

Emma Alfonsi, Xavier Milhaud - M2R SAF

---

Simulations de Monte Carlo en finance :  
**Pricer d'option**

Sous la direction de M. Pierre Alain Patard

---



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Un pas dans la théorie</b>	<b>4</b>
2.1	Simulation de la loi normale . . . . .	4
2.2	Réduction de la variance . . . . .	4
2.2.1	Technique des variables antithétiques . . . . .	4
2.2.2	Technique des variables de contrôle . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Résultats</b>	<b>6</b>
3.1	Comparaison des prix des différentes options . . . . .	6
3.1.1	Comparaison des options entre elles . . . . .	6
3.1.2	Augmentation du nombre de simulations . . . . .	6
3.1.3	Augmentation du nombre de pas dans la simulation . . . . .	6
3.2	Convergence et précision du résultat final . . . . .	6
3.2.1	Comparaison : sans et avec la méthode de réduction de la variance . . . . .	6
3.2.2	Résultats graphiques associés . . . . .	6
3.3	Conclusions et remarques sur ces résultats . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Manuel d'utilisateur</b>	<b>8</b>
4.1	Les input que l'utilisateur doit entrer . . . . .	8
4.2	Les outputs qui nous donnent les résultats . . . . .	8
4.3	Les commandes . . . . .	8
<b>5</b>	<b>Fonctionnalités du programme</b>	<b>8</b>
5.1	Les possibilités en bref . . . . .	8
5.1.1	Les différents types d'option . . . . .	8
5.1.2	Les deux techniques de réduction de variance . . . . .	9
5.2	Des contraintes donc des limites . . . . .	9
<b>6</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>9</b>



# 1 Introduction

L'objectif de ce projet est de développer un pricer d'option.

Nous avons choisi le langage VBA pour des soucis d'applications futures. Une des problématiques importantes des simulations de Monte Carlo réside dans la génération des nombres aléatoires.

Nous avons pour cela utilisé le générateur intégré à Excel (il n'est pas trop mauvais :- ) ) car notre souci se positionnait plus du côté des techniques de réduction de variance et de leur impact.

## 2 Un pas dans la théorie

### 2.1 Simulation de la loi normale

Nous avons établi en cours que la méthode d'inversion de la fonction de répartition permet de réduire considérablement le biais induit par l'algorithme d'excel, ce qui se révèle très utile pour les applications financières. C'est pourquoi nous avons implémenté notre propre fonction d'inverse gaussienne utilisant l'algorithme d'Acklam.

Il consiste à approcher l'inverse d'une gaussienne sur  $]0, 0.5]$  en modélisant celle-ci par une fraction rationnelle( l'inverse sur  $]0.5, 1[$  est déduit par symétrie).

Soit  $u$  une variable aléatoire :

- Si  $0.02425 < u \leq 0.5$  :

$$q = u - 1/2 \text{ et } r = q^2$$

$$\Phi^{(-1)} = q * \frac{a_1*r^5 + a_2*r^4 + a_3*r^3 + a_4*r^2 + a_5*r + a_6}{b_1*r^5 + b_2*r^4 + b_3*r^3 + b_4*r^2 + b_5*r + 1}$$

- Si  $0 < u < 0.02425$  :

$$q = \sqrt{-2 * \ln(u)}$$

$$\Phi^{(-1)} = \frac{c_1*q^5 + c_2*q^4 + c_3*q^3 + c_4*q^2 + c_5*q + c_6}{d_1*q^4 + d_2*q^3 + d_3*q^2 + d_4*q + 1}$$

Nous obtenons finalement l'équivalent de la fonction d'Excel qui simule directement une loi normale centrée réduite. Nous appliquerons donc dans notre projet les deux méthodes de simulation de cette loi au choix de l'utilisateur depuis l'interface.

### 2.2 Réduction de la variance

#### 2.2.1 Technique des variables antithétiques

La technique des variables antithétiques est, parmi la panoplie des techniques de réduction de la variance, la plus simple.

Définissons des variables aléatoires dites antithétiques (opposées) dont la corrélation est de  $-1$ .

C'est à dire que pour chaque scénario du cours de l'action, nous aurons les deux équations suivantes (où  $\epsilon$  suit une loi normale) :

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{(r-0.5\sigma^2)\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}}$$

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{(r-0.5\sigma^2)\Delta t - \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}}$$

La même variable aléatoire est d'abord introduite avec un signe positif pour calculer  $S$  puis avec un signe négatif. Il en résulte une corrélation de  $(-1)$  entre les deux mouvements browniens, ce qui accélère, pour un nombre d'itérations donné, la convergence vers le vrai prix de l'option.

### 2.2.2 Technique des variables de contrôle

C'est une autre méthode pour réduire l'écart-type d'une simulation de Monte Carlo. Nous n'avons malheureusement pas eu le temps d'implémenter cette technique mais nous désirions la mentionner et l'expliquer brièvement car nous l'avons trouvée intéressante lorsque nous nous sommes documentés. Formellement, une variable de contrôle (désignée par  $cv$ ) doit être corrélée positivement avec  $V$ , la valeur de l'actif contingent que nous voulons estimer. Cependant,  $E(cv)$  doit être égal à zéro. Construisons le portefeuille suivant  $V'$ , où  $V$  est le prix de l'actif contingent que nous voulons évaluer :

$$V' = V - \beta cv + \epsilon$$

$V'$  est assimilable à un portefeuille couvert au sein duquel  $cv$  sert d'instrument de couverture pour  $V$ . Mais cette couverture est imparfaite, c'est pourquoi l'équation comporte un terme d'erreur  $\epsilon$ . Ainsi, plutôt que de simuler directement la valeur de  $V$ , nous simulons la valeur de  $V'$  pour calculer celle de  $V$ . Nous avons  $E(V) = E(V')$  (car  $E(cv) = 0$  par hypothèse).

Nous pouvons par conséquent approcher la valeur de  $V$  en recourant au portefeuille  $V'$ . La variance de  $V'$  :

$$\sigma_{V'}^2 = \sigma_V^2 - 2\beta\sigma_{V,cv} + \beta^2\sigma_{cv}^2$$

Etant donné que l'utilisation de  $cv$  est censée réduire la variance de la simulation, nous cherchons le  $\beta$  qui minimise  $\sigma_{V'}^2$ . En dérivant la dernière équation par rapport à  $\beta$  et en l'annulant, on obtient :

$$\hat{\beta} = \frac{\sigma_{V,cv}}{\sigma_{cv}^2}$$

En pratique, on ne connaît pas  $\sigma_{V,cv} = \mathbb{E}(CY)$  et  $\sigma_{cv}^2 = \mathbb{E}(C^2)$  mais on peut l'évaluer par la méthode de Monte-Carlo. On procède grâce à un algorithme adaptatif avec au total  $M$  simulations.

Avec les  $M'$  premières, on évalue  $\hat{\beta}$  optimal.

Avec les  $M - M'$  autres, on simule  $Y - \hat{\beta}cv$ , de variance plus petite que  $Y$ .

Reste à savoir comment choisir  $C$ . Cela dépend du payoff.

- Cas des options Vanilla : Le payoff a l'expression actualisé  $Y = e^{(-rT)}f(S_T)$   
Sous les hypothèses de marchés complets,  $\tilde{S}_t$  est une martingale ( dans le cas où il n'y a pas de versement de dividende). Un choix de variable de contrôle naturel est alors  $C = \tilde{S}_T - S_0$ . On a bien  $E(C)=0$ . Le coefficient optimal vaut alors

$$\beta = \frac{Cov(e^{(-rT)}f(S_T), \tilde{S}_T)}{Var(\tilde{S}_T)}$$

On notera que la méthode est d'autant plus efficace que  $Y$  et  $C$  sont corrélés.

- Cas de l'option asiatique :

Le payoff a l'expression suivante :  $P_T^{arith} = (Moyenne_{arith} - K)_+$  De manière générale les moyennes géométriques sont de très bonne variables de contrôle pour les moyennes arithmétiques. Ici, on peut démontrer qu'un choix judicieux pour la variable de contrôle est

$$C = e^{(-rT)}P_T^{geom} - E(e^{(-rT)}P_T^{geom})$$

Cette variable de contrôle est d'autant plus satisfaisante que  $\sigma$  et  $r$  sont petits. On utilisera le fait que  $E(e^{(-rT)}P_T^{geom})$  est explicite dans le modèle de Black et Scholes

## 3 Résultats

### 3.1 Comparaison des prix des différentes options

#### 3.1.1 Comparaison des options entre elles

Les résultats concernant les prix des différentes options d'achat sont logiques. En effet, si nous classons ces options de la moins chère à la plus chère, nous avons en premier l'option vanille, suivi de l'option asiatique et enfin de l'option lookback. Ce classement se comprend de par le type même des payoff associés à ces différentes options. Ainsi, les options offrant le plus d'avantages ou tout simplement moins risquées coûtent plus chères.

#### 3.1.2 Augmentation du nombre de simulations

La simulation par la méthode de Monte Carlo nécessite un grand nombre de simulation pour être pertinente.

L'idée de cette méthode de simulation s'appuie sur la loi des grands nombres, cependant les résultats ne sont donc valables qu'à partir d'un certain nombre de simulations. C'est pourquoi nous observons une convergence beaucoup plus précise et quasiment identique à chaque calcul lorsque le nombre de simulations devient grand. Evidemment, la précision apportée par ce grand nombre de simulations augmente le temps de calcul, il y a donc un juste milieu à trouver si nous nous trouvons sur le marché où nous devons être très réactifs.

#### 3.1.3 Augmentation du nombre de pas dans la simulation

Le nombre de pas du calcul jusqu'à l'échéance de l'option intervient également comme facteur de convergence.

Ainsi nous remarquons que plus le nombre de pas augmente, plus le résultat converge rapidement. En revanche, les temps de calcul sont allongés, ce qui est logique puisqu'il y a plus d'opérations.

### 3.2 Convergence et précision du résultat final

#### 3.2.1 Comparaison : sans et avec la méthode de réduction de la variance

Les techniques de réduction de variance permettent d'obtenir une convergence plus rapide et meilleure vers ce que l'on pourrait penser être la valeur théorique de l'option.

Il n'est donc pas étonnant de constater ce résultat de manière pratique, même si nous avons remarqué que ces observations sont toutefois à nuancer dans notre cadre. De fait, nous avons distingué une différence dans nos résultats mais qui n'était pas toujours flagrante, et qui nécessite également plus de temps de calcul.

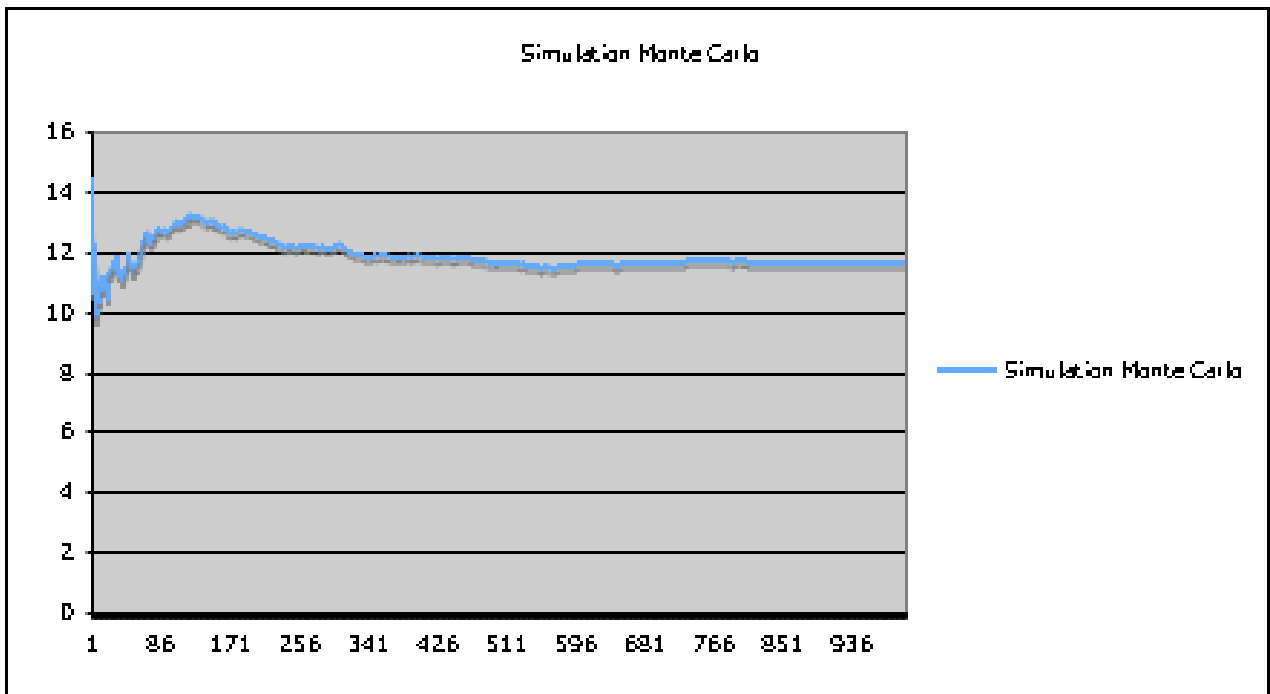
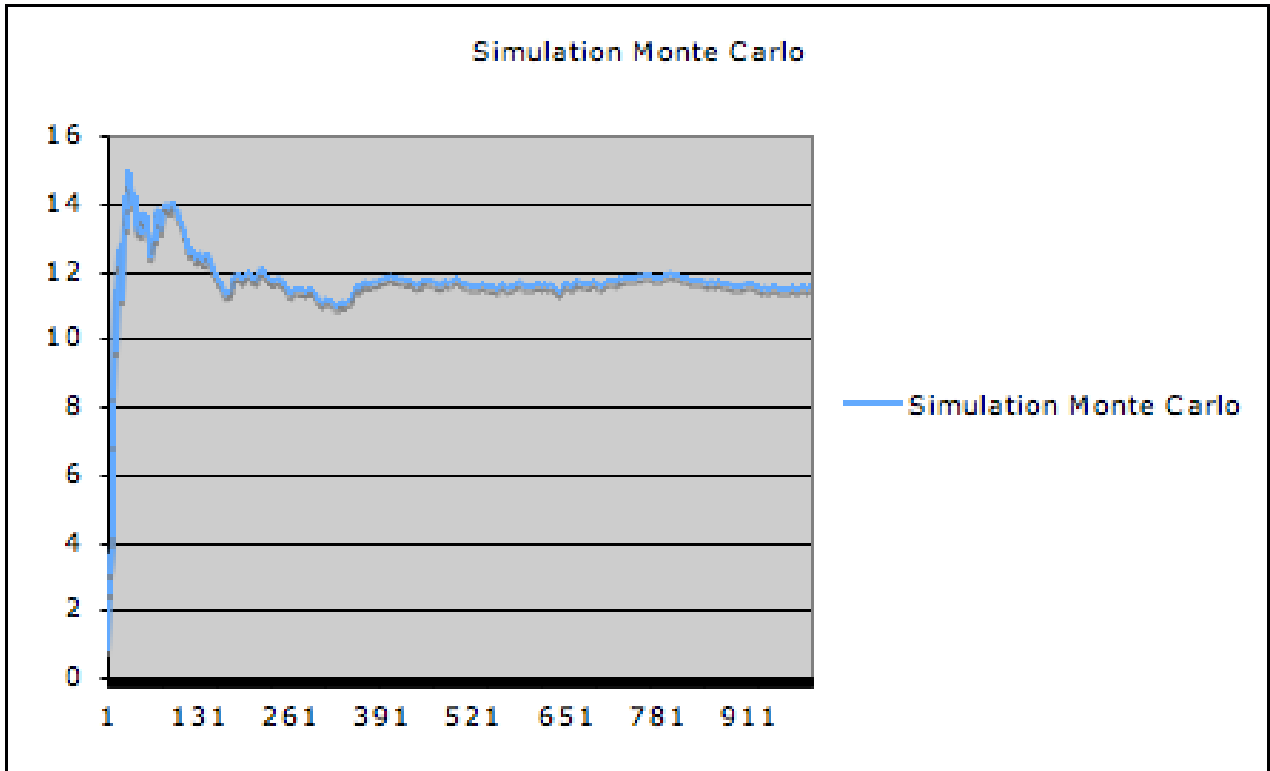
Pour donner des résultats numériques à titre de comparaison, la section suivante propose de visualiser sur un graphe la vitesse de convergence du prix de l'option.

#### 3.2.2 Résultats graphiques associés

Nous nous sommes demandés s'il était vraiment pertinent d'utiliser la technique de réduction. Aussi, les graphiques suivants reprennent une des nombreuses simulations effectuées.

Nous ne traçons pas les convergences de prix avec et sans réduction de variance sur le même graphique car nous avons préféré laisser le choix à l'utilisateur de sélectionner sa méthode plutôt que de systématiquement tracer les deux. Pour des soucis de présentation, nous avons été obligés de tracer les graphes en allant que jusqu'à 1000 simulations afin de visualiser la convergence. Autrement le graphique était trop compressé et l'on n'y voyait rien.

Le graphique ci-dessous représente la convergence du prix de l'option sans la réduction de variance. Tandis que ce second graphique de convergence est issu d'une simulation avec réduction de variance.



Nous remarquons que le prix de l'option dans le second cas semble se stabiliser aux alentours des 256 simulations tandis que sans la réduction de variance il faudrait plutôt environ 500 simulations pour arriver au même résultat. Nous voyons donc tout l'intérêt de cette technique.



### 3.3 Conclusions et remarques sur ces résultats

Finalement, il apparaît évident que la technique de réduction de variance permet de converger beaucoup plus vite vers le prix final de l'option. Elle peut donc se révéler intéressante dans la pratique car elle offre des résultats plus précis.

D'un point de vue général, ce projet a été une excellente première formation au langage VBA qui devrait nous servir en priorité dans notre travail. Le sujet était intéressant et nous a permis de découvrir de nouvelles techniques, une manière de procéder à l'évaluation des options (Monte Carlo) dont nous avons entendu parler mais que nous n'avons jamais implémenté.

Ce fut donc une expérience enrichissante.

## 4 Manuel d'utilisateur

### 4.1 Les input que l'utilisateur doit entrer

Les Inputs du pricer sont les paramètres de marché directement observables, i.e. :

- le cours spot ,
- le taux sans risque ,
- la volatilité du sous-jacent.

Puis nous avons aussi :

- le type d'option ,
- sa maturité ,
- son prix d'exercice ,
- la fréquence des observations liée donc au pas de l'évaluation.

Enfin les paramètres de simulation :

- le nombre de simulations intervenant dans la méthode de Monte-Carlo ,
- la simulation de la loi normale (algorithme d'Acklam ou utilisation de la fonction d'Excel) ,
- la technique de réduction de variance.

### 4.2 Les outputs qui nous donnent les résultats

Les Outputs ou sorties du programme sont :

- le prix final de l'option d'achat ,
- l'erreur calculée sous forme d'écart-type associée à la simulation ,
- un graphe de convergence du prix de l'option suivant les méthodes utilisées.

### 4.3 Les commandes

Les commandes dont se sert l'utilisateur pour effectuer le calcul sont représentées par les boutons de l'interface Excel. Ainsi le bouton intitulé "Pricer" permet de lancer la macro VBA qui effectue tous les calculs.

## 5 Fonctionnalités du programme

### 5.1 Les possibilités en bref

#### 5.1.1 Les différents types d'option

Notre programme permet de pricer trois types d'option, il s'agit des suivantes :

- l'option vanille,
- l'option asiatique,
- l'option lookback.

### 5.1.2 Les deux techniques de réduction de variance

Il est également possible d'obtenir des résultats plus précis grâce aux techniques de réduction de la variance. En effet, l'intervalle de confiance du prix de l'option est plus "étroit", ce qui permet de minimiser l'erreur. Une technique dite de variables antithétiques a été implémentée dans notre programme. L'utilisateur peut également choisir de simuler manuellement (fonction `Acklam`) la loi normale intervenant dans la simulation du mouvement brownien géométrique.

## 5.2 Des contraintes donc des limites

Des contraintes de dépassement de capacité viennent perturber quelques fois les simulations, surtout lorsque le nombre de simulations est très important.

Ces contraintes sont en général intimement liées à l'utilisation du langage VBA qui certes présente un avantage de simplicité et de convivialité avec une interface graphique, mais qui est nettement moins robuste qu'un langage comme le C++.

A titre d'exemple, une feuille Excel ne contient qu'environ 65 000 lignes, une simulation de Monte Carlo à plus de 65 000 réalisations est donc impossible à visualiser graphiquement car nous traçons le graphe après avoir écrit les résultats dans la feuille Excel.

## 6 Bibliographie

Nous vous présentons les principales sources bibliographiques que nous avons utilisé afin de mener à bien ce projet :

*La simulation de Monte Carlo : forces et faiblesses*, ESG Québec, Montréal, F.E. Racicot et R. Theorêt

*Techniques de réduction de variance et estimation*, Finance Quantitative, Paris Université Dauphine

*Principes et méthodes statistiques*, Olivier Gaudoin

*Wikipedia*, internet