(\overrightarrow{P_{22}P_{12}} \times \overrightarrow{P_{22}P_{21}} \right) = 0$	$\overrightarrow{P_{20}P_{11}} \bullet \left(\overrightarrow{P_{20}P_{21}} \times \overrightarrow{P_{20}P_{10}} \right) = 0$

Tableau 1 : Propriétés géométriques d'un CBRB.

4.2 Construction du CBRB convertible en CD4

4.2.1 Algorithme de construction : algorithme 1

Construction des points de contrôle d'un carreau de Bézier rationnel biquadratique convertible en carreau de cyclide de Dupin quartique.

On se place dans l'espace affine euclidien muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Soit C le cercle de centre O et de rayon R dans le plan \mathcal{P} d'équation $(z = 0)$.
2. Soit $\theta_{00}, \theta_{02}, \theta_{20}$ et θ_{22} quatre réels distincts deux à deux modulo π .

Détermination des points :

$$\begin{aligned} P_{00} &= (R \cos(\theta_{00}); R \sin(\theta_{00}); 0) & P_{02} &= (R \cos(\theta_{02}); R \sin(\theta_{02}); 0) \\ P_{20} &= (R \cos(\theta_{20}); R \sin(\theta_{20}); 0) & P_{22} &= (R \cos(\theta_{22}); R \sin(\theta_{22}); 0) \end{aligned}$$

3. Soit $i \in \{0; 2\}$. Calcul des plans médiateurs \mathcal{P}_{i1} (resp. \mathcal{P}_{1i}) du segment $[P_{i0}P_{i2}]$ (resp. $[P_{0i}P_{2i}]$)

4. Choix du point $P_{11}(0; 0; z_{11})$ appartenant à $\mathcal{P}_{01} \cap \mathcal{P}_{10} \cap \mathcal{P}_{12} \cap \mathcal{P}_{21}$.
5. Détermination de $B_{02} \in (P_{00}P_{02}) \cap (P_{20}P_{22})$ et de $A_{02} \in (P_{00}P_{20}) \cap (P_{02}P_{22})$
6. Choix de $P_{10} \in \mathcal{P}_{10} - \{P_{11}\}$ et détermination de $\mathcal{P}_{P_{00}} = Aff\{P_{00}; P_{11}; P_{10}\}$, plan tangent au carreau en P_{00} .
7. Détermination de $P_{01} \in \mathcal{P}_{P_{00}} \cap \mathcal{P}_{01}$ vérifiant :

$$\overrightarrow{P_{00}P_{10}} \bullet \overrightarrow{P_{00}P_{01}} = 0$$

8. Détermination de $P_{21} \in Aff\{P_{20}; P_{11}; P_{10}\} \cap \mathcal{P}_{21}$ vérifiant :

$$\overrightarrow{P_{20}P_{10}} \bullet \overrightarrow{P_{20}P_{21}} = 0$$

9. Détermination de $P_{12} \in Aff\{P_{02}; P_{11}; P_{01}\} \cap \mathcal{P}_{12}$ vérifiant :

$$\overrightarrow{P_{02}P_{01}} \bullet \overrightarrow{P_{02}P_{12}} = 0$$

10. Détermination de $B_{01} \in (P_{00}P_{01}) \cap (P_{20}P_{21})$ et de $A_{01} \in (P_{00}P_{10}) \cap (P_{02}P_{12})$
11. Détermination de $B_{12} \in (P_{01}P_{02}) \cap (P_{21}P_{22})$ et de $A_{12} \in (P_{10}P_{20}) \cap (P_{12}P_{22})$
12. Détermination des droites $\Delta_A = Aff\{A_{02}; A_{12}; A_{01}\}$ et $\Delta_B = Aff\{B_{02}; B_{12}; B_{01}\}$

On obtient en sortie une famille $(P_{ij})_{0 \leq i, j \leq 2}$ des points de contrôle d'un carreau de Bézier rationnel biquadratique pouvant être converti en carreau de cyclide de Dupin.

4.2.2 Détails de l'algorithme

On se donne un CBRB de points de contrôle $(P_{ij})_{0 \leq i, j \leq 2}$ et de poids $(w_{ij})_{0 \leq i, j \leq 2}$ tels que les points vérifient les conditions énoncées dans le tableau 1. De plus, la condition (PG4) est équivalente à :

$$P_{11} \in Aff\{P_{00}; P_{01}; P_{10}\} \cap Aff\{P_{02}; P_{12}; P_{01}\} \cap Aff\{P_{20}; P_{21}; P_{10}\} \cap Aff\{P_{22}; P_{21}; P_{12}\}$$

Pour les poids des sommets du CBRB, nous reprenons la méthode de M. Ueda (Tableau 1). Nous avons aussi $w_{00} = w_{20} = w_{02} = 1$ et $w_{22} = 1 - pq$. Les poids w_{01} , w_{21} , w_{10} , w_{12} sont définis avec $w_{00}w_{21} > 0$ et $w_{10}w_{21} > 0$ grâce au théorème 1.

Les calculs des valeurs de w_{01} , w_{10} , w_{12} et w_{21} sont faites de telle façon que les bords de la surface de Bézier soient des arcs de cercles.

Théorème 1 : *Cercle déterminé par deux points et les tangentes en ces points. Soit C le cercle de centre O_0 et de rayon R passant par P_0 et P_2 et ayant comme tangente (P_0P_1) et (P_2P_1) , les points P_0 , P_1 et P_2 n'étant pas alignés. Soit I_1 le milieu du segment $[P_0P_2]$. Soit P le plan médiateur du segment $[P_0P_2]$. Soit P_c le plan contenant la CBRQ. On impose $(w_0; w_2) \in (\mathbb{R}_*^+)^2$. On pose $w = w_0 + w_2$ et*

$G = \text{bar}\{(P_0, w_0); (P_2, w_2)\}$. La CBRQ $\gamma = RQBC\{(P_0; P_1; P_2), (w_0; w_1; w_2)\}$ est un arc de cercle si et seulement si $\left\| \vec{O}_\gamma \left(\frac{1}{2} \right) \right\| = R$ qui est équivalent à :

$$(w + 2w_1)^2 \left\| \vec{O}_{0\gamma} \left(\frac{1}{2} \right) \right\|^2 = (w \vec{O}_0 G + 2w_1 \vec{O}_1 P_1)^2$$

qui est équivalente à l'équation $\alpha w_1^2 + \beta = 0$ où α et β sont donnés par : $\alpha = 4(O_0 P_1^2 - R^2)$ et $\beta = 2w_2(O_0 \vec{P}_0 \bullet O_0 \vec{P}_2 - R^2)$ La solution positive w_1^+ (resp. négative w_1^-) des solutions de l'équation permet de modéliser le petit (resp. grand) arc de cercle du cercle C .

$$w_1^+ = \sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}, \quad w_1^- = -\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}$$

Maintenant que nous avons les neuf points de contrôle, les poids des sommets et les poids des CBRQs bordant le CBRB, il reste à déterminer w_{11} . Celui-ci est déterminé de telle façon que le corollaire ci-dessous soit vérifié.

Corollaire : Condition nécessaire pour qu'une CBRQ sur un CBRB soit un cercle. D'après le théorème 1, les courbes $u \mapsto M(u, \frac{1}{2})$ et $v \mapsto M(\frac{1}{2}, v)$ sont des arcs de cercle si et seulement si on a les deux conditions suffisantes :

- G_1^u (resp. G_1^v) appartient au plan médiateur de $[G_0^u G_2^u]$ (resp. $[G_0^v G_2^v]$).
- Les poids $(\alpha_i^u)_{0 \leq i, j \leq 2}$ et $(\alpha_i^v)_{0 \leq i, j \leq 2}$ vérifient le théorème 1 ci-dessus.

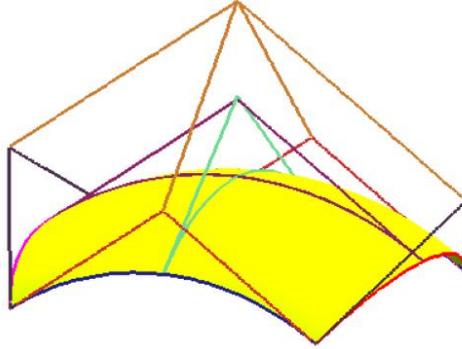


Fig 3 : Illustration du corollaire.

Malheureusement, il est possible de construire un CBRB de telle façon que les conditions géométriques soient vérifiées et que l'on obtienne deux valeurs différentes pour w_{11} selon que l'on considère les points G_i^u ou les points G_i^v . Dans ce cas, la construction d'un CBRB convertible en CD4 est impossible. Un CBRB remplissant toutes les conditions (nécessaires et non suffisantes) précédentes est appelé un CBRB Convertible en cyclide de Dupin quartique et est noté CBRBCCD4.

Récapitulatif du calcul des poids du carreau de Bézier :

Soit $(P_{ij})_{0 \leq i, j \leq 2}$ les points de contrôle construits par l'algorithme 1.

1. Posons $w_{00} = w_{02} = w_{20} = 1$ et calcul de $w_{22} = 1 - pq$.
2. Détermination de w_{01} et w_{21} , en respectant la contrainte $w_{01}w_{21} > 0$, de telle façon que les deux courbes soient des arcs de cercles.
3. Détermination de w_{10} et w_{12} , en respectant la contrainte $w_{10}w_{12} > 0$, de telle façon que les deux courbes soient des arcs de cercles.
4. Détermination du poids de w_{11} de telle façon que deux courbes de Béziens soient deux arcs de cercles.

On obtient en sortie une famille de poids $(w_{ij})_{0 \leq i, j \leq 2}$ telle que la famille $(P_{ij}; w_{ij})_{0 \leq i, j \leq 2}$ soit les points de contrôle pondérés d'un carreau de Bézier rationnel biquadratique pouvant être converti en carreau de cyclide de Dupin.

5 Algorithmes de conversion

Nous allons donner trois algorithmes de conversion, un qui permet d'obtenir un tore ou une sphère double et les deux autres une CD4 avec $c \neq 0$. En effet, lorsque l'on a un tore, l'une des droites (intersection des plans de courbure), est rejetée à l'infini. Les deux méthodes de conversion sont donc totalement différentes selon que l'on obtiendra un tore (ou une sphère double) ou que l'on obtiendra une CD4. Nous donnerons deux algorithmes de conversion en CD4, l'un en utilisant les cercles principaux du plan P_z et l'autre en utilisant les cercles principaux du plan P_y .

5.1 Conversion d'un CBRB en tore ou sphere

5.1.1 Algorithme

Algorithme : Conversion d'un CBRB en un carreau de tore ou de sphère double. Soit S la nappe paramétrée d'un carreau de Bézier convertible, de points de contrôle $(P_{ij}; w_{ij})_{0 \leq i, j \leq 2}$ tels que :

$$Aff(P_{00}; P_{01}; P_{02}) // \neq Aff(P_{20}; P_{21}; P_{22})$$

1. Détermination des cercles (C_3, C_4, C_5, C_6) engendrés par les bords du carreau en utilisant deux courbes de Bézier.
 $\gamma_3^+ = RQBC\{(P_{00}; P_{01}; P_{02}), f_w(P_{00}; P_{01}; P_{02})\}$,
 $\gamma_3^- = RQBC\{(P_{00}; P_{01}; P_{02}), -f_w(P_{00}; P_{01}; P_{02})\}$, $C_3 = \gamma_3^+ \cup \gamma_3^-$.
 $\gamma_4^+ = RQBC\{(P_{20}; P_{21}; P_{22}), f_w(P_{20}; P_{21}; P_{22})\}$,
 $\gamma_4^- = RQBC\{(P_{20}; P_{21}; P_{22}), -f_w(P_{20}; P_{21}; P_{22})\}$, $C_4 = \gamma_4^+ \cup \gamma_4^-$.
 $\gamma_5^+ = RQBC\{(P_{00}; P_{10}; P_{20}), f_w(P_{00}; P_{10}; P_{20})\}$,
 $\gamma_5^- = RQBC\{(P_{00}; P_{10}; P_{20}), -f_w(P_{00}; P_{10}; P_{20})\}$, $C_5 = \gamma_5^+ \cup \gamma_5^-$.

$\gamma_6^+ = RQBC\{(P_{02}; P_{12}; P_{22}), f_w(P_{02}; P_{12}; P_{22})\}$,
 $\gamma_6^- = RQBC\{(P_{02}; P_{12}; P_{22}), -f_w(P_{02}; P_{12}; P_{22})\}$, $C_6 = \gamma_6^+ \cup \gamma_6^-$.
 La condition de départ implique que $C_3 // C_4$.

2. Détermination de la nouvelle base : \vec{i}_0 et \vec{j}_0 sont deux vecteurs unitaires orthogonaux engendrant le plan vectoriel $Vect(P_{00}; P_{01}; P_{02})$ et \vec{k}_0 est défini par : $\vec{k}_0 = \vec{i}_0 \times \vec{j}_0$.
3. L'axe des cotes est $\Delta_\theta = (\Omega_3, \vec{k}_0)$ où Ω_3 est le centre du cercle C_3 .
4. L'origine du nouveau repère est Ω , projeté orthogonal du centre Ω_5 sur (Ω_3, \vec{k}_0) . \mathcal{P}_z est le plan passant par Ω de vecteur normal \vec{k}_0 .
5. Détermination des points A et B vérifiant : $\{A; B\} = C_5 \cap \mathcal{P}_z$ et $\Omega B \leq \Omega A$.
6. Les cercles principaux C_1 et C_2 sont les cercles, dans \mathcal{P}_z , de centre Ω et de rayons respectifs $\rho_1 = \Omega A$ et $\rho_2 = \Omega B$.
7. Les paramètres de la cyclide de Dupin sont $c = 0$. Si $C_1 = C_2$, la cyclide de Dupin est une sphère double. Si $\#(C_6 \cap C_5) = 2$, la cyclide de Dupin est un tore croisé et nous avons $a = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}$ et $\mu = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$, sinon la cyclide de Dupin est un tore à collier et nous avons $a = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ et $\mu = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}$.
8. Détermination des valeurs θ_0 , θ_1 , ψ_0 et ψ_1 pour obtenir le carreau de cyclide correspondant au carreau de Bézier non convertible.

On obtient en sortie un carreau de tore ou de sphère double modélisant un carreau de Bézier non convertible.

5.1.2 Détails de l'algorithme

L'algorithme permet de convertir un CBRBCCD4 en tore ou en sphere double. La figure 4 (ci-après) de gauche montre le CBRBCCD4 initial, son polyèdre de contrôle, les courbes :

$RQBC\{(G_0^u; G_1^u; G_2^u), (\alpha_0^u; \alpha_1^u; \alpha_2^u)\}$, $RQBC\{(G_0^v; G_1^v; G_2^v), (\alpha_0^v; \alpha_1^v; \alpha_2^v)\}$ ainsi que les CBRQs γ_3^+ , γ_4^+ , γ_5^+ et γ_6^+ bordant le CBRBCCD4. Les coordonnées des points de contrôle et les poids sont données dans le tableau (Tableau 1). La première étape de l'algorithme est la détermination des cercles bordant le CBRBCCD4. Chaque cercle est représenté par une union de deux CBRQs (Courbes de Bézier Rationnelles Quadratiques) quasi-standard, figure de droite. Par exemple, le cercle C_3 est l'union des CBRQs de points de contrôle P_{00}, P_{01}, P_{02} et de poids opposés $f_w(P_{00}; P_{01}; P_{02})$ et $-f_w(P_{00}; P_{01}; P_{02})$.

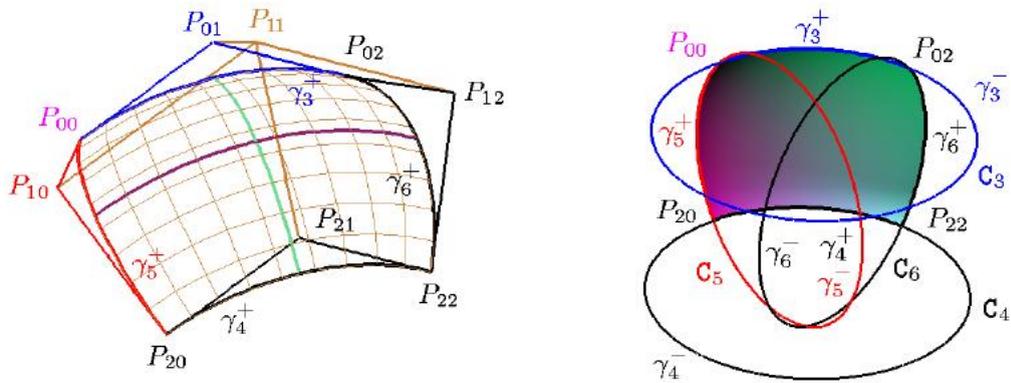


Fig 4 : Illustration de l'algorithme. Gauche : Le CBBCCD4. Droite : Détermination des cercles bordant le carré.

Points de contrôle	Poids
$P_{00} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$w_{00} = 1$
$P_{01} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$w_{01} \simeq 0,8164965809$
$P_{02} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$	$w_{02} = 1$
$P_{10} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$	$w_{10} \simeq 0,7559289460$
$P_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$	$w_{11} \simeq 0,6172134004$
$P_{12} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	$w_{12} \simeq 0,7559289460$
$P_{20} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$	$w_{20} = 1$
$P_{21} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$w_{21} \simeq 0,8164965809$
$P_{22} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$w_{22} = 1$

Tableau 2 : tableau des points et poids de contrôle associés.

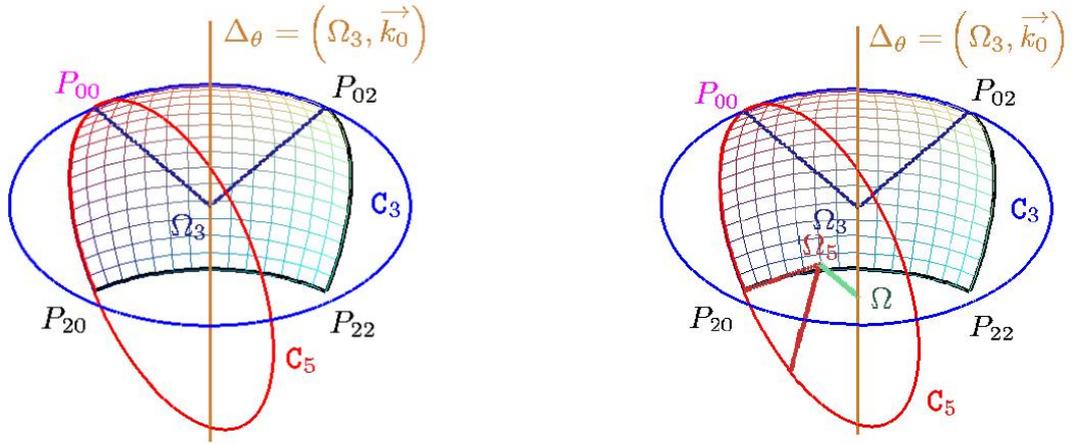


Fig 5 : Illustration de l'algorithme. Gauche : détermination de Δ_θ . Droite : détermination de la nouvelle origine du repère Ω .

La figure 5 de gauche illustre l'étape 3 de l'algorithme. La droite Δ_θ est la droite perpendiculaire aux plans contenant les cercles parallèles et passant par un des centres de deux cercles parallèles : nous avons choisi C_3 . La figure 5 de droite illustre l'étape 3 de l'algorithme et le plan P_z est le plan passant par Ω , projeté orthogonal du centre Ω_5 du cercle C_5 sur (Ω_3, k_0) , et de vecteur normal k_0 .

La figure 6 de gauche permet, en utilisant le plan de symétrie P_z du tore, de construire deux points A et B sur chacun des cercles principaux de ce plan. La condition $\Omega B \leq \Omega A$ permet d'identifier immédiatement le grand et le petit cercle principal et en cas d'égalité, on obtient une sphère double. Le centre de ces cercles est le point Ω . La figure 4 de droite montre les deux cercles principaux dans P_z .

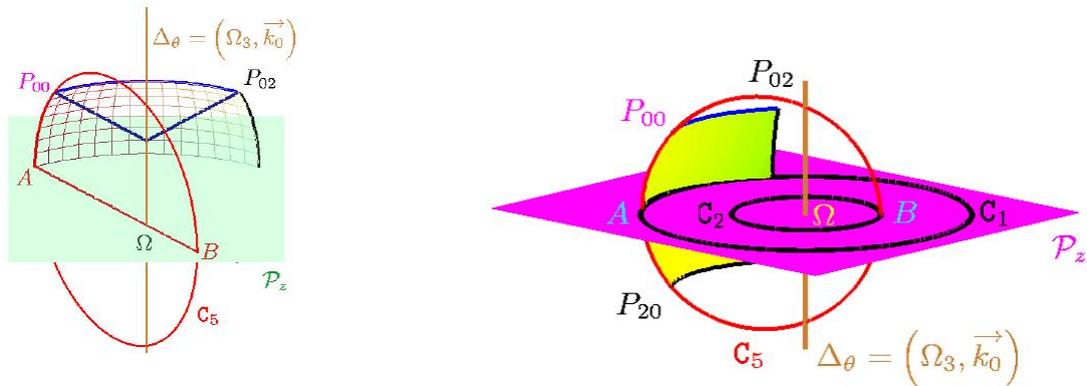


Fig 6 : Illustration de l'algorithme. Gauche : le plan P_z . Droite : les cercles principaux du tore dans P_z .

La figure 7 de gauche montre tout le tore, les deux cercles principaux, le CBRBCCD4 ainsi que son polyèdre de contrôle. Évidemment, nous avons $c = 0$. Les autres valeurs

sont $a \approx 1,6329931$ et $\mu \approx 4,3204938$. La figure 7 de droite montre le CBRBCCD4, son polyèdre de contrôle et la partie utile du tore.

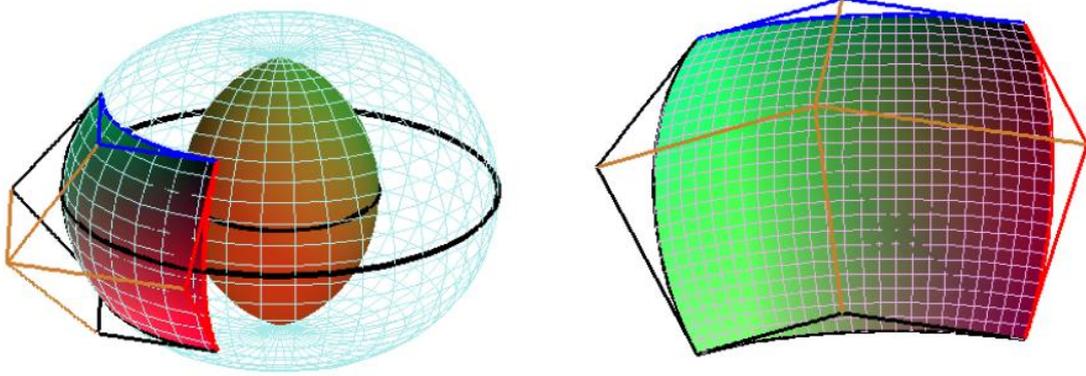


Fig 7 : Illustration de l'algorithme. Gauche : le CBRBCCD4, son polyèdre de contrôle et le tore croisé. Droite : le CBRBCCD4, son polyèdre de contrôle et la partie utile du tore croisé.

La figure 8 montre toute la conversion d'un CBRBCCD4 en tore à collier. L'image de gauche représente le CBRBCCD4, son polyèdre de contrôle, les deux courbes : $RQBC\{(G_0^u; G_1^u; G_2^u), (\alpha_0^u; \alpha_1^u; \alpha_2^u)\}$ et $RQBC\{(G_0^v; G_1^v; G_2^v), (\alpha_0^v; \alpha_1^v; \alpha_2^v)\}$ et leur polygone de contrôle. L'image de droite montre le CBRBCCD4, son polyèdre de contrôle, et le tore à collier.

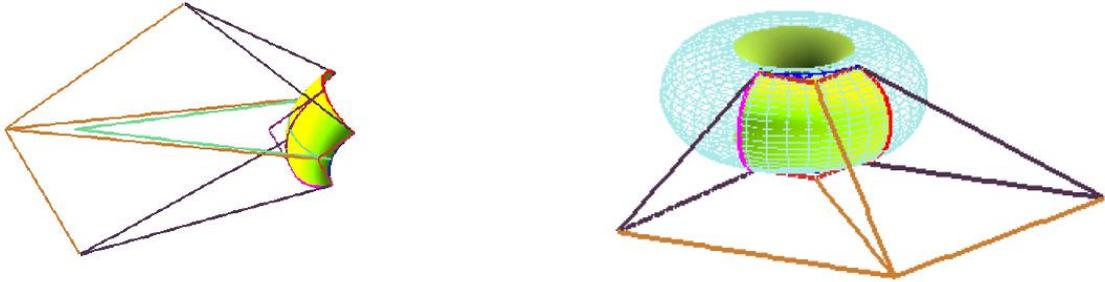


Fig 8 : Illustration de l'algorithme. Conversion d'un CBRBCCD4 en tore à collier.

5.2 Conversion d'un CBRB convertible en CD4

Dans l'algorithme de conversion, nous avons besoin de construire la perpendiculaire commune à deux droites données. La construction est définie par le lemme suivant et elle est illustrée sur la figure 9.

Lemme : *Perpendiculaire commune à deux droites. Soit \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 deux droites gauches de \mathcal{E} . Soit \vec{u}_i un vecteur directeur de \mathcal{D}_i et \mathcal{A}_i un point de \mathcal{D}_i . Soit \mathcal{P} le plan engendré par \mathcal{A}_2 , \vec{u}_1 et \vec{u}_2 . On note \mathcal{D}'_1 la droite obtenue par projection orthogonale de \mathcal{D}_1 sur \mathcal{P} . Soit H l'intersection de \mathcal{D}'_1 et \mathcal{D}'_2 . Soit H' le projeté orthogonal de H sur \mathcal{D}_1 . La perpendiculaire commune à \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 est la droite (HH') .*

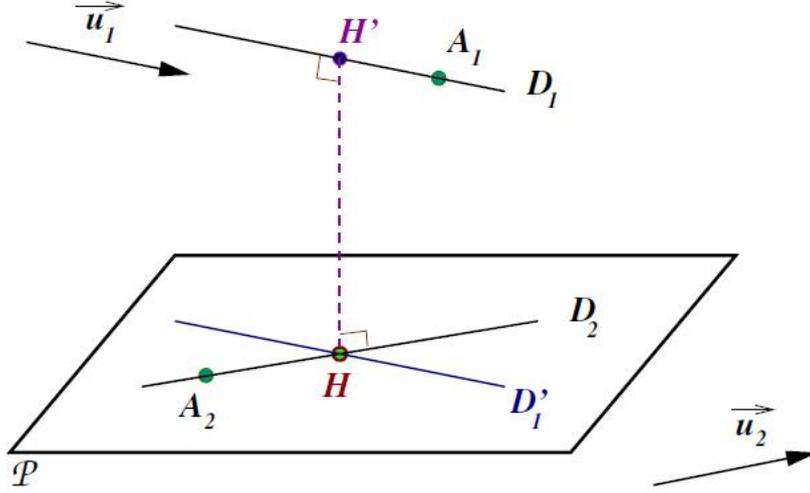


Fig 9 : Perpendiculaire commune à deux droites.

Nous proposons deux algorithmes permettant de construire la CD4, un en utilisant les cercles principaux du plan \mathcal{P}_y et l'autre en utilisant les cercles principaux du plan \mathcal{P}_z .

5.2.1 Algorithme de conversion \mathcal{P}_y

Algorithme \mathcal{P}_y : Conversion d'un carreau de Bézier en un carreau de Cyclide de Dupin en utilisant des cercles principaux du plan \mathcal{P}_y .

Soit S la nappe paramétrée d'un carreau de Bézier convertible, de points de contrôle $(P_{ij}; w_{ij})_{0 \leq i, j \leq 2}$ tels que :

$$\begin{aligned} Aff(P_{00}; P_{01}; P_{02}) \cap Aff(P_{20}; P_{21}; P_{22}) &\neq \emptyset \\ Aff(P_{00}; P_{10}; P_{20}) \cap Aff(P_{02}; P_{12}; P_{22}) &\neq \emptyset \end{aligned}$$

1. Détermination des cercles (C_3, C_4, C_5, C_6) engendrés par les bords du carreau en utilisant deux courbes de Bézier.

$$\begin{aligned} \gamma_3^+ &= RQBC\{(P_{00}; P_{01}; P_{02}), f_w(P_{00}; P_{01}; P_{02})\}, \\ \gamma_3^- &= RQBC\{(P_{00}; P_{01}; P_{02}), -f_w(P_{00}; P_{01}; P_{02})\}, C_3 = \gamma_3^+ \cup \gamma_3^-. \\ \gamma_4^+ &= RQBC\{(P_{20}; P_{21}; P_{22}), f_w(P_{20}; P_{21}; P_{22})\}, \\ \gamma_4^- &= RQBC\{(P_{20}; P_{21}; P_{22}), -f_w(P_{20}; P_{21}; P_{22})\}, C_4 = \gamma_4^+ \cup \gamma_4^-. \\ \gamma_5^+ &= RQBC\{(P_{00}; P_{10}; P_{20}), f_w(P_{00}; P_{10}; P_{20})\}, \\ \gamma_5^- &= RQBC\{(P_{00}; P_{10}; P_{20}), -f_w(P_{00}; P_{10}; P_{20})\}, C_5 = \gamma_5^+ \cup \gamma_5^-. \\ \gamma_6^+ &= RQBC\{(P_{02}; P_{12}; P_{22}), f_w(P_{02}; P_{12}; P_{22})\}, \\ \gamma_6^- &= RQBC\{(P_{02}; P_{12}; P_{22}), -f_w(P_{02}; P_{12}; P_{22})\}, C_6 = \gamma_6^+ \cup \gamma_6^-. \end{aligned}$$
2. Détermination du type de la cyclide (ring, horned ou spindle) et les droites Δ_θ et Δ_ψ .
3. Détermination des droites $\Delta_1 = Aff(P_{00}; P_{01}; P_{02}) \cap Aff(P_{20}; P_{21}; P_{22})$ et $\Delta_2 = Aff(P_{00}; P_{10}; P_{20}) \cap Aff(P_{02}; P_{12}; P_{22})$ et Δ_0 est perpendiculaire commune à Δ_1 et Δ_2 . Modulo une permutation des indices i et j , nous pouvons supposer que $\Delta_1 = \Delta_\theta$ et $\Delta_2 = \Delta_\psi$.

4. Détermination de la base orthonormée de la cyclide.
 H_θ (resp. H_ψ) est l'intersection des droites Δ_0 et Δ_θ (resp. Δ_0 et Δ_ψ). Posons $\vec{i}_0 = \frac{1}{H_\theta H_\psi} \overrightarrow{H_\theta H_\psi}$. \vec{j}_0 est un vecteur unitaire directeur de Δ_ψ et $\vec{k}_0 = \vec{i}_0 \times \vec{j}_0$. L'origine du nouveau repère est un point Ω de Δ_0 et \mathcal{P}_y est le plan passant par Ω de vecteur normal \vec{j}_0 .
5. Construction d'un cercle sur le carreau afin de déterminer les points permettant la construction des cercles principaux.
 C_7 est le cercle passant par $S(\frac{1}{2}; 0)$, $S(\frac{1}{2}; 1)$ et $S(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.
6. Détermination des points permettant la construction des cercles principaux.
 $\{A_0; B_0\} = C_3 \cap \mathcal{P}_y$, $\{A_1; B_1\} = C_7 \cap \mathcal{P}_y$ et $\{A_2; B_2\} = C_4 \cap \mathcal{P}_y$ tels que : $\forall i \in \llbracket 0; 2 \rrbracket$, $d(B_i; \Delta_\psi) \leq d(A_i; \Delta_\psi)$.
7. Détermination des cercles principaux de la cyclide.
Les cercles principaux C_1 et C_2 sont les cercles, dans \mathcal{P}_y , de centre O_1 (resp. O_2) passant par A_0 , A_1 et A_2 (resp. B_0 , B_1 et B_2) et de rayon $\rho_1 = O_1 A_0$ et $\rho_2 = O_2 B_0$. Le centre de la cyclide est le milieu du segment $[O_1 O_2]$.
8. Détermination des paramètres de la cyclide.
Nous obtenons $a = \frac{O_1 O_2}{2}$. Si nous obtenons une cyclide de type spindle, nous avons $\mu = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}$ et $c = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$, sinon nous avons $\mu = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ et $c = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}$.
9. Détermination des valeurs θ_0 , θ_1 , ψ_0 et ψ_1 pour obtenir le carreau de cyclide correspondant au carreau de Bézier convertible en utilisant les courbes coordonnées du carreau de Bézier convertible.

On obtient en sortie un carreau de cyclide modélisant un carreau de Bézier convertible.

5.2.2 Détails de l'algorithme \mathcal{P}_y

La première étape de l'algorithme est la détermination des cercles bordant le CBRBCCD4. Chaque cercle est représenté par une union de deux CBRQs quasi-standard, figure 10 de droite. Par exemple, le cercle C_3 est défini comme l'union de deux CBRQs de points de contrôle P_{00}, P_{01}, P_{02} et de poids médians opposés. On a par exemple : $C_3 = \gamma_3^+ \cup \gamma_3^-$.

D'après la caractérisation d'une cyclide de Dupin, on détermine le type de la CD4. Les droites Δ_θ et Δ_ψ sont les intersections des plans de courbure de la future CD4.

On peut définir dans chaque cas la droite Δ_θ comme étant l'intersection des plans contenant les cercles C_3 et C_4 ou de ceux contenant C_5 et C_6 . Nous définissons ensuite le repère de la CD4 qui nous permettra de trouver le plan \mathcal{P}_y , dans lequel on pourra construire les cercles principaux de la cyclide. Pour cela on va définir Δ_0 comme étant la perpendiculaire commune à Δ_θ et Δ_ψ , et les points H_θ et H_ψ comme étant les points d'intersection respectifs entre ces droites et Δ_0 . On détermine la base

orthonormale de la cyclide en fixant le vecteur $\vec{i}_0 = \frac{1}{H_\theta H_\psi} H_\theta \vec{H}_\psi$.

On prend \vec{j}_0 comme étant le vecteur directeur unitaire de Δ_ψ et on calcule $\vec{k}_0 = \vec{i}_0 \times \vec{j}_0$.

On détermine alors le plan \mathcal{P}_y comme étant le plan contenant Δ_0 et de vecteur normal \vec{j}_0 .

Pour pouvoir déterminer les cercles principaux, il nous faut déterminer les intersections entre les cercles issus du carreau de Bézier initial et le plan \mathcal{P}_y . On peut déjà obtenir deux couples de points $\{A_0, B_0\}$ et $\{A_2, B_2\}$ par intersection des "bons" cercles (C_3 et C_4) bordant le carreau et le plan.

Pour déterminer un troisième couple de points, on va prendre sur le carreau de Bézier les points $S(\frac{1}{2}, 0)$, $S(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $S(\frac{1}{2}, 1)$ qui nous définissent le cercle C_7 engendré par le carreau. On a alors $\{A_1, B_1\} = C_7 \cap \mathcal{P}_y$. Les $\{A_i, B_i\}$ doivent vérifier $d(B_i, \Delta_\psi) \leq d(A_i, \Delta_\psi)$. On a alors comme grand cercle principal C_1 le cercle défini par les points A_0, A_1, A_2 de centre O_1 et de rayon $\rho_1 = O_1 A_0$. On a comme petit cercle principal C_2 , le cercle défini par les points B_0, B_1, B_2 de centre O_2 et de rayon $\rho_2 = O_2 B_0$. On peut alors choisir comme origine du repère de la cyclide le point Ω étant le milieu du segment $[O_1 O_2]$.

On détermine alors les paramètres de la CD4 en fonction de son type :

On a : $a = \frac{O_1 O_2}{2}$.

Si la cyclide est une CD4E, $c = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ et $\mu = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}$.

Sinon c'est l'opposé, $c = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}$ et $\mu = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$.

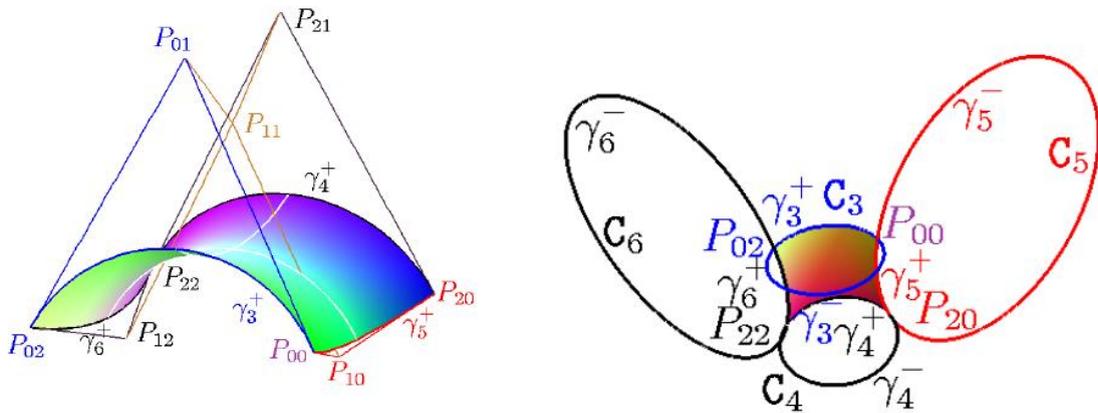


Fig 10 : Gauche : le CBRRC4.
Droite : détermination des cercles de bordure du CBRBCC4.

5.2.3 Algorithme de conversion \mathcal{P}_z

Algorithme \mathcal{P}_z : Conversion d'un carreau de Bézier en un carreau de Cyclide de Dupin en utilisant des cercles principaux du plan \mathcal{P}_z .

Soit S la nappe paramétrée d'un carreau de Bézier convertible, de points de contrôle $(P_{ij}; w_{ij})_{0 \leq i, j \leq 2}$ tels que :

$$\begin{aligned} Aff(P_{00}; P_{01}; P_{02}) \cap Aff(P_{20}; P_{21}; P_{22}) &\neq \emptyset \\ Aff(P_{00}; P_{10}; P_{20}) \cap Aff(P_{02}; P_{12}; P_{22}) &\neq \emptyset \end{aligned}$$

1. Détermination des cercles (C_3, C_4, C_5, C_6) engendrés par les bords du carreau en utilisant deux courbes de Bézier.

$$\begin{aligned} \gamma_3^+ &= RQBC\{(P_{00}; P_{01}; P_{02}), f_w(P_{00}; P_{01}; P_{02})\}, \\ \gamma_3^- &= RQBC\{(P_{00}; P_{01}; P_{02}), -f_w(P_{00}; P_{01}; P_{02})\}, C_3 = \gamma_3^+ \cup \gamma_3^-. \\ \gamma_4^+ &= RQBC\{(P_{20}; P_{21}; P_{22}), f_w(P_{20}; P_{21}; P_{22})\}, \\ \gamma_4^- &= RQBC\{(P_{20}; P_{21}; P_{22}), -f_w(P_{20}; P_{21}; P_{22})\}, C_4 = \gamma_4^+ \cup \gamma_4^-. \\ \gamma_5^+ &= RQBC\{(P_{00}; P_{10}; P_{20}), f_w(P_{00}; P_{10}; P_{20})\}, \\ \gamma_5^- &= RQBC\{(P_{00}; P_{10}; P_{20}), -f_w(P_{00}; P_{10}; P_{20})\}, C_5 = \gamma_5^+ \cup \gamma_5^-. \\ \gamma_6^+ &= RQBC\{(P_{02}; P_{12}; P_{22}), f_w(P_{02}; P_{12}; P_{22})\}, \\ \gamma_6^- &= RQBC\{(P_{02}; P_{12}; P_{22}), -f_w(P_{02}; P_{12}; P_{22})\}, C_6 = \gamma_6^+ \cup \gamma_6^-. \end{aligned}$$

2. Détermination du type de la cyclide (ring, horned ou spindle) et les droites Δ_θ et Δ_ψ .

3. Détermination des droites $\Delta_1 = Aff(P_{00}; P_{01}; P_{02}) \cap Aff(P_{20}; P_{21}; P_{22})$ et $\Delta_2 = Aff(P_{00}; P_{10}; P_{20}) \cap Aff(P_{02}; P_{12}; P_{22})$ et Δ_0 est perpendiculaire commune à Δ_1 et Δ_2 . Modulo une permutation des indices i et j , nous pouvons supposer que $\Delta_1 = \Delta_\theta$ et $\Delta_2 = \Delta_\psi$.

4. Détermination de la base orthonormée de la cyclide.

H_θ (resp. H_ψ) est l'intersection des droites Δ_0 et Δ_θ (resp. Δ_0 et Δ_ψ). Posons $\vec{i}_0 = \frac{1}{H_\theta H_\psi} \overrightarrow{H_\theta H_\psi}$. \vec{j}_0 est un vecteur unitaire directeur de Δ_ψ et $\vec{k}_0 = \vec{i}_0 \times \vec{j}_0$. L'origine du nouveau repère est un point Ω de Δ_0 et \mathcal{P}_z est un plan passant par Ω de vecteur normal \vec{k}_0 .

5. Construction d'un cercle sur le carreau afin de déterminer les points permettant la construction des cercles principaux.

C_7 est le cercle passant par $S(0; \frac{1}{2})$, $S(1; \frac{1}{2})$ et $S(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.

6. Détermination des points permettant la construction des cercles principaux.

$\{A_0; B_0\} = C_5 \cap \mathcal{P}_z$, $\{A_1; B_1\} = C_7 \cap \mathcal{P}_z$ et $\{A_2; B_2\} = C_6 \cap \mathcal{P}_z$ tels que : $\forall i \in \llbracket 0; 2 \rrbracket$, $d(B_i; \Delta_\theta) \leq d(A_i; \Delta_\theta)$.

7. Détermination des cercles principaux de la cyclide.

Les cercles principaux C_1 et C_2 sont les cercles, dans \mathcal{P}_z , de centre O_1 (resp. O_2) passant par A_0, A_1 et A_2 (resp. B_0, B_1 et B_2) et de rayon $\rho_1 = O_1 A_0$ et $\rho_2 = O_2 B_0$. Le centre de la cyclide est le milieu du segment $[O_1 O_2]$.

8. Détermination des paramètres de la cyclide.

Nous obtenons $c = \frac{O_1 O_2}{2}$. Si nous obtenons une cyclide de type spindle, nous avons $a = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}$ et $\mu = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$, sinon nous avons $a = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ et $\mu = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}$.

9. Détermination des valeurs $\theta_0, \theta_1, \psi_0$ et ψ_1 pour obtenir le carreau de cyclide correspondant au carreau de Bézier convertible en utilisant les courbes coordonnées du carreau de Bézier convertible.

On obtient en sortie un carreau de cyclide modélisant un carreau de Bézier convertible.

5.2.4 Détails de l'algorithme \mathcal{P}_z

La première étape de l'algorithme est la détermination des cercles bordant le CBRBCCD4. Chaque cercle est représenté par une union de deux CBRQs quasi-standard, figure 10 de droite. Par exemple, le cercle C_3 est défini comme l'union de deux CBRQs de points de contrôle P_{00}, P_{01}, P_{02} et de poids médians opposés. On a par exemple : $C_3 = \gamma_3^+ \cup \gamma_3^-$.

D'après la caractérisation d'une cyclide de Dupin, on détermine le type de la CD4. Les droites Δ_θ et Δ_ψ sont les intersections des plans de courbure de la future CD4.

On peut définir dans chaque cas la droite Δ_θ (respectivement la droite Δ_ψ) comme étant l'intersection des plans contenant les cercles C_3 et C_4 (respectivement C_5 et C_6) ou de ceux contenant C_5 et C_6 (respectivement C_3 et C_4). Nous définissons ensuite le repère de la CD4 qui nous permettra de trouver le plan \mathcal{P}_z , dans lequel on pourra construire les cercles principaux de la cyclide. Pour cela on va définir Δ_0 comme étant la perpendiculaire commune à Δ_θ et Δ_ψ , et les points H_θ et H_ψ comme étant les points d'intersection respectifs entre ces droites et Δ_0 . On détermine la base orthonormale de la cyclide en fixant le vecteur $\vec{i}_0 = \frac{1}{H_\theta H_\psi} H_\theta \vec{H}_\psi$.

On prend \vec{j}_0 comme étant le vecteur directeur unitaire de Δ_ψ et on calcule $\vec{k}_0 = \vec{i}_0 \times \vec{j}_0$.

On détermine alors le plan \mathcal{P}_z comme étant le plan contenant Δ_0 et de vecteur normal \vec{j}_0 (resp. \vec{k}_0).

Pour pouvoir déterminer les cercles principaux, il nous faut déterminer les intersections entre les cercles issus du carreau de Bézier initial et le plan \mathcal{P}_z . On peut déjà obtenir deux couples de points $\{A_0, B_0\}$ et $\{A_2, B_2\}$ par intersection des "bons" cercles (C_5 et C_6) bordant le carreau et le plan.

Pour déterminer un troisième couple de points, on va prendre sur le carreau de Bézier les points $S(0, \frac{1}{2})$, $S(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $S(1, \frac{1}{2})$ qui nous définissent le cercle C_7 engendré par le carreau. On a alors $\{A_1, B_1\} = C_7 \cap \mathcal{P}_z$. Les $\{A_i, B_i\}$ doivent vérifier $d(B_i, \Delta_\theta) \leq d(A_i, \Delta_\theta)$. On a alors comme grand cercle principal C_1 (resp. petit cercle principal C_2) le cercle défini par les points A_0, A_1, A_2 (resp. B_0, B_1, B_2) de

rayon $\rho_1 = O_1A_0$ (resp. $\rho_2 = O_2B_0$). On peut alors choisir comme origine du repère de la cyclide le point Ω étant le milieu du segment $[O_1O_2]$.
 On détermine alors les paramètres de la CD4 en fonction de son type :

On a : $c = \frac{O_1O_2}{2}$.
 Si la cyclide est une CD4I, $a = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}$ et $\mu = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$.
 Sinon c'est l'opposé, $\mu = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}$ et $a = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$.

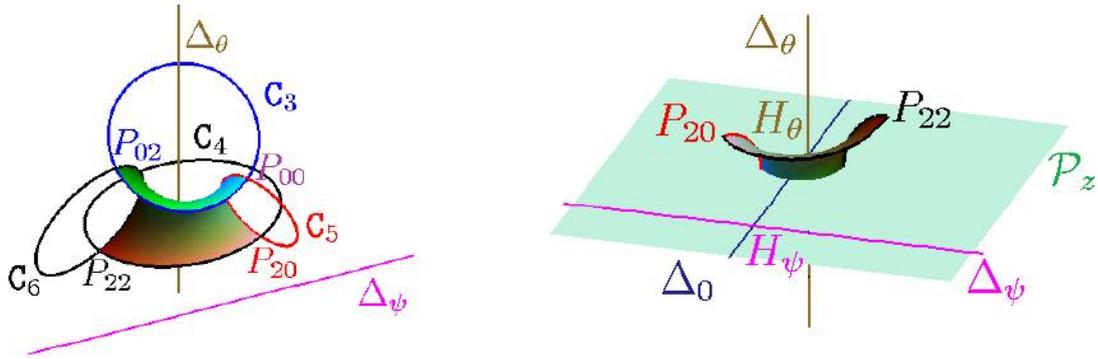


Fig 11 : Illustration de l'algorithme \mathcal{P}_z : Gauche : le CBRBCCD4, les quatre cercles de bordure et les droites Δ_θ et Δ_ψ . Droite : le CBRBCCD4, les quatre cercles de bordure et les droites Δ_0 , Δ_θ et Δ_ψ et le plan \mathcal{P}_z de la CD4.

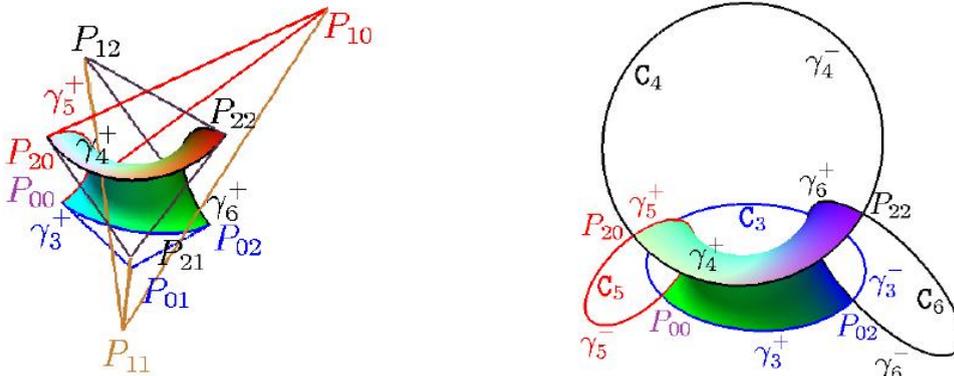


Fig 12 : Gauche : le CBRRC4. Droite : détermination des cercles de bordure du CBRBCCD4.

Points de contrôle	Poids
$P_{00} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$w_{00} = 1$
$P_{01} = \begin{pmatrix} \frac{32}{97} \\ \frac{32}{97} \\ \frac{440}{97} \end{pmatrix}$	$w_{01} \simeq 0,4839726485$
$P_{02} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$	$w_{02} = 1$
$P_{10} = \begin{pmatrix} -\frac{4\sqrt{3}}{3} \frac{22\sqrt{3}+27}{5+13\sqrt{3}} \\ \frac{4}{3} \frac{22\sqrt{3}+27}{5+13\sqrt{3}} \\ -5\sqrt{3} \frac{\sqrt{3}+1}{3} \end{pmatrix}$	$w_{10} \simeq 0,1572697415$
$P_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$	$w_{11} \simeq -0,1098991971$
$P_{12} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$	$w_{12} \simeq 0,3388691968$
$P_{20} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$	$w_{20} = 1$
$P_{21} = \begin{pmatrix} -32 \frac{\sqrt{3}+1}{275+97\sqrt{3}} \\ -32\sqrt{3} \frac{\sqrt{3}+1}{275+97\sqrt{3}} \\ -440 \frac{\sqrt{3}+3}{97\sqrt{3}+275} \end{pmatrix}$	$w_{21} \simeq 0,5525881549$
$P_{22} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$w_{22} \simeq 0,9330127020$

Tableau 4 : Coordonnées des points de contrôle et des poids correspondants au CBRBCCD4 de la figure 12.

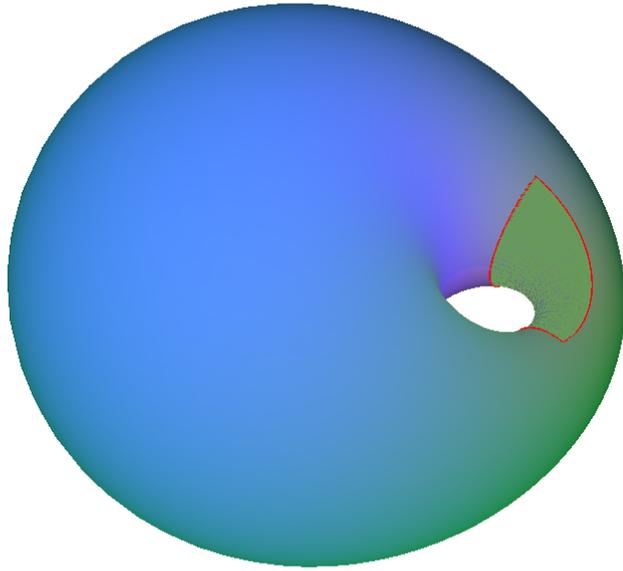


Fig 13 : Le carré de CD4 et la cyclide correspondants au CBRBCCD4 de la figure 12.

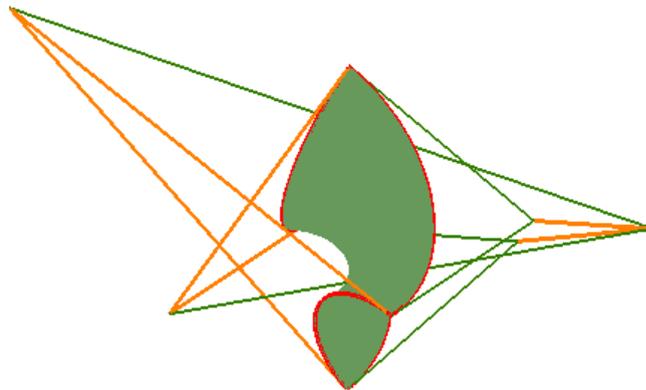


Fig 14 : Le CBRBCCD4 et son polygône de la figure 12.

On trouve les paramètres de la CD4 correspondant au CBRBCCD4 de la figure 12 : $a \approx 6,56418$, $\mu \approx 4,7554$ et $c \approx 3,10432$.

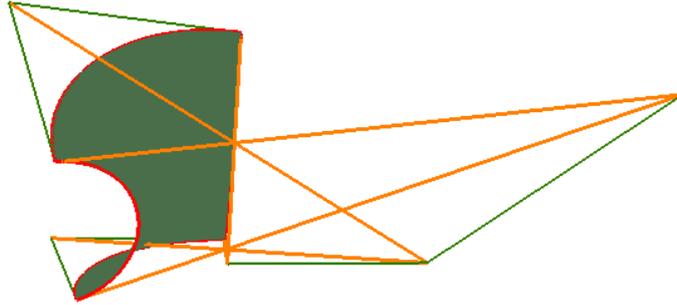


Fig 15 : Un CBRBCCD4 et son polyèdre de contrôle.

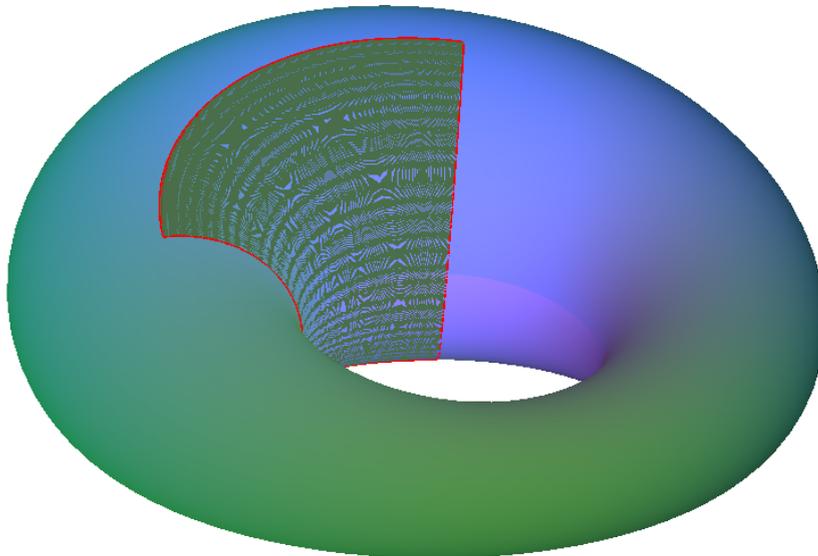


Fig 16 : Le carreau de CD4 et la cyclide correspondants au CBRBCCD4 de la

figure 15.

6 Changement de base

Pour pouvoir recoller le carreau de Bézier initial sur la cyclide finalement obtenue, on a besoin de placer le carreau dans le repère de la CD4. Pour cela on détermine la matrice P de passage du repère initial au repère final. On considère notre carreau original dans la base canonique, on a alors facilement P qu'il nous faut inverser. On passera alors le carreau de Bézier dans le repère de la CD4 en appliquant aux points de contrôle la transformation inverse P^{-1} . Il faut, pour finir, appliquer la translation de vecteur $\overrightarrow{\Omega_2\Omega_1}$ où Ω_1 est l'origine du repère du carreau de Bézier et Ω_2 celui de la CD4.

7 Manuel d'utilisation et interface graphique

L'utilisateur a plusieurs commandes à sa disposition :

Pour la construction du carreau de Bézier, l'utilisateur peut faire varier les paramètres θ_{00} , θ_{20} , θ_{02} , θ_{22} , le rayon et z_{11} : côte du point P_{11} . Il peut faire afficher le carreau de Bézier ainsi que son polyèdre de contrôle dans la base initiale ou celui dans la base de la cyclide.

-Tester des exemples : cliquer sur "Exemples" et choisir un exemples parmi ceux proposés.

-Enregistrer un projet : cliquer sur "Fichier"->"Enregistrer sous...".

-Ouvrir un projet : cliquer sur "Fichier"->"Ouvrir".

-Enregistrer une image : cliquer sur "Fichier"->"Enregistrer Image".

-Changer de plan de construction : cliquer sur "Edition"->"Plan Py" ou "Plan Pz".

-Changer de mode d'affichage : passer en mode plein, fil ou points : p ou "Edition"->"Affichage".

-Remettre l'exemple de départ : r ou "Edition"->"Remise à zéros".

-Manuel : "Aide"->"Index"

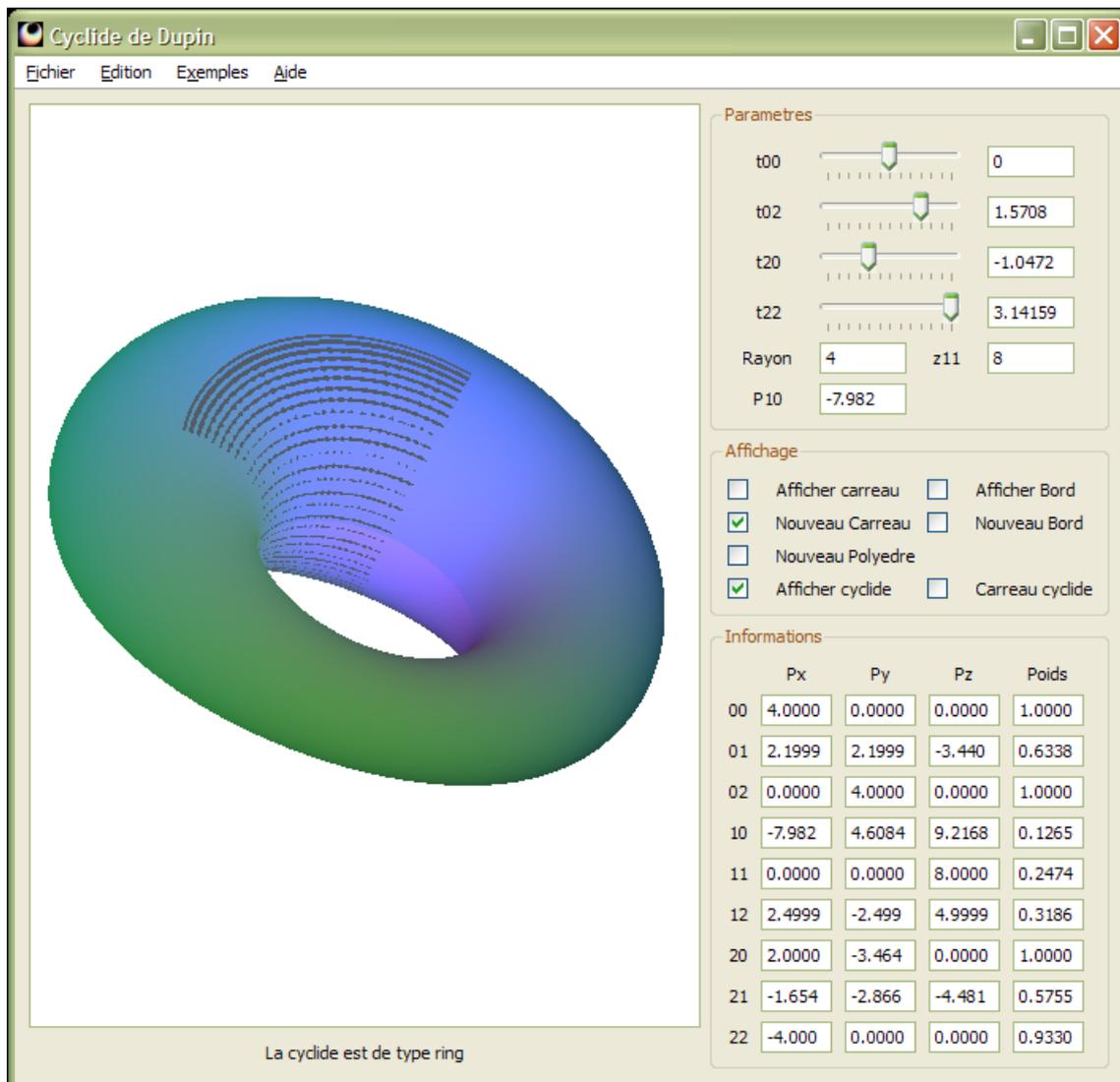
8 Conclusion

Ce projet, en plus de nous avoir forcé à chercher les conditions géométriques implémentables (pour tester des conditions de parallélisme, intersections,...), nous a permis d'améliorer nos compétences en programmation C/C++ et OpenGL. De plus, nous avons pu nous familiariser avec la librairie Qt pour l'interface graphique (librairie utilisée par de grandes entreprises : Adobe, Boeing, Google,...).

Nous avons aussi pris soin d'avoir une portabilité du programme vers de nombreux systèmes d'exploitation. Durant notre travail, nous avons aussi dû utiliser le logiciel maple pour certains calculs plus complexes de résolutions d'équations.

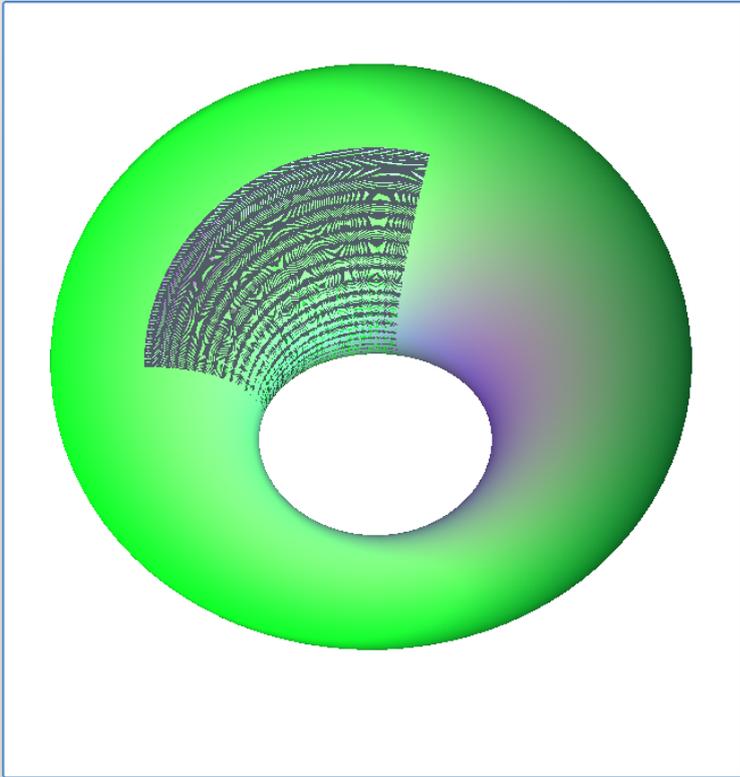
A Interface graphique

Rendu sous Windows :



Rendu sous Linux :

Cyclide de Dupin
Fichier Edition Exemples Aide



La cyclide est de type ring

Parametres

t00 0
t02 1.5708
t20 -1.0472
t22 3.14159
Rayon 4 z11 8
P10 -7.982

Affichage

Afficher carreau Afficher Bord
 Nouveau Carreau Nouveau Bord
 Nouveau Polyedre
 Afficher cyclide Carreau cyclide

Informations

	Px	Py	Pz	Poids
00	.0000	.0000	.0000	.0000
01	.1999	.1999	3.440	.6338
02	.0000	.0000	.0000	.0000
10	7.982	.6084	.2168	.1265
11	.0000	.0000	.0000	.2474
12	.4999	2.499	.9999	.3186
20	.0000	3.464	.0000	.0000
21	1.654	2.866	4.481	.5755
22	4.000	.0000	.0000	.9330

B Bibliographie

- [Gar07] L. GARNIER. *Mathématiques pour la modélisation géométrique, la représentation 3D et la synthèse d'images* Ellipses, 2007.
- [Deg94] W. L. F. Degen. Generalized Cyclides for Use in CAGD. In A. Bowyer, editor, *The Mathematics of Surface IV, The Mathematics of Surface IV*, pages 349-363, Oxford, 1994.