

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CARACTÉRISATION DU COMPORTEMENT POST-PIC EN COMPRESSION DU BÉTON  
ARMÉ ET NON ARMÉ, ET EXTENSION AU BÉTON RENFORCÉ DE FIBRES

NATHAN AUBRÉE

DÉPARTEMENT DES GÉNIES CIVIL, GÉOLOGIQUE ET DES MINES  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE CIVIL)

AOÛT 2014

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

CARACTÉRISATION DU COMPORTEMENT POST-PIC EN COMPRESSION  
DU BÉTON ARMÉ ET NON ARMÉ, ET EXTENSION AU BÉTON RENFORCÉ  
DE FIBRES

présenté par : AUBRÉE Nathan

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. BOUAANANI Najib, Ph.D., président

M. MASSICOTTE Bruno, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. BEN FTIMA Mehdi, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. CONCIATORI David, Ph.D., membre

## DÉDICACE

*à Pascaline, Liam et la petite qui s'en vient,*

*à mon père, ma mère, mon frère et ma sœur,*

*Merci pour votre soutien infallible.*

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout d'abord mon directeur de recherche, Pr. Bruno Massicotte, pour la confiance qu'il m'a accordée en m'assignant cette tâche. Sa bonne humeur inconditionnelle et sa disponibilité pendant ces deux années et demie, où l'on a pu échanger longuement, m'ont grandement aidé pour accomplir ce travail et améliorer mes connaissances. Je tiens aussi à le remercier chaleureusement pour son soutien financier tout au long de ce projet qui m'a permis de vivre pleinement cette expérience à l'abri des soucis et du stress. Ces deux années et demie ont été marquées par la naissance de mon fils, Liam, en juin 2013. Cela aurait été sûrement beaucoup plus difficile sans la patience et la compréhension de M. Massicotte. Pour toutes ces raisons, je suis heureux d'avoir croisé son chemin et j'espère que nous resterons en contact dans les années futures.

Mes remerciements vont aussi à mon codirecteur, Mahdi Ben Ftima, et à David Conciatori qui ont toujours été disponibles. Ils m'ont prodigué de précieux conseils pour la réalisation de mes analyses avec le logiciel Abaqus et ont facilité grandement ma compréhension du modèle EPM3D. Cela m'a évité plus d'une fois de longues « prises de tête ».

Je tiens aussi à remercier tous les membres du laboratoire du Groupe de Recherche en Génie des Structures de l'École Polytechnique de Montréal. J'ai une pensée particulière pour Cédric Androuët qui a élaboré le mélange de béton utilisé dans mon programme expérimental et m'a accompagné pendant toute la phase de fabrication des spécimens. Les voyages à l'usine BPDF ont laissé part à de grandes discussions « philosophiques » et me laisseront un agréable souvenir. Merci aussi particulièrement à Gaël Asorin, Patrick Bélanger, David Ek et Xavier Willem qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de mes essais.

Je tiens à remercier toutes les personnes que j'ai pu côtoyer au bureau tout au long de ma maîtrise : William De Broucker, Thomas Minty, Amadou Thiaw, Alexis Lefrançois, Maxime Hubert, Jean-Philippe Ouellette, Jonathan Gleize, Nicola Cordoni, Alex Constantin, Léa Faggio, Maxime Mehous, Maxime Gascon, Jalila Tanji, Michel-Ange Assily Alegre, Véronique Tremblay, ... j'en oublie c'est sûr!

## RÉSUMÉ

Le modèle constitutif de béton *EPM3D* (*Endommagement Progressif Multiaxial en 3 Dimensions*) est développé à l'École Polytechnique de Montréal depuis 1990. Bouzaiene et Massicotte (1995) ont choisi l'approche hypoélastique avec le concept de déformation équivalente et la mise en place d'un paramètre d'endommagement scalaire pour représenter la microfissuration du béton en compression pré-pic. Le comportement post-pic adoucissant, en traction et en compression, est basé sur le concept de conservation de l'énergie de rupture. Dans le contexte des éléments finis, cela requiert la détermination d'un limiteur de localisation des déformations basé sur un module d'adoucissement dépendant de la taille de l'élément du maillage. La formulation du modèle *EPM3D* dans le cas de la compression post-pic devait être révisée. Les problèmes vis-à-vis de la dépendance de la taille du maillage et l'absence de la prise en compte de l'effet du confinement étaient les points les plus importants à améliorer avec comme but principal la modélisation du comportement à la rupture de poteaux en béton armé.

En se basant sur une revue de littérature complète, la liste exhaustive des différents paramètres ayant une influence sur le comportement post-pic en chargement uniaxial et multiaxial a été établie. Dans la suite de cette revue, nous présentons les difficultés de la modélisation d'un matériau adoucissant dans un calcul par éléments finis et le principe du limiteur de localisation mis en place. En s'inspirant des modèles rencontrés dans la littérature, nous proposons donc des modifications de la relation existante en apportant une attention particulière à la bonne représentation du comportement sous charges de confinement. Nous procédons ensuite à la validation du modèle à l'aide d'analyses simples avec le logiciel *ABAQUS* et le module de résolution *Explicit* dont nous présentons les spécificités par rapport à une résolution statique implicite classique. Nous fournissons quelques conseils au lecteur et aux futurs étudiants susceptibles de modéliser des poteaux réels en béton armé avec *EPM3D*.

Enfin, nous avons effectué un programme d'essais pour caractériser le comportement post-pic en compression uniaxiale d'un mélange de béton renforcé de fibres (BRF) dans le but d'envisager la possibilité ou non d'une extrapolation de notre modèle au BRF.

## ABSTRACT

Since 1990, constitutive concrete model *EPM3D* (Multiaxial Progressive Damage in 3 Dimensions) has been developed at Polytechnique Montreal. Bouzaiene and Massicotte (1995) choose the hypoelastic approach with the concept of equivalent deformation and the implementation of a scalar damage parameter to represent the microcracking of concrete in pre-peak compression. The post-peak softening behaviour, in tension and in compression, is based on the concept of conservation of the fracture energy. In the finite elements context, it requires defining a localisation limiter acting on the softening modulus depending on the element size. The formulation of *EPM3D* model in the case of the post-peak compression required revisions. Mesh-dependence problems and the absence of the consideration of the confinement effect were the most important points to improve, with as main goal the modelling of the fracture of the reinforced concrete columns.

With a complete literature review, we try to establish an exhaustive list of the numerous parameters having an influence on the softening behavior under uniaxial and multiaxial loads. In the second part of this review, we exhibit the difficulties of modelling a softening material with finite elements theory and the principle of the set up localization limiter. Inspired by models we met in literature, modifications of the previously established relation are proposed by focusing on a more adequate representation of the behavior under confinement loads. Then we proceed to the validation of the model by means of simple analyses with the software *ABAQUS* and the module of explicit dynamic resolution, called *Explicit*. Also we present its specificities compared with a classic implicit static resolution. We supply some advice to the reader and future students who are susceptible to model real reinforced concrete columns with *EPM3D*.

Finally we made an experimental program to characterize the post-peak behavior in uniaxial compression of a fiber reinforced concrete mixture (FRC) with the aim of considering the possibility or not of an extrapolation of our model for FRC.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE.....	III
REMERCIEMENTS .....	IV
RÉSUMÉ.....	V
ABSTRACT .....	VI
TABLE DES MATIÈRES .....	VII
LISTE DES TABLEAUX.....	XII
LISTE DES FIGURES .....	XIII
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS .....	XX
CHAPITRE 1 INTRODUCTION.....	1
1.1 Généralités.....	1
1.2 Définition du sujet de recherche.....	3
1.3 Objectifs et contexte du mémoire.....	3
1.4 Structure du mémoire .....	3
CHAPITRE 2 COMPORTEMENT EN COMPRESSION DU BÉTON ET MODÉLISATION DE L'ADOUCCISSEMENT.....	5
2.1 Comportement du béton en compression en phase pré-pic.....	5
2.1.1 Bref rappel.....	5
2.1.2 Méso-mécanismes d'endommagement en phase pré-pic et microfissuration .....	7
2.2 Comportement du béton en compression en phase post-pic .....	11
2.2.1 Propagation des fissures en compression .....	11
2.2.2 Types de rupture.....	12
2.2.3 Concept d'un comportement « structural » plutôt que « matériel ».....	15
2.2.4 Tentative d'unification des données expérimentales pour les essais de caractérisation de l'adoucissement dans la littérature .....	16

2.2.5	Paramètres d'influence sur le comportement post-pic en compression uniaxiale .....	18
2.2.6	Influence du confinement latéral.....	26
2.3	Classification des modèles de bétons .....	31
2.3.1	Classification selon l'échelle de modélisation .....	31
2.3.2	Classification selon la théorie utilisée pour le comportement pré-pic .....	33
2.3.3	Classification selon la modélisation de la fissuration .....	34
2.4	Modélisation de l'adoucissement par la méthode des éléments finis.....	35
2.4.1	Instabilité matérielle en mécanique non linéaire.....	35
2.4.2	Mise en évidence du problème d'unicité de la solution lors de la localisation des déformations.....	35
2.4.3	Limiteurs de localisation .....	38
2.5	Limiteur de localisation basé sur la régularisation du module tangent d'adoucissement : théorie de la fissuration diffuse avec conservation de l'énergie de rupture .....	40
2.5.1	Cas de la traction .....	40
2.5.2	Cas de la compression .....	45
CHAPITRE 3 PRÉSENTATION ET MODIFICATIONS DU MODÈLE CONSTITUTIF EPM3D.....		53
3.1	Présentation d' <i>EPM3D</i> .....	53
3.1.1	Introduction .....	53
3.1.2	Différentes approches pour la modélisation de la phase pré-pic.....	54
3.1.3	Définition d'un modèle hypoélastique .....	55
3.1.4	Principe de variable d'endommagement .....	56
3.1.5	Concept de la déformation uniaxiale équivalente .....	57
3.1.6	Critères de rupture.....	58
3.1.7	Autres capacités du modèles .....	61

3.2	Modélisation du comportement post-pic en compression avant modifications .....	62
3.2.1	Définition du paramètre $\delta$ .....	63
3.2.2	Équation de la pente d'adoucissement de Bouzaiene (1995).....	65
3.2.3	Modifications apportées par Ben Ftima .....	67
3.3	Commentaires sur le modèle avant nos modifications.....	69
3.3.1	Prise en compte du confinement .....	69
3.3.2	Commentaire sur la valeur par défaut du paramètre $\delta$ .....	70
3.3.3	Prise en compte de l'influence de $f_c'$ sur la pente post-pic.....	71
3.4	Modifications apportées à EPM3D .....	72
3.4.1	Remise en service du coefficient $\kappa$ .....	72
3.4.2	Note importante sur les enveloppes de rupture .....	74
3.4.3	Incohérence du module de déchargement élastique.....	75
3.4.4	Contrainte résiduelle variable en fonction du confinement .....	76
3.4.5	Proposition d'une nouvelle relation pour $\kappa$ .....	79
3.4.6	Conclusion sur les modifications .....	85
CHAPITRE 4 VALIDATION DU MODÈLE AVEC ABAQUS/EXPLICIT .....		86
4.1	Introduction et définitions .....	86
4.1.1	Introduction à Abaqus .....	86
4.1.2	Introduction à la modélisation par éléments finis pour les problèmes non-linéaires .....	87
4.1.3	Définitions importantes .....	88
4.2	Choix de la méthode d'intégration numérique.....	90
4.2.1	Nécessité et condition d'une analyse quasi-statique avec résolution explicite .....	90
4.2.2	Méthode d'intégration temporelle explicite des différences centrées.....	91
4.2.3	Critère de stabilité .....	93

4.3	Choix du type d'élément .....	94
4.3.1	Type d'élément pour le béton.....	94
4.3.2	Type d'élément pour l'acier et interaction avec les éléments de béton .....	99
4.4	Validation du modèle .....	99
4.4.1	Compression uniaxiale .....	100
4.4.2	Validation de la compression avec confinement actif.....	106
4.4.3	Validation de la compression avec confinement passif .....	111
4.5	Conseils pour la modélisation de poteaux en béton armé .....	116
4.5.1	Paramètres requis pour l'analyse avec <i>EPM3D</i> et <i>ABAQUS/Explicit</i> .....	116
4.5.2	Récapitulatif et démarche pour la modélisation avec <i>EPM3D</i> .....	117
CHAPITRE 5 CARACTÉRISATION DU COMPORTEMENT POST-PIC EN COMPRESSION D'UN BRFP .....		120
5.1	Présentation et définition du cadre expérimental .....	120
5.2	Élaboration du mélange.....	122
5.3	Fabrication des spécimens.....	123
5.4	Instrumentation des spécimens.....	125
5.5	Système de chargement et installation .....	127
5.6	Déroulement des essais .....	129
5.7	Résultats .....	129
5.7.1	Désignation et spécimens rejetés.....	129
5.7.2	Courbes force-déplacement de la presse et premières remarques.....	130
5.7.3	Types de rupture observés.....	135
5.7.4	Courbes contrainte normalisée-déplacement post-pic.....	140
5.7.5	Effet notable sur la phase pré-pic .....	146
CHAPITRE 6 CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS .....		148

6.1	Recommandations sur l'évolution possible du modèle <i>EPM3D</i> en compression post-pic.....	148
6.2	Conclusions sur le programme expérimental .....	150
6.3	Recommandations pour un éventuel futur programme expérimental de compression post-pic sur un BRF.....	150
	RÉFÉRENCES.....	152

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 5.1 – Formulation du BRF 80 MPa (d’après Androuët et al., 2013).....	123
Tableau 5.2 - Récapitulatif des modes de ruptures .....	136

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 - Courbe contrainte-déformation classique du béton.....	1
Figure 2.1 - Courbe contrainte-déformation du béton en compression uniaxiale : a) contrainte normalisée vs déformation axiale et latérale b) contrainte normalisée vs déformation volumique (d'après Bouzaiene, 1995) .....	6
Figure 2.2 - Méso-mécanismes responsables de l'endommagement du béton sous une charge de compression (d'après Van Mier, 1998) .....	9
Figure 2.3 - Schéma pour l'étude de la propagation des fissures à "ailes" ( <i>wing crack growth</i> ) (d'après Horii et Nemat Nasser, 1985) .....	10
Figure 2.4 - Modes de propagations des fissures selon la mécanique de la rupture (Wikipédia) ..	12
Figure 2.5 - Rupture par bande de cisaillement. Série de photos prises successivement le long de la pente d'adoucissement (d'après Van Geel, 1998) .....	13
Figure 2.6 - Éprouvette classique d'un test de compression avec rupture par fendage (d'après Kotsovos, 1983) .....	14
Figure 2.7 – Écrasement de la matrice lors d'un chargement avec une contrainte de confinement de 200MPa pour un béton de résistance uniaxiale de 60 MPa (d'après Dupray et al., 2009) ....	15
Figure 2.8 - Importance relative des zones confinées aux extrémités (en gris foncé) pour des spécimens de différentes longueurs (d'après Van Vliet et Van Mier, 1996).....	17
Figure 2.9 - Courbes de la contrainte relative en fonction de la déformation moyenne pour des élancements variant de 2 à 5.5 : a) Béton ordinaire de 45 MPa b) Béton à haute performance de 90 MPa (d'après Jansen et Shah, 1997).....	18
Figure 2.10 - Preuve de la localisation de la rupture en compression - a) courbes contrainte-déformation - b) courbes contrainte-déplacement post-pic (d'après Van Mier, 1986).....	19
Figure 2.11 - Définition du déplacement $\delta_{in\acute{e}lastique}$ et de l'énergie de rupture en compression selon Jansen et Shah (1997).....	21

Figure 2.12 - Photos et courbes contrainte-déplacement des spécimens testés avec différentes conditions limites (d'après Kotsovos, 1983).....	22
Figure 2.13 - Courbes contrainte normalisée vs déplacement post-pic avec trois dispositifs de chargement différents (plaques d'acier, plaques à « pinceaux » et plaques de téflon) (d'après Van Vliet et Van Mier, 1996).....	24
Figure 2.14 - Influence de la forme de la section sur le comportement en compression (d'après Van Mier et al., 1997).....	25
Figure 2.15 - Évolution de la résistance et de la déformation au pic en fonction du confinement latéral (d'après Massicotte, 2013).....	27
Figure 2.16 - Courbes de contraintes normalisées ( $\sigma/3f_c'$ ) en fonction des déformations normalisées au pic longitudinales ( $\epsilon/3\epsilon_0$ ) et latérales ( $\epsilon/1\epsilon_0$ ) pour des niveaux de confinement différents (en ksi) pour un béton de 5 ksi (34.5 MPa) (d'après Smith, 1989).....	28
Figure 2.17 - Enveloppe de rupture du béton sous sollicitation multiaxiale (d'après Bouzaiene, 1995).....	28
Figure 2.18 – Courbes de compression triaxiale pour un béton de 60 MPa et 92 MPa (d'après Xie et al. 1995).....	30
Figure 2.19 - Modèle en 4 étapes du processus de fissuration dans le béton en compression : influence du confinement sur la contrainte résiduelle (d'après Van Mier, 2009).....	31
Figure 2.20 - Différentes échelles de modélisation pour le béton (d'après Wittman, 1983).....	32
Figure 2.21 - Barre en compression discrétisée en n éléments et loi constitutive bilinéaire.....	37
Figure 2.22 - Mise en évidence du manque d'unicité de la solution en fonction du maillage.....	37
Figure 2.23 - Différence entre le concept de fissuration fictive pour les métaux et pour le béton (d'après Bouzaiene, 1995).....	41
Figure 2.24 - Calcul de l'énergie de rupture en traction $G_f$ avec la courbe d'un essai de traction directe (d'après Bouzaiene, 1995).....	42
Figure 2.25 – Équivalence entre le modèle de fissuration fictive (fissuration discrète) et le modèle de fissuration par bande (fissuration répartie) (d'après Bhattacharjee, 1993).....	44

Figure 2.26 - Courbe en traction dans <i>EPM3D</i> (d'après Massicotte et al., 2012) .....	45
Figure 2.27 - Modèle de Markeset et Hillerborg (1995) .....	48
Figure 2.28 - Courbe contrainte-déformation pour le béton confiné (d'après Binici, 2005) .....	50
Figure 3.1 - Concept de la déformation uniaxiale équivalente dans le cas d'un chargement biaxial (d'après Darwin et Pecknold, 1977).....	58
Figure 3.2 - Forme d'une enveloppe de rupture tridimensionnelle usuelle pour le béton .....	60
Figure 3.3 - Représentation des contraintes octaédriques dans le plan déviatorique de coordonnée hydrostatique $\sigma_m$ .....	60
Figure 3.4 - Calcul de la contrainte maximale en compression multiaxiale à l'aide de l'enveloppe de rupture (d'après Bouzaiene, 1995) .....	61
Figure 3.5 - Courbe contrainte-déplacement post-pic des essais de Van Mier (1986) .....	63
Figure 3.6 - Représentation du déplacement post-pic inélastique $\delta_{pp}'$ .....	64
Figure 3.7 - Courbes contrainte normalisée vs déplacement post-pic avec déduction de la composante élastique (d'après Bouzaiene, 1995).....	65
Figure 3.8 - Courbe contrainte-déformation en compression pour le comportement post-pic dans <i>EPM3D</i> (d'après Massicotte et al., 2012) .....	68
Figure 3.9 – Définition de $G_{fcu}$ .....	69
Figure 3.10 - Courbes contrainte normalisée au pic vs déplacement post-pic pour différents rapports d'élancement et systèmes de chargement (d'après Van Mier et Van Vliet, 1997).....	71
Figure 3.11 - Analyses de compression triaxiale avec différents niveaux de confinement réalisées sur un simple élément cube avec l'enveloppe de rupture de Hsieh et al. (1982).....	74
Figure 3.12 - Analyses de compression triaxiale avec différents niveaux de confinement réalisées sur un simple élément cube avec l'enveloppe de rupture de Willam et Warnke (1975) .....	75
Figure 3.13 - Contrainte résiduelle normalisée vs contrainte de confinement normalisée (d'après Samani et Attard, 2012) .....	77
Figure 3.14 - Courbe de $\gamma$ en fonction de $\sigma_{min}f_c'$ avec $\gamma_u = 0.2$ .....	79

Figure 3.15 - Comparaison entre la nouvelle et l'ancienne relation entre $\kappa$ et $R_t$ .....	80
Figure 3.16 - Représentation de $\kappa$ en fonction de $a$ .....	81
Figure 3.17 - Courbes contrainte-déformation issues de l'article de Smith et al. (1989) pour un béton de 34.5 MPa avec plusieurs valeurs de confinement .....	82
Figure 3.18 - Courbes contrainte-déformation issues de l'article de Xie et al. (1995) pour un béton de 63 MPa avec plusieurs valeurs de confinement .....	82
Figure 3.19 - Courbes contrainte-déformation issues de l'article de Xie et al. (1995) pour un béton de 92 MPa avec plusieurs valeurs de confinement .....	83
Figure 3.20 - Évolution d' $E_d/E_{du}$ en fonction du ratio de confinement $a$ pour les trois bétons considérés (en bleu la courbe expérimentale, en rouge la courbe calculée avec <i>EPM3D</i> et la nouvelle version de $\kappa$ ) .....	84
Figure 4.1 - Amplitude lisse pour le déplacement imposé.....	93
Figure 4.2 - Éléments disponibles dans <i>ABAQUS/Explicit</i> (d'après.....)	95
Figure 4.3 - Modes de déformations nulles pour l'élément C3D8 selon l'axe I (d'après Flanagan et Belytschko, 1981).....	98
Figure 4.4 - Configurations pour la validation de l'effet de la longueur et de la sensibilité au maillage .....	101
Figure 4.5 - Conditions limites appliquées et désignation des surfaces du spécimen de ratio d'élançement de 0.5.....	102
Figure 4.6 - Courbes contrainte-déformation pour les 9 configurations : $h/d = 0.5$ (en bleu), 1 (en rouge) et 2 (en vert).....	103
Figure 4.7 - Courbes force-déplacement pour les 9 configurations : $h/d = 0.5$ (en bleu), 1 (en rouge) et 2 (en vert) .....	103
Figure 4.8 – Courbes contraintes normalisées vs déplacement post-pic : a) sans et b) avec prise en compte du déchargement élastique .....	104
Figure 4.9 - Localisation des déformations dans une rangée d'éléments pour le spécimen de ratio 1 et pour les trois maillages différents .....	104

Figure 4.10 - Vérification de l'indépendance du maillage avec deux types d' <i>Hourglass control</i> : a) <i>Enhanced</i> et b) <i>Relax Stiffness</i> .....	105
Figure 4.11 - Smith et al. (1989), béton de 35 MPa.....	107
Figure 4.12 - Xie et al. (1995), béton de 63 MPa.....	108
Figure 4.13 - Xie et al. (1995), béton de 92 MPa.....	108
Figure 4.14 - Trois maillages différents pour l'étude de l'indépendance vis-à-vis du maillage en présence de confinement actif .....	110
Figure 4.15 - Effets de la taille du maillage en présence de confinement actif sur les essais de Xie et al. (1995) avec le béton de 63 MPa.....	111
Figure 4.16 - Répartition de la contrainte normale de confinement sur l'axe $x$ ( $\sigma_{11}$ ) dans un poteau circulaire et carré.....	112
Figure 4.17 - Modélisation d'un poteau circulaire en béton armé (ici avec un espacement entre les étriers de 50 mm).....	113
Figure 4.18 - Courbes force-déplacement avec confinement passif : en bleu, les spécimens avec une section d'étrier de 100 mm <sup>2</sup> , en rouge 200 mm <sup>2</sup> et en vert 300 mm <sup>2</sup> .....	114
Figure 4.19 - Influence du temps d'application de la charge.....	115
Figure 4.20 - Influence de la taille du maillage pour un temps d'application de charge fixe.....	116
Figure 5.1 - Récapitulatif du nombre de spécimens et des différents paramètres.....	121
Figure 5.2 - Photos des coffrages pour les spécimens de sections carrées coulée horizontalement .....	124
Figure 5.3 – Détail de l'instrumentation des spécimens .....	126
Figure 5.4 - Photo du montage d'un spécimen cylindrique de 150 mm de diamètre et de rapport d'élançement 2 sur la presse Instron .....	128
Figure 5.5 - Désignation des spécimens.....	129
Figure 5.6 - Courbes force-déplacement de la presse des spécimens de section carrée coulés horizontalement avec $a = 300$ mm .....	131

Figure 5.7 - Courbes force-déplacement de la presse des spécimens de section carrée coulés verticalement avec $a = 300$ mm .....	131
Figure 5.8 - Courbes force-déplacement de la presse des spécimens de section circulaire coulés verticalement avec $d = 300$ mm .....	131
Figure 5.9 - Courbes force-déplacement de la presse des spécimens de section carrée coulés horizontalement avec $a = 150$ mm .....	132
Figure 5.10 - Courbes force-déplacement de la presse des spécimens de section carrée coulés verticalement avec $a = 150$ mm .....	132
Figure 5.11 - Courbes force-déplacement de la presse des spécimens de section circulaire coulés verticalement avec $d = 150$ mm .....	132
Figure 5.12 – Rupture fragile proche du fendage. Vues de CARH_A150_L300-3.....	138
Figure 5.13 – Rupture fragile en bande de cisaillement. Vues de CARH_A300_L1200-1 .....	138
Figure 5.14 - Rupture pseudo-fragile avec une seule macrofissure. Vues de CARV_A150_L600-1 .....	138
Figure 5.15 - Rupture pseudo-fragile avec plusieurs macrofissures. Vues de CARV_A150_L600-2.....	139
Figure 5.16 - Rupture ductile avec une seule macrofissure. Vues de CARV_A150_L300-3.....	139
Figure 5.17 – Rupture ductile avec plusieurs macrofissures : Vues de CYL_D300_L600-3.....	139
Figure 5.18 - Prise en compte des données fournies par les capteurs LP en phase post-pic sur la face Nord du spécimen CARV_A300_L600-1 .....	141
Figure 5.19 - Courbes contrainte normalisée-déplacement post-pic pour les spécimens de longueur 300 mm.....	142
Figure 5.20 - Courbes contrainte normalisée-déplacement post-pic pour les spécimens de longueur 600 mm.....	142
Figure 5.21 - Courbes contrainte normalisée-déplacement post-pic pour les spécimens de longueur 1200 mm.....	142

Figure 5.22 - Comparaison de la superposition des courbes quand on utilise le déplacement post-pic ou la déformation post-pic en ordonnée .....	143
Figure 5.23 – Définition des paramètres $\delta$ et $\gamma$ pour le modèle EPM3D.....	145
Figure 5.24 - Courbes contrainte normalisée-déplacement post-pic inélastique pour des spécimens de rapports d'élanement de 2 à 4 avec un BHF de 90 MPa (Jansen et Shah, 1997).....	146
Figure 5.25 - Courbes contraintes-déformations pré-pic pour les spécimens de section carrée coulés horizontalement.....	147
Figure 5.26 - Courbes contraintes-déformations pré-pic pour les spécimens de section carrée coulés verticalement .....	147
Figure 5.27 - Courbes contraintes-déformations pré-pic pour les spécimens de section cylindrique coulés verticalement.....	147

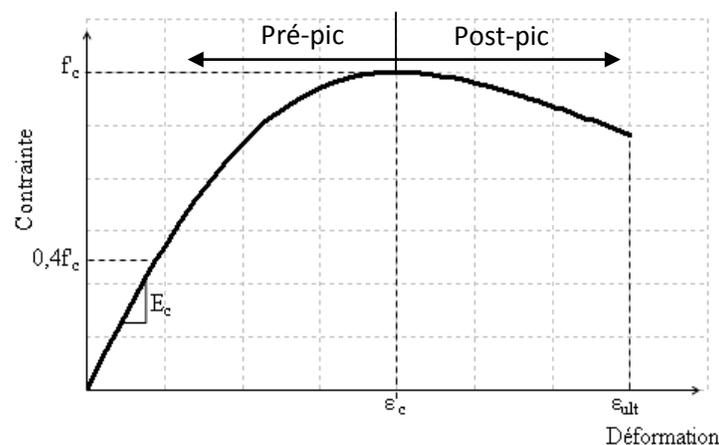
## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

BFUP	Béton fibré à ultra-haute performance
BO	Béton ordinaire
BPDL	Entreprise Béton Préfabriqué Du Lac
BRF	Béton renforcé de fibres
BRFHP	Béton renforcé de fibres à haute performance
EPM3D	Endommagement Progressif Multiaxial Tridimensionnel
	Nom du modèle constitutif utilisé dans les travaux de ce mémoire
MGA	<i>Melinex-Grease-Aluminium</i> , dispositif de limitation de friction pour les plaques de chargement d'une presse

## CHAPITRE 1 INTRODUCTION

### 1.1 Généralités

Les codes de conception de structures en béton armé considèrent pour la détermination de la résistance ultime une certaine « portion » de la courbe post-pic du béton. Pour les codes canadiens, il est admis que la déformation à l'ultime pour du béton normal est égale à  $\epsilon_{ult} = 0.0035$  ce qui correspond à une déformation post-pic (la déformation au pic  $\epsilon_c$  pour du béton normal étant d'environ 0.0022). Par conséquent pour tous les calculs et évaluation de structures jusqu'à l'ultime, la bonne formulation de la branche descendante en compression post-pic du diagramme contrainte-déformation est essentielle. Ce phénomène appelé « adoucissement » se traduit par une perte plus ou moins brusque de la capacité portante du béton une fois le pic de résistance passé tout en observant une augmentation des déformations (Figure 1.1). Les codes pour la conception des structures en béton armé comme la norme canadienne CSA-A23.3 ou le code européen CEB-FIP 2010 se contentent souvent de définir la totalité de la courbe contrainte-déformation par une seule et même équation dite à formulation totale. Cela conduit comme nous le verrons à des problèmes d'unicité de la solution vis-à-vis du maillage dans une analyse par éléments finis.



**Figure 1.1 - Courbe contrainte-déformation classique du béton**

Bien que les recherches principalement effectuées dans les années 1990 aient permis de bien appréhender ce phénomène, il est encore de nos jours très difficile de le modéliser tant il est complexe. De multiples paramètres liés au matériau mais aussi aux conditions externes doivent

être pris en compte pour obtenir des résultats fidèles à la réalité. En effet comme nous le verrons, le phénomène d'adoucissement n'est pas lié uniquement aux paramètres intrinsèques du matériau. Les mécanismes de microfissuration menant à la rupture du béton en compression sont bien connus et documentés notamment grâce aux multiples campagnes d'essais menées dans les années 80-90. Mais leur modélisation est encore limitée due à la difficulté dans l'obtention des paramètres d'entrée des différents modèles. Il n'existe à ce jour aucune formulation qui fait l'unanimité et les chercheurs peinent encore à trouver un accord sur la définition de certains paramètres. Il est aussi très difficile de compiler et unifier les résultats des différents programmes expérimentaux présents dans la littérature car les conditions des essais diffèrent beaucoup trop d'un laboratoire à un autre. Nous serons donc confrontés à des choix quant à la philosophie et à la tendance que nous voudrions imposer à notre modèle. Cela se traduira par différentes simplifications du problème réel.

À l'École Polytechnique de Montréal, un modèle constitutif tridimensionnel de béton a été élaboré au début des années 90 afin de profiter de la puissance grandissante des machines de calculs et des nouvelles méthodes d'analyses par éléments finis. Ce modèle a pour but d'effectuer des analyses de structures en béton armé. Cela nécessite une approche macroscopique du béton. Il n'est donc pas question de modéliser le matériau à l'échelle du grain de ciment ou même à l'échelle du granulats comme cela peut être le cas dans des modèles traitant de la microstructure du béton. Ici le matériau est considéré comme un matériau homogène avec des propriétés globales. De plus, les paramètres d'entrée du modèle se doivent de rester en petit nombre et simple d'obtention afin de lui préférer une utilisation la plus ergonomique qui soit.

Enfin le comportement adoucissant post-pic en compression du béton est difficilement modélisable à l'échelle macroscopique car, comme nous le verrons dans cet ouvrage, la localisation de la rupture en compression crée des problèmes d'instabilités matérielles au sein d'une analyse par éléments finis. Dans le modèle existant, on a fait le choix d'un raisonnement sur l'énergie de rupture en compression analogue à celui de la modélisation de l'adoucissement en traction mais avec quelques spécificités liées notamment à la prise en compte du confinement.

## 1.2 Définition du sujet de recherche

Le sujet de ce mémoire s'énonce ainsi : caractérisation du comportement post-pic en compression du béton armé et non armé, et extension au béton renforcé de fibres. Cette partie du modèle datait des premiers travaux de Bouzaiene (1995) et n'était plus d'actualité. Les résultats étaient trop dépendants du maillage et la prise en compte du confinement n'était pas optimale, voire inexistante suite aux modifications de Ben Ftima (2013).

## 1.3 Objectifs et contexte du mémoire

Ce mémoire s'inscrit donc dans une logique d'amélioration continue du modèle *EPM3D* et fait suite aux travaux effectués dans les deux thèses de doctorat de Bouzaiene (1995) et de Ben Ftima (2013). Récemment les travaux de Nour (2005) ont pu rendre le modèle plus efficace en ce qui concerne la modélisation du raidissement en traction du béton armé. Ben Ftima et Massicotte (2004) ont assuré la portabilité du modèle qui a pu être implanté dans le logiciel de calcul par éléments finis, ABAQUS/Explicit. Ce mémoire a pour but d'approfondir un des points abordés dans ces différentes thèses qui est resté en suspens. En effet dans les conclusions et recommandations de la thèse de Bouzaiene (1995), l'auteur admet que la loi constitutive qu'il a mise en place pour la modélisation de l'adoucissement du béton, en traction et en compression, devrait dans l'idéal « assurer une meilleure représentativité du phénomène de localisation de la rupture ». Les conclusions de sa thèse montrent que le modèle doit encore s'améliorer dans la simulation de la phase post-pic pour le béton armé (prise en compte du confinement passif). Pour une colonne de béton non armé, ne comportant pas d'étriers, on obtient un comportement post-pic proche mais qui peut être aussi amélioré. C'est pourquoi ce mémoire s'attachera à reprendre la modélisation du comportement post-pic au commencement, c'est-à-dire que nous suivrons une démarche en progression pour aller du plus simple au plus compliqué.

## 1.4 Structure du mémoire

Dans un premier temps au chapitre 2, nous ferons un bref rappel des mécanismes d'endommagement du béton en phase pré-pic qui mènent à la rupture en compression. Ensuite nous

parcourrons la littérature à la recherche de tous les facteurs qui peuvent avoir une influence sur le comportement post-pic du béton en compression. Nous nous intéresserons aussi aux difficultés de la modélisation d'un matériau adoucissant dans une analyse par éléments finis. Nous présenterons enfin des modèles déjà existants qui définissent la courbe contrainte-déformation dans sa totalité en adoptant le principe de conservation de l'énergie de rupture en compression. Au chapitre 3, nous définirons les principaux aspects du modèle constitutif *EPM3D* et nous ferons un état des lieux en ce qui concerne la modélisation du comportement post-pic en compression. Nous proposerons alors des modifications pour tenir compte des différents phénomènes mis en avant au chapitre 2. Au chapitre 4, nous procéderons à la validation de notre modèle en présentant un certain nombre d'analyses par éléments finis à la géométrie volontairement très simple pour vérifier son comportement adéquat et son indépendance vis-à-vis du maillage. Ces analyses sont tout de même assez complexes notamment à cause du schéma d'intégration utilisé et nous détaillerons les aspects théoriques abordés. La validation de l'effet du confinement actif et passif constituera le point principal de ce chapitre. À la fin du chapitre 4, nous émettrons une liste de conseils pour l'utilisateur qui souhaite modéliser le comportement post-pic en compression de colonnes en béton armé avec variation du taux de confinement (espacement et aire des étriers variables). Au chapitre 5, nous présenterons les résultats d'un programme expérimental mené au laboratoire de Structures afin de caractériser le comportement post-pic en compression uniaxiale d'un mélange de béton fibré utilisé dans différents projets de recherche à l'École Polytechnique de Montréal. L'accent sera mis sur la possibilité ou non de la définition d'une énergie de rupture en compression pour le béton fibré. Enfin nous concluons au chapitre 7 par quelques recommandations pour améliorer encore le travail effectué dans ce mémoire et pour la réalisation de futurs programmes expérimentaux.

## CHAPITRE 2    COMPORTEMENT EN COMPRESSION DU BÉTON ET MODÉLISATION DE L'ADOUCCISSEMENT

Dans un premier temps, nous ferons une revue de littérature sur les différents mécanismes entrant en jeu lors de la compression du béton. Ces mécanismes sont microscopiques lors de la phase pré-pic et deviennent macroscopiques en phase post-pic. Nous nous intéresserons plus particulièrement au comportement adoucissant du béton en essayant de donner une liste exhaustive des différents paramètres à prendre en compte et de caractériser leurs influences. La deuxième partie de cette revue portera sur la modélisation numérique du béton, et plus particulièrement de la phase d'adoucissement post-pic. Nous présenterons ainsi les difficultés liées à la présence d'un module tangent négatif dans une analyse par éléments finis et les moyens qui ont été mis en œuvre pour les contourner. À cette occasion, certains modèles basés sur le concept de conservation de l'énergie de rupture dont nous nous sommes inspirés seront aussi présentés.

Nous tenons à préciser que cette revue de littérature reprend en grande partie les aspects abordés dans la thèse de doctorat de Bouzaiene (1995) puisque c'est cette thèse qui est à l'origine du modèle *EPM3D*.

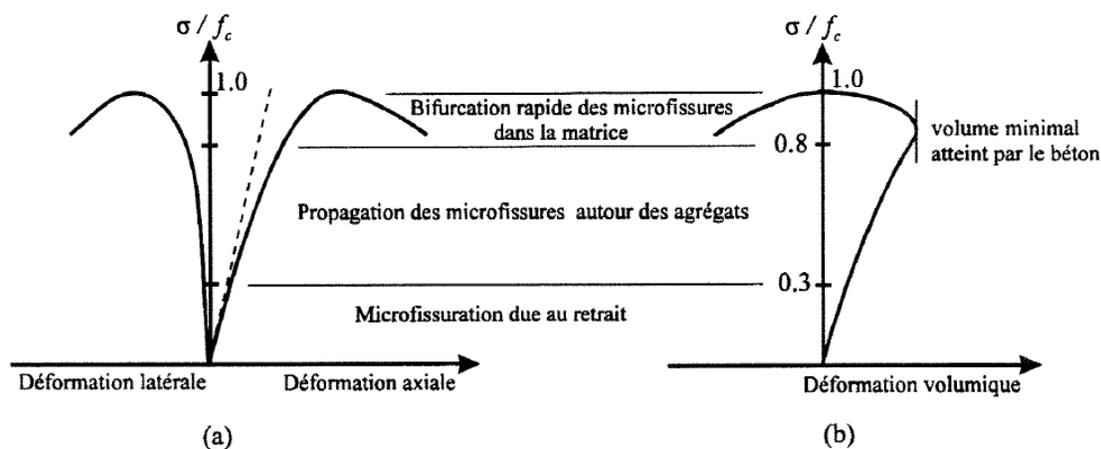
### 2.1 Comportement du béton en compression en phase pré-pic

#### 2.1.1 Bref rappel

Avant d'analyser le comportement post-pic du béton en compression, il faut avoir une bonne connaissance des étapes par lesquelles passe le matériau avant de se rendre au pic de charge. L'analyse et la modélisation du béton en phase pré-pic est déjà un travail rendu très difficile par la complexité de la microstructure du matériau. Cette dernière se compose d'éléments aux dimensions et aux caractéristiques mécaniques différentes. Les zones d'interface entre ces différents constituants ont un rôle très important dans les mécanismes responsables de l'endommagement.

Le béton en compression uniaxiale se comporte d'abord de manière linéaire élastique jusqu'à environ 30% de sa résistance  $f_c'$ . Les seules fissures qui peuvent être présentes à ce stade

sont des microfissures généralement causées par le retrait mais non par la sollicitation mécanique. Au-delà de 30% de  $f_c'$ , le béton devient non linéaire. Pour une analyse par éléments finis, cela se traduit par le fait que la matrice constitutive qui relie le vecteur des contraintes et le vecteur des déformations n'est plus une matrice à coefficients constants. Sur la Figure 2.1, la courbe contrainte-déformation axiale s'écarte de la droite en pointillés pour  $\frac{\sigma}{f_c'} \geq 0.3$ . Ce comportement est dû à l'apparition de microfissures réparties sur l'ensemble du volume du matériau dont nous verrons les causes au paragraphe suivant. Le matériau est toujours considéré isotrope.



**Figure 2.1 - Courbe contrainte-déformation du béton en compression uniaxiale : a) contrainte normalisée vs déformation axiale et latérale b) contrainte normalisée vs déformation volumique (d'après Bouzaiene, 1995)**

Au-delà de 80% de la charge maximale, le matériau devient anisotrope (ses propriétés mécaniques seront différentes selon l'axe considéré). Les microfissures de fendage se propagent rapidement et de façon préférentielle, c'est-à-dire parallèlement à la direction de la contrainte maximale de compression. On représente souvent le béton comme un matériau orthotrope à cause de cette orientation préférentielle. L'orthotropie est un cas particulier d'anisotropie où un matériau présente des propriétés différentes suivant deux composantes perpendiculaires (ex. : le bois).

On peut voir sur la Figure 2.1b) que la déformation volumique atteint un minimum entre 80% et 100% de  $f_c'$  pour ensuite augmenter très rapidement. Ce phénomène de dilatance, appelé « *inelastic dilatancy* » en anglais, est propre au béton. Il est dû à l'expansion rapide des microfissures de fendage dans les directions non confinées. On observe alors une forte

augmentation des déformations latérales vis-à-vis des déformations axiales. Le coefficient de Poisson augmente de manière exponentielle.

Au pic de charge  $f_c'$ , on a un matériau très endommagé, multifissuré et instable. Généralement cela se traduit par l'apparition plus ou moins rapide d'une microfissure due à la coalescence des microfissures. On observe habituellement une perte de charge accompagnée d'une augmentation des déformations, phénomène dit d'adoucissement ou « *softening* » en anglais dont la compréhension et la modélisation sont les buts de ce mémoire.

Enfin on peut émettre une remarque quant à l'apparition de la microfissure. En effet pour certains, la microfissure apparaît au pic de résistance alors que pour d'autres elle se produit un peu après le pic. On pourrait penser que ceci n'a pas forcément d'une grande importance mais en réalité, l'apparition de la microfissure marque la fin d'un comportement dit « matériau » et le début du comportement dit « structural » pour l'échantillon. Ceci s'accompagne d'un changement drastique quant à la philosophie à adopter pour la modélisation. L'identification du passage d'un comportement à un autre est donc primordiale et ne fait toujours pas l'unanimité. Cependant dans ce mémoire nous considérerons que le matériau entre dans un comportement structural dès le pic de résistance.

### **2.1.2 Mécanismes d'endommagement en phase pré-pic et microfissuration**

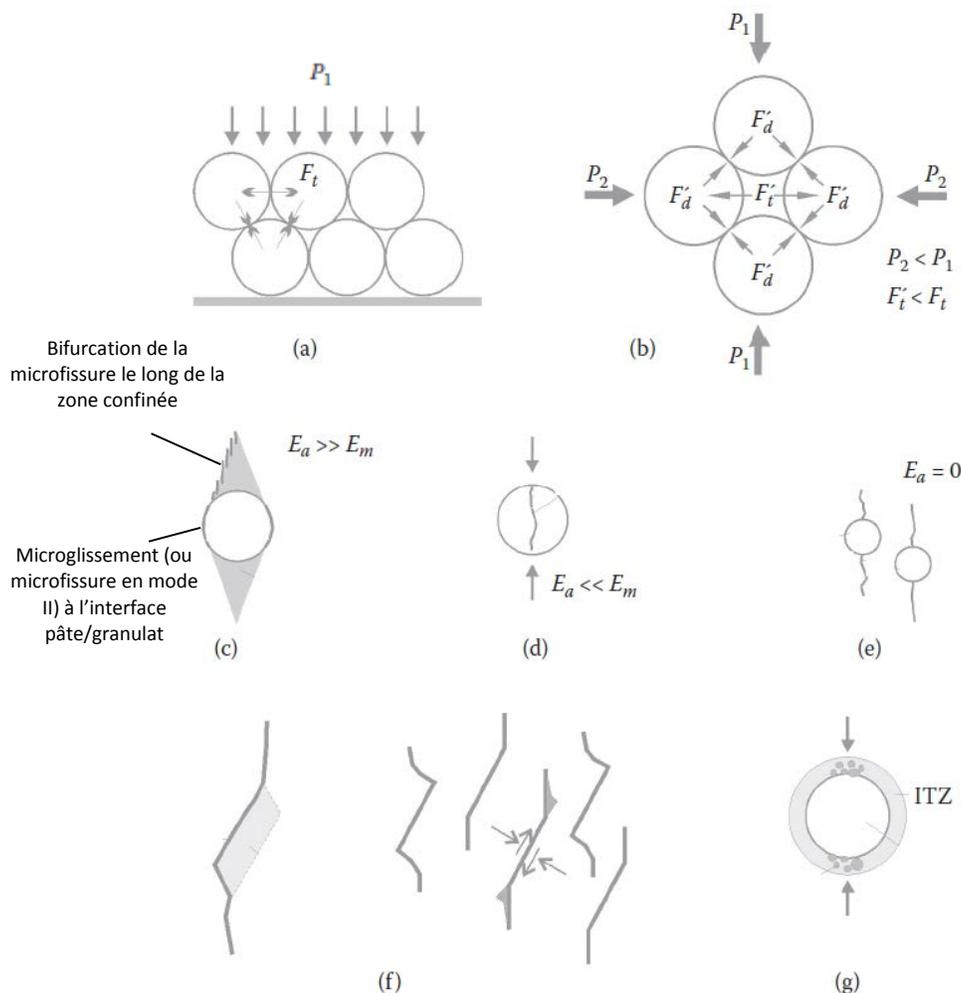
Plusieurs chercheurs se sont intéressés aux mécanismes d'endommagement en compression à l'échelle mésoscopique afin de tirer des conclusions pouvant être exploitables à l'échelle macroscopique. Il existe donc une multitude de « mécanismes » mis en avant dans la littérature qui sont responsables de la microfissuration observée dans la phase pré-pic. Ils sont représentés à la Figure 2.2.

Considérons le béton comme un amas de particules sphériques comme à la Figure 2.2a sous une charge de compression externe  $P_1$ . Des forces de traction horizontales  $F_t$  se développent entre les particules à cause des surfaces de contact inclinées. Ces forces de traction sont responsables de ce que l'on appelle le fendage. Si maintenant on applique une force latérale de confinement ( $P_2 < P_1$ ) comme à la Figure 2.2b, les forces de fendages vont être diminuées ( $F_t' < F_t$ ). Cela explique pourquoi les microfissures de fendage se développent plus difficilement quand le béton est confiné.

L'effet de dilatance est ainsi retardé. Par conséquent la dégradation du module tangent est plus lente. Le béton confiné a une meilleure résistance en compression et permet de plus grandes déformations pré-pic dans la direction de la contrainte majeure de compression.

Le deuxième mode d'endommagement principal en phase pré-pic est représenté sur la Figure 2.2c. Des microfissures dues aux microglissements à l'interface pâte/granulat apparaissent. Elles bifurquent dans la matrice en suivant un cône formé au-dessus et en-dessous de l'agrégat qui sont des zones de confinement triaxial. En effet quand on vient exercer une pression sur l'ensemble pâte/granulat, des forces de frottement se créent à l'interface sur le dessus et le dessous des granulats. De ce fait les zones grisées sur la Figure 2.2c sont plus résistantes que les zones latérales. La propagation de ces microfissures dans la pâte se fera en mode II (cisaillement) (voir Figure 2.4) et dépend fortement de l'état de contrainte appliqué. Leur apparition autour des inclusions (agrégats) est quasi aléatoire et se répartit sur l'ensemble du volume. Notons que ce cas de figure est possible seulement quand le granulat a un module d'Young ( $E_g$ ) plus grand que celui de la matrice ( $E_m$ ). Dans le cas où  $E_g < E_m$  (Figure 2.2d) pour des bétons légers par exemple, des fissures de fendages vont se développer directement dans le granulat.

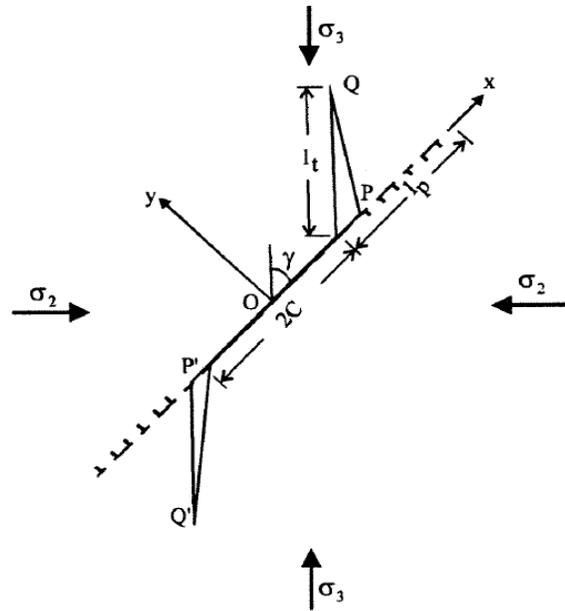
S'il y a présence de pores au sein de la matrice (Figure 2.2e), en suivant le principe de la mécanique de la rupture classique et en analysant le champ de contrainte autour d'un trou dans une plaque (problème courant de la mécanique des milieux continus, Timoshenko et Goodier, 1970), on sait que des contraintes de traction vont se développer au-dessus et au-dessous du pore. Ceci va créer des fissures en mode I de part et d'autre du pore.



**Figure 2.2 - Méso-mécanismes responsables de l'endommagement du béton sous une charge de compression (d'après Van Mier, 1998)**

Sur la Figure 2.2f, on trouve l'un des méso-mécanismes très connu de la littérature qui est la propagation des microfissures présentes initialement dans la pâte de ciment ou à l'interface pâte/granulat. Elles sont plus ou moins inclinées par rapport à la direction principale de la charge et à chaque pointe de fissure apparaissent des « ailes ». Ce problème, appelé « *wing crack growth* » dans la littérature (Figure 2.3), que l'on peut traduire par la propagation des fissures à ailes. Il a notamment été étudié par Horii et Nemat Nasser (1986) et Ashby et Hallam (1986) pour des matériaux fragiles en compression comme la roche, la céramique ou la glace. Ces études ont ensuite été adaptées au béton et sont devenues des références dans la théorie de l'endommagement. On a pu démontrer qu'il existait une transition entre deux modes d'endommagement conditionnés par le

niveau de confinement latéral. Ainsi sous l'effet d'une charge de compression et d'un confinement faible, la fissure aura tendance à se propager en mode I par extension des ailes alors que pour un confinement fort, la propagation s'effectuera en mode II par glissement des lèvres de la fissure principale. Sachant que pour le mode par glissement des lèvres le frottement est intense, ceci constitue une autre explication du comportement plus « ductile » du béton lorsqu'il est confiné (déformation et contrainte au pic plus élevées).



**Figure 2.3 - Schéma pour l'étude de la propagation des fissures à "ailes" (*wing crack growth*) (d'après Horii et Nemat Nasser, 1985)**

Enfin le dernier phénomène responsable de l'endommagement du béton que nous mettrons en lumière ici est celui de l'écrasement des zones poreuses d'interface pâte/granulat, appelées ITZ (*Interface Transition Zone*) (Figure 2.2g). Il ne peut survenir qu'en cas d'une très forte contrainte hydrostatique au sein du matériau. Il a notamment été rapporté par Van Geel (1998). Bouzaiene (1995) en avait fait l'hypothèse en parlant de détérioration de la liaison pâte-granulat lors de ses essais de compression triaxiale.

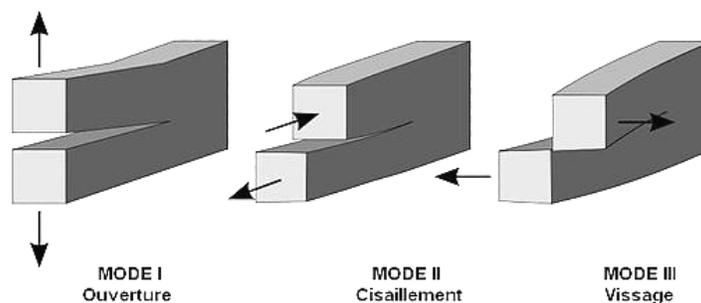
## 2.2 Comportement du béton en compression en phase post-pic

Ainsi l'étude du comportement post-pic du béton en compression correspond à l'étude d'un matériau très endommagé et instable ce qui rend le problème complexe. Le comportement post-pic en compression est souvent caractérisé par une pente plus ou moins inclinée traduisant le phénomène dit d'adoucissement. Il est admis généralement que les déformations après le pic de résistance se localisent dans une zone en bande de cisaillement mais cela reste sujet à controverse. Dans ce paragraphe, nous allons donc dans un premier temps définir les différents types de rupture possibles pour le béton à partir des sollicitations qu'il subit. Nous essaierons de définir le comportement post-pic en compression uniaxiale d'éprouvettes de béton en mettant en lumière les principaux facteurs d'influence : la résistance, les conditions limites, l'effet de la longueur et la forme des spécimens. Puis nous nous intéresserons à l'influence du confinement latéral dans les cas de chargement biaxiaux ou triaxiaux.

### 2.2.1 Propagation des fissures en compression

La rupture en compression du béton est beaucoup plus complexe que la rupture en traction. En effet la fissuration en compression est une combinaison des modes I et II définis par la mécanique de la rupture classique (Griffith, 1921) (Figure 2.4). Le mode I est présent dans les microfissures de fendages réparties sur tout le volume. C'est aussi le mode qui gouverne la propagation des « ailes » de la fissure d'Horii et Nemat Nasser (Figure 2.3). Le mode II qui correspond à une rupture en cisaillement est présent dans la partie centrale de la fissure d'Horii et Nemat Nasser (de longueur  $2C$  sur la Figure 2.3) et dans les fissures d'interface pâte/granulat. Le mode II est le mode dominant dans les macrofissures en bande de cisaillement en post-pic.

De plus, la rupture en compression s'accompagne de déformations latérales importantes dues dans un premier temps aux microfissures de fendage dans la phase pré-pic, puis aux macrofissures en bande de cisaillement dans la phase post-pic.



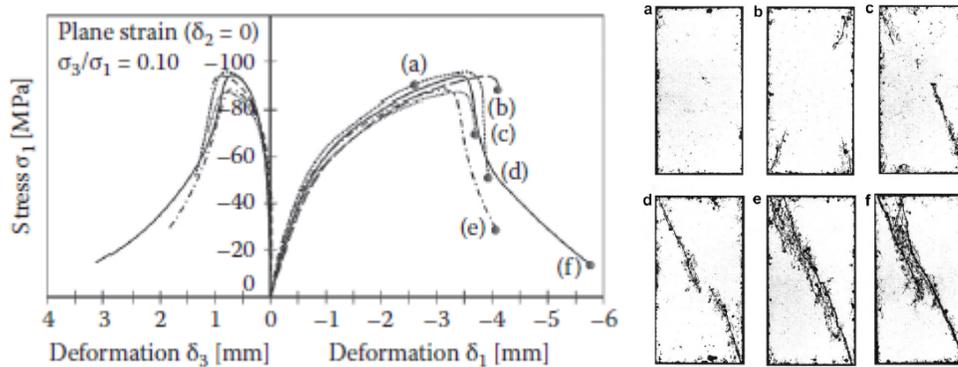
**Figure 2.4 - Modes de propagations des fissures selon la mécanique de la rupture (Wikipédia)**

## 2.2.2 Types de rupture

### 2.2.2.1 Rupture par bande de cisaillement en mode II

Ce mode de rupture est le plus couramment observé. C'est un mode de rupture plus ou moins fragile. Il apparaît dans les essais de compression uniaxiale lorsque le frottement entre le spécimen et les plaques de chargement n'est pas complètement supprimé. Il survient aussi avec des chargements multiaxiaux où le niveau de confinement reste faible (en-dessous du point de transition fragile/ductile défini plus loin). Il peut survenir pour un chargement proportionnel ou non proportionnel, c'est-à-dire lorsque les contraintes latérales de confinement ne sont pas égales dans les deux axes ( $\sigma_1 \neq \sigma_2$ ).

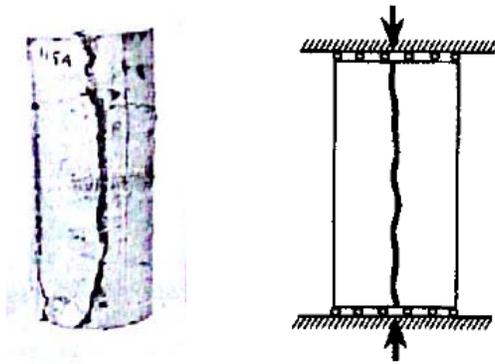
La Figure 2.5 est une série de photos prises sur 6 échantillons à des points différents sur la courbe post-pic contrainte-déplacement ( $\sigma$ - $\delta$ ). Ces essais ont été réalisés par Van Geel (1998) en déformation plane ( $\varepsilon_2 = \delta_2 = 0$ ) et avec un rapport de contrainte  $\sigma_3/\sigma_1 = 0.1$ , assurant ainsi un faible confinement favorable à une rupture en bande de cisaillement. Les échantillons ont été sciés et imprégnés sous vide de résine époxy fluorescente afin d'observer la fissuration. On peut voir que la pente d'adoucissement est directement liée à la propagation de la fissure de cisaillement. Sur la Figure 2.5, et dans la plupart des essais en compression reportés dans la littérature, l'angle d'inclinaison de la fissure avec l'axe de chargement est d'environ  $45^\circ$ . Cependant cet angle peut varier et nous montrerons au paragraphe 2.2.5.3 que cela dépend des conditions limites de chargement dans le cas d'une compression uniaxiale ou du niveau de confinement dans le cas d'une compression multiaxiale.



**Figure 2.5 - Rupture par bande de cisaillement. Série de photos prises successivement le long de la pente d'adoucissement (d'après Van Geel, 1998)**

### 2.2.2.2 Rupture par fendage

La rupture par fendage peut être considérée comme une rupture en compression uniaxiale pure, c'est-à-dire avec des conditions de frottement parfaitement nul. Ces conditions sont assez difficiles à obtenir en pratique car le frottement parfaitement nul n'existe pas en laboratoire. On peut tout de même s'en approcher en ayant recours à des dispositifs de limitation de frottement (ex : plaques de téflon). Si on se réfère à la Figure 2.3 schématisant une fissure à « ailes », l'absence totale de confinement latéral et de frottement va permettre la propagation des « ailes » en mode I. Ainsi la coalescence des microfissures va former une macrofissure verticale fendant le spécimen de haut en bas (Figure 2.6). Cela s'accompagne d'une perte de résistance immédiate sans déformation supplémentaire, il n'y a donc aucun effet adoucissant. La portion post-pic de la courbe  $\sigma$ - $\varepsilon$  comme de la courbe  $\sigma$ - $\delta$  serait une simple droite verticale jusqu'à une contrainte nulle. Kotsovos (1983) définit la rupture par fendage comme le cas limite d'une rupture par bande de cisaillement avec une inclinaison de  $0^\circ$  par rapport à l'axe de la charge. Or ce cas limite proposé par Kotsovos est loin de faire l'unanimité au sein de la communauté scientifique.



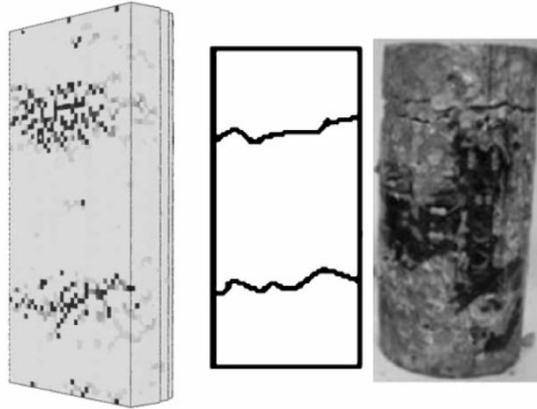
**Figure 2.6 - Éprouvette classique d'un test de compression avec rupture par fendage  
(d'après Kotsovos, 1983)**

On peut aussi citer (de Larrard et Rossi, 1988) et (Bazant, 1993) qui ont émis l'hypothèse que la rupture en compression uniaxiale est due au flambement de colonnettes formées par la propagation verticale des fissures de fendage.

### 2.2.2.3 Écrasement de la matrice

Le cas limite de l'écrasement de la matrice a été mis en évidence entre autres par Bouzaiene (1995) en appliquant un confinement latéral suffisant pour empêcher l'expansion des microfissures de fendage et l'apparition d'une macrofissure. Cela se traduit par une augmentation considérable de la résistance. De plus le béton est capable de subir de grandes déformations devenant même écrouissant. Le béton va subir un écrasement dans les zones les plus faibles de la matrice, c'est-à-dire dans les ITZ (paragraphe 2.1.2), zones poreuses d'interface pâte/granulat. Ce phénomène a été décrit au paragraphe 2.1.2 et illustré à la Figure 2.2g. Ici il faut remarquer que nous parlons d'écrasement plutôt que de rupture car le spécimen garde son intégrité tant que le confinement est suffisant. Dans le cas extrême d'un chargement hydrostatique ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ) à très haute valeur de contrainte, il peut même se produire une transformation de phase (Van Mier, 2013). Sur la Figure 2.7, on peut voir, à gauche, les résultats du modèle mésoscopique de Dupray et al. (2009) d'une éprouvette sous une contrainte de confinement de 200 MPa ainsi qu'à droite, une photo de l'échantillon en question. Le béton utilisé a une résistance uniaxiale de 60 MPa. L'échantillon est amené par chargement hydrostatique jusqu'à 200 MPa, ensuite la pression latérale est maintenue tandis que l'on continue le déplacement vertical de la presse. On peut remarquer que les plans où se produit l'écrasement sont des plans normaux à l'axe de la charge principale. Ainsi en vulgarisant,

on pourrait définir un autre état limite pour l'angle d'inclinaison des plans de fissuration. On pourrait considérer que la rupture se produit toujours selon un plan de cisaillement avec un angle d'inclinaison variant entre  $0^\circ$  (rupture par fendage) et  $90^\circ$  (rupture par écrasement).



**Figure 2.7 – Écrasement de la matrice lors d'un chargement avec une contrainte de confinement de 200MPa pour un béton de résistance uniaxiale de 60 MPa (d'après Dupray et al., 2009)**

### **2.2.3 Concept d'un comportement « structural » plutôt que « matériel »**

Au regard des différents types de ruptures exposés précédemment, on s'aperçoit que le béton peut présenter différents comportements en fonction des conditions dans lesquelles se déroule le chargement. Dans les années 80, Van Mier (1986) emploie pour la première fois le terme « spécimen/structure » en parlant des éprouvettes de tests en compression uniaxiale. En effet, il affirme que pour le comportement post-pic, la pente descendante de la courbe  $\sigma$ - $\varepsilon$  ne peut plus être considérée comme une propriété intrinsèque du matériau. Elle dépend de multiples paramètres dont certains n'ont aucun rapport avec la microstructure du matériau mais sont liées aux conditions externes et au type d'essai réalisé. Ainsi le spécimen fractionné en deux blocs ou plus, qui glissent les uns par rapport aux autres dans le cas d'une rupture par bande de cisaillement, peut être considéré comme une structure et non comme un continuum de matière. Si de plus on ajoute l'influence du système de chargement et la présence de confinement (actif ou passif), cela devient une « structure » encore plus complexe. Il est alors très difficile de comparer les résultats expérimentaux de la littérature, car chaque laboratoire a son propre mode opératoire et ses propres

équipements. En découle alors la nécessité d'une uniformisation des tests de compression et de la mise en place d'une norme pour l'obtention de la courbe post-pic du béton au même titre qu'il existe des normes pour le module d'Young, le coefficient de Poisson et la résistance.

#### **2.2.4 Tentative d'unification des données expérimentales pour les essais de caractérisation de l'adoucissement dans la littérature**

Dans le rapport du test round-robin<sup>1</sup> établi par le comité RILEM TC 148-SSC, Van Mier et al. (1997) ont essayé de mettre en place un test standardisé universel pour la caractérisation de l'adoucissement en compression uniaxiale du béton. Il n'est donc pas question de confinement latéral dans cette étude. Ce programme expérimental est encore à ce jour le plus complet en ce qui concerne l'appréhension du phénomène. Chaque laboratoire, 10 au total, et leur équipe de chercheurs ont publié un article avec entre autres Van Vliet et Van Mier (1996) et Jansen et Shah (1997).

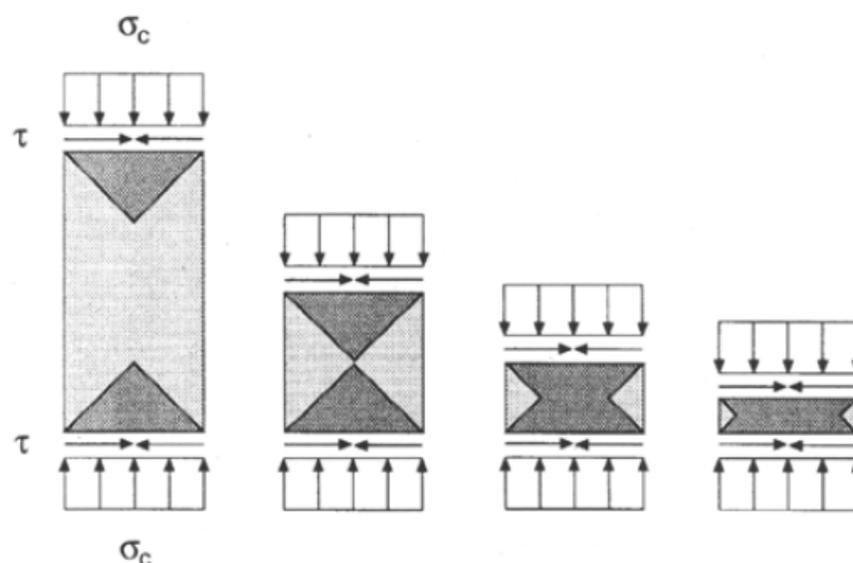
Les principales variables considérées sont l'élançement des spécimens, c'est-à-dire le rapport  $h/d$  ( $h$  étant la hauteur du spécimen et  $d$  étant la dimension transversale) et le coefficient de frottement entre les plaques de chargement et les spécimens. Plusieurs tests ont donc été effectués sur deux formulations de bétons (45 MPa et 75 MPa) en faisant varier le rapport d'élançement et le coefficient de friction entre les plaques et le spécimen mais aussi en faisant varier la forme des spécimens (section carrée ou section circulaire).

Pour la phase pré-pic, les expériences ont révélé que pour un coefficient de frottement faible entre les plaques de chargement et le spécimen, l'élançement n'avait pas d'effet sur la valeur de la résistance en compression. Pour des coefficients de frottement élevé, la résistance en compression augmente quand l'élançement diminue. Ceci est dû aux états de contraintes triaxiales créés au sein du matériau dans les zones proches des plaques de chargement (Figure 2.8). Par ailleurs pour des

---

<sup>1</sup> Les round-robin tests sont des essais de mêmes échantillons par des laboratoires différents de façon à valider les méthodes d'essais ou évaluer la qualité des laboratoires (Wikipédia).

conditions de frottement élevé, l'effet de l'élanement ne s'observe plus pour des valeurs supérieures à 2.



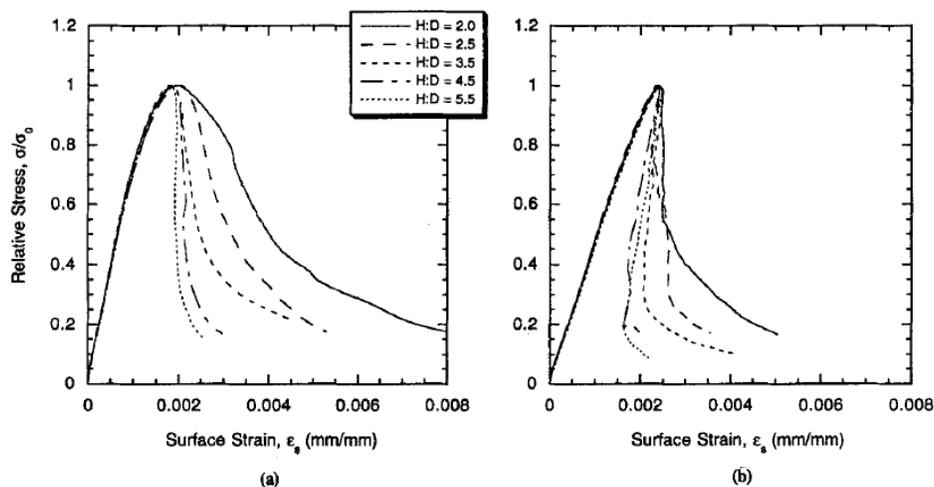
**Figure 2.8 - Importance relative des zones confinées aux extrémités (en gris foncé) pour des spécimens de différentes longueurs (d'après Van Vliet et Van Mier, 1996)**

Une des plus importantes conclusions de ce rapport d'expérience est qu'il semblerait que, pour un élanement de 2 et plus et pour un frottement faible (pas forcément nul) aux frontières, les tests aient affichés une faible dispersion. Le comité s'est donc basé sur ces conditions pour établir sa procédure de test pour la mesure de l'adoucissement (Van Mier et al, 2000). Le comité RILEM fournit des recommandations concernant le pilotage du chargement pendant les essais. Pour un meilleur suivi de la courbe contrainte-déformation en post-pic, il est conseillé de mettre en place un contrôle en boucle fermée en utilisant le déplacement axial comme signal de retour pour des bétons à faible résistance et une combinaison du déplacement axial et de la force axiale pour des bétons à haute résistance. Ceci a pour but d'éviter les ruptures fragiles par instabilité du béton une fois la résistance ultime atteinte. Les principales conclusions de cette étude seront présentées au paragraphe suivant avec une revue des différents paramètres d'influence sur le comportement post-pic en compression uniaxiale. Nous nous appuierons aussi sur certains articles de référence plus anciens.

## 2.2.5 Paramètres d'influence sur le comportement post-pic en compression uniaxiale

### 2.2.5.1 Influence de la résistance maximale en compression $f_c'$

Sur la Figure 2.9a sont présentées les courbes contraintes-déformations pour un béton ordinaire (BO) de 45 MPa pour des échantillons avec des rapports d'élançement de 2 à 5.5 (Jansen et Shah, 1997). Sur la Figure 2.9b on trouve les mêmes courbes mais pour un béton à haute performance (BHP) de 90 MPa. Notons que les contraintes sont normalisées au pic, c'est-à-dire que l'on représente  $\frac{\sigma}{\sigma_c}$  avec  $\sigma_c$  la contrainte maximale. On voit bien que pour le BHP, la pente d'adoucissement est globalement plus raide que pour le BO.



**Figure 2.9 - Courbes de la contrainte relative en fonction de la déformation moyenne pour des élançements variant de 2 à 5.5 : a) Béton ordinaire de 45 MPa b) Béton à haute performance de 90 MPa (d'après Jansen et Shah, 1997)**

Plus un béton sera résistant plus la pente d'adoucissement sera élevée, c'est-à-dire plus la rupture sera fragile. Pour des bétons à haute performance (BHP), avec des résistances à la compression supérieures à 70 MPa, on peut même observer le phénomène de « *snap-back* ». La pente redevient alors positive. Cela ne peut s'observer qu'avec des conditions d'essais particulières.

## 2.2.5.2 Influence de la longueur des spécimens

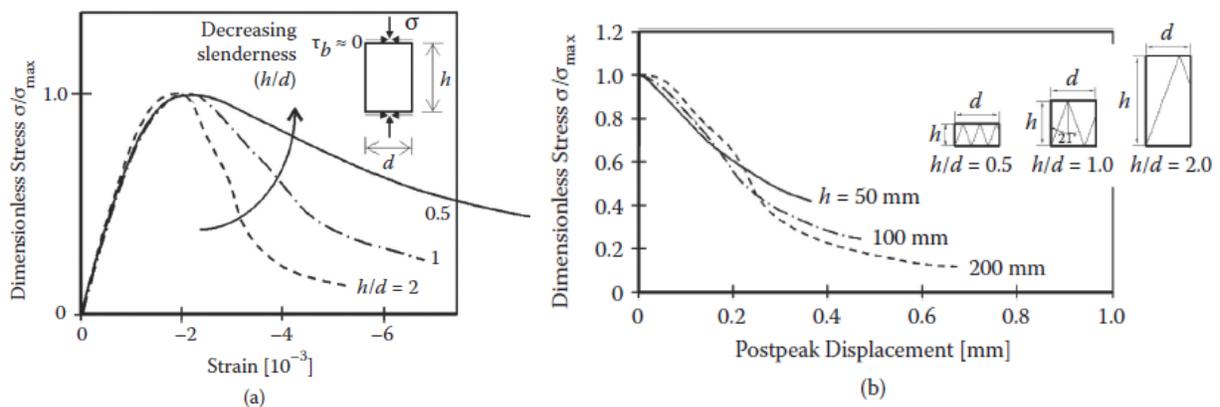
### 2.2.5.2.1 Localisation de la rupture

Il a d'abord été admis que la rupture en traction du béton donne lieu à une forte localisation des déformations (Hillerborg et al., 1976). La loi post-pic n'est plus exprimée en déformation mais en ouverture de fissure. Mais il n'était pas admis que cela pouvait aussi être le cas pour la compression jusqu'à la fin des années 1980.

Van Mier (1986) fut l'un des premiers à avancer l'hypothèse d'une localisation des déformations lors d'une rupture en compression. Il montre que la courbe post-pic  $\sigma$ - $\varepsilon$  (contrainte-déformation) du béton est dépendante de la longueur du spécimen, et que la courbe  $\sigma$ - $\delta$  (contrainte-déplacement) est indépendante de la longueur du spécimen ce qui est caractéristique d'une localisation des déformations. On peut alors parler d'« ouverture de fissure » en compression. La Figure 2.10 montre les résultats d'une série d'essais sur des prismes de section 100x100 mm et de rapports d'élanement  $h/d$  de 0.5, 1 et 2 effectués par Van Vliet et Van Mier (1996). Le déplacement post-pic est tout simplement calculé de cette façon :

$$\delta_{pp} = \delta_{tot} - \delta_0 = \delta_{tot} - \varepsilon_0 L \quad (2.1)$$

où  $\delta_{pp}$  est le déplacement post-pic,  $\delta_{tot}$  est le déplacement total,  $\delta_0$  est le déplacement au pic,  $\varepsilon_0$  la déformation au pic et  $L$  est la longueur de mesure (ici c'est la hauteur totale des spécimens).



**Figure 2.10 - Preuve de la localisation de la rupture en compression - a) courbes contrainte-déformation - b) courbes contrainte-déplacement post-pic (d'après Van Mier, 1986)**

Sur la Figure 2.10b, on voit que les trois courbes correspondant aux trois spécimens d'éclatement différents sont quasiment confondues. Les spécimens subissent le même déplacement (en mm) avec la même baisse relative de charge. C'est pourquoi quand on repasse en déformation moyenne en divisant le déplacement par la hauteur de chaque spécimen les courbes sont décalées (Figure 2.10a).

Notons que cette série d'essais a été réalisée à l'aide d'un système de chargement de plaques à « pinceaux » (*brush platen*). Nous verrons au paragraphe suivant que cela a son importance. Notons aussi que des discussions sont toujours en cours en ce qui concerne la localisation des déformations. Certains chercheurs, comme Hulburt (1985) et Vonk (1992), ne sont pas tout à fait d'accord avec les résultats de Van Mier (1986) ou Jansen et Shah (1997) et jugent que la localisation n'est pas aussi parfaite. Elle se situerait plutôt dans une bande de matériau d'une certaine épaisseur. Markeset et Hillerborg (1995) considèrent qu'une partie de l'adoucissement peut être définie par une courbe contrainte-déplacement pour le mode de rupture en cisaillement et une autre par une courbe contrainte-déformation pour représenter les fissures de fendages réparties sur un certain volume. Ce modèle est présenté plus en détails au paragraphe 2.5.2.2. Cela implique que la localisation est légèrement dégradée dépendamment de l'importance de la fissuration par fendage par rapport à la fissuration de cisaillement.

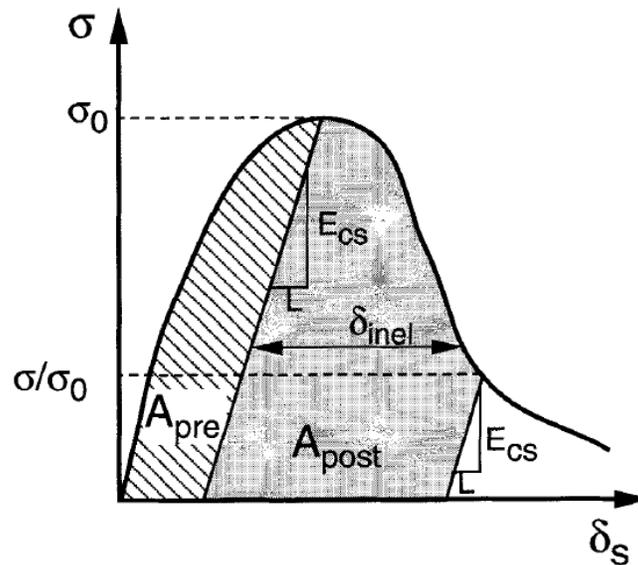
Dans le modèle *EPM3D*, nous rejoignons l'hypothèse de Van Mier (1986) et supposons une localisation parfaite de la rupture.

#### 2.2.5.2.2 Définition d'une énergie de rupture en compression

Suite aux travaux de Van Mier (1986), beaucoup de chercheurs, comme Rokugo et Koyanagi (1992), ont considéré que l'énergie de rupture (ou de fissuration) en compression constituait une propriété intrinsèque du matériau. Autrement dit, au même titre que pour l'énergie de rupture en traction, souvent notée  $G_f$  dans la littérature, on peut définir l'énergie de rupture en compression  $G_{fc}$  en intégrant la courbe  $\sigma$ - $\delta_{pp}$  (Figure 2.10b) d'un essai de compression uniaxiale.

Mais là encore il existe différentes définitions de  $G_{fc}$ . Pour Jansen et Shah (1997), l'énergie de rupture doit être intégrée à partir de la courbe  $(\sigma/\sigma_c)$ - $\delta_{in\acute{e}lastique}$ . Le déplacement inélastique  $\delta_{in\acute{e}lastique}$  correspond au déplacement post-pic  $\delta_{pp}$  avec prise en compte du déchargement élastique

du reste de l'échantillon en assumant un déchargement selon le module d'Young initial ( $E_0$ ). Sur la Figure 2.11, Jansen et Shah (1997) définissent une énergie élastique pré-pic ( $A_{pre}$ , aire hachurée) et une énergie de rupture post-pic ( $A_{post}$ , aire grisée). C'est cette définition de l'énergie de rupture que Ben Ftima (2013) a choisi pour le modèle *EPM3D*.



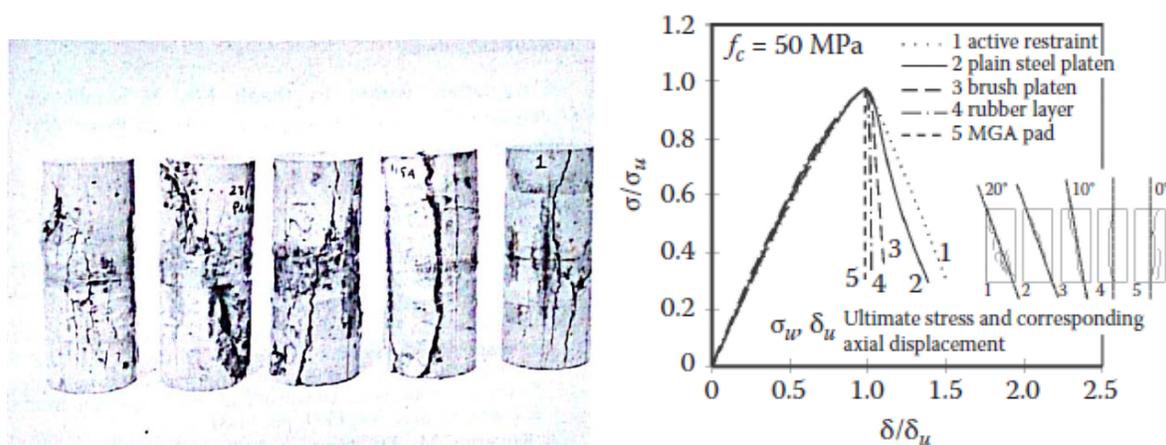
**Figure 2.11 - Définition du déplacement  $\delta_{in\acute{e}lastique}$  et de l'énergie de rupture en compression selon Jansen et Shah (1997)**

### 2.2.5.3 Influence des conditions limites (i.e. des techniques de chargement)

#### 2.2.5.3.1 Essais de Kotsovos (1983)

Le premier à avoir considéré l'influence des systèmes de chargement dans les tests de compression uniaxiale est Kotsovos (1983). Dans son article, il présente les résultats de tests de compression effectués à l'aide de cinq dispositifs différents afin d'obtenir cinq valeurs de coefficient de frottement différents entre les plaques de chargement et le spécimen (Figure 2.12). Ces éprouvettes ont toutes un rapport d'élancement  $h/d = 2$ . Les cinq dispositifs utilisés sont pour les échantillons de la gauche vers la droite sur la photo : un blocage actif, des plaques d'acier, des plaques à « pinceaux », des plaques de caoutchouc très souple en cisaillement et un dispositif

MGA<sup>2</sup>. Les résultats montrent une réelle dépendance aux conditions limites pour la résistance ultime en compression, pour la pente d'adoucissement ainsi que pour l'angle d'inclinaison du plan de rupture en cisaillement. Selon les photos de l'article de Kotsovos (1983), il semblerait que les conditions limites soient directement responsables de l'angle d'inclinaison de la bande de cisaillement. Plus le frottement aux extrémités du spécimen est fort, plus l'angle sera grand et plus la pente de la courbe post-pic diminue. On retrouve le cas limite de la rupture par fendage (inclinaison 0°) pour les dispositifs avec le moins de frottement (caoutchouc et MGA).



**Figure 2.12 - Photos et courbes contrainte-déplacement des spécimens testés avec différentes conditions limites (d'après Kotsovos, 1983)**

Pour obtenir un vrai champ de contrainte de compression uniaxiale sur la totalité du spécimen, il faut donc limiter au maximum le frottement et donc la proportion des zones triaxialement confinées par rapport au volume de l'échantillon. L'effet des techniques de chargement se manifeste surtout pour des élancements inférieurs à 2. Pour des élancements de 2 et plus, si le coefficient de frottement reste faible, l'effet s'estompe considérablement.

Pour des essais de compression uniaxiale sur des spécimens très élancés ( $h/d > 3$ ), il est même préférable de garder un peu de frottement. On garde ainsi des zones de bétons confinés plus résistantes aux extrémités. Par exemple dans l'article de Jansen et Shah (1997), les mesures de déformations post-pic sont effectuées à l'aide de LVDT installés à même la surface du spécimen

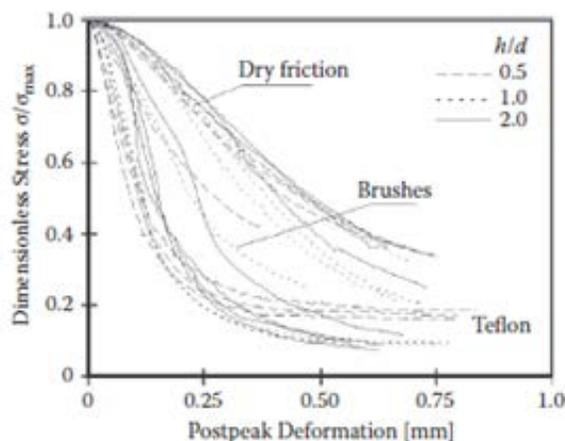
<sup>2</sup> *Melinex-Grease-Aluminium* : dispositif composé d'une feuille d'aluminium, d'une couche de graisse et d'un film plastique Melinex.

sur une longueur plus petite que la longueur totale et centrée sur le milieu du spécimen. Ainsi on s'assure que la rupture se produira bien dans le milieu de la colonne et donc dans la plage de mesure des LVDT. On a volontairement laissé les plaques de chargement sèches et sans dispositif de diminution de friction. La fissuration et l'écaillage du béton se produiront aussi préférentiellement à mi-hauteur et non sous les points de mesures.

Dans notre programme expérimental pour les mêmes raisons qu'avancées ci-dessus, nous avons fait le choix de ne pas mettre de dispositifs de réduction de frottement, car nos spécimens avaient des ratios d'élancement de 2 et 4. Nous mesurons tout de même un champ de contrainte de compression uniaxiale, car nous avons placé nos capteurs hors des zones de confinement situées aux extrémités (Figure 2.8).

#### *2.2.5.3.2 Principe de l'énergie de fissuration en compression remis en cause*

Avec ce qu'a démontré Kotsovos (1983) et avec les travaux complémentaires pour le test round Robin du comité RILEM, Van Vliet et Van Mier (1996) ont montré que l'énergie de rupture en compression était dépendante du système de chargement utilisé et donc ne pouvait pas être considérée comme un paramètre intrinsèque du matériau. Comme on peut le voir sur la Figure 2.13, la localisation de la rupture apparaît peu importe le système de chargement. Toutefois lorsque l'on utilise un dispositif de réduction de frottement avec des plaques de téflon ( $f = 0.01$ ), l'aire sous la courbe  $(\sigma/\sigma_{max})-\delta_{pp}$  diminue et donc l'énergie de rupture  $G_{fc}$  aussi.



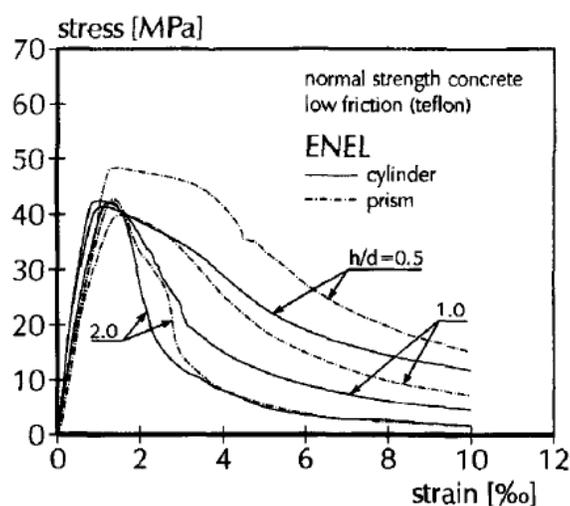
**Figure 2.13 - Courbes contrainte normalisée vs déplacement post-pic avec trois dispositifs de chargement différents (plaques d'acier, plaques à « pinceaux » et plaques de téflon) (d'après Van Vliet et Van Mier, 1996)**

Si l'on doit définir quel fuseau de courbes peut être considéré comme une propriété intrinsèque du matériau, il faut choisir celui des essais réalisés avec les plaques de téflon, car le coefficient de frottement est très proche de 0. On pourrait aussi définir une énergie de rupture en compression,  $G_{fc}(f)$ , qui dépend du frottement  $f$  et qui a pour valeur limite inférieure l'énergie de rupture dans le cas uniaxiale « pur »,  $G_{fc0} = G_{fc}(0)$ . Le problème est que cela nécessite de refaire un grand nombre d'essais en compression pour obtenir avec précision  $G_{fc0}$  de manière standardisée et l'évolution de  $G_{fc}$  en fonction du frottement.

Nous tenons enfin à ce que le lecteur garde à l'esprit qu'il faut comparer ce qui est comparable. Les résultats de notre programme expérimental effectué avec des plaques de chargement en acier non lubrifiées ne peuvent être comparés à ceux d'essais effectués avec des plaques de téflon par exemple. Le programme de Jansen et Shah (1997) est le plus proche du nôtre pour un béton non fibré. Ils ont utilisé des plaques d'acier sèches et ont effectué des mesures sur une hauteur plus petite que la hauteur totale du spécimen. Nous avons gardé le même principe afin de pouvoir comparer nos résultats aux leurs.

#### 2.2.5.4 Influence de la géométrie de la section des échantillons

Van Mier et al (1997) survolent dans le test round-robin l'influence des paramètres géométriques, comme la forme de la section et l'effet d'échelle. Les résultats présentés sont très sommaires. Le laboratoire de l'ENEL-Cris de Milan, avec Gobbi et Ferrara (1995), a effectué des tests sur des cylindres et des prismes. Selon la Figure 2.14, la variation de la pente post-pic en fonction de l'élancement ne semble pas être affectée par la forme de la géométrie. Il semblerait aussi que les spécimens cylindriques donnent globalement une résistance un peu plus faible que les prismes et avec une plus faible dispersion des résultats.



**Figure 2.14 - Influence de la forme de la section sur le comportement en compression (d'après Van Mier et al., 1997)**

Gobbi et Ferrara (1995) ont aussi testé l'effet d'échelle. Trois séries de spécimens avec les mêmes proportions mais à trois échelles différentes ont été testées (dimension transversale de 50 mm, de 100 mm et de 150 mm). Ils n'ont cependant décelé aucune tendance ni aucun comportement qui viendraient remettre en cause les points exposés jusqu'à maintenant.

Cependant compte tenu du faible nombre d'expériences menées sur l'influence de la géométrie dans la littérature, nous avons voulu intégrer cet aspect dans notre programme expérimental. C'est pourquoi nous avons décidé de faire des tests sur des échantillons de section circulaire et carrée avec deux échelles différentes (dimension transversale de 150 mm et de 300 mm).

## 2.2.6 Influence du confinement latéral

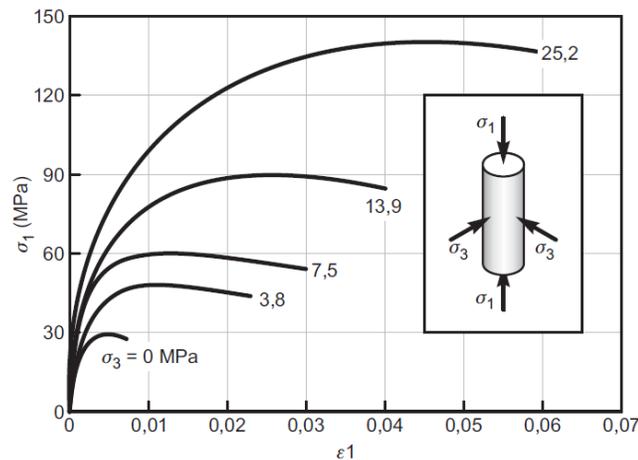
Comme nous le verrons au chapitre 3, la prise en compte de l'effet du confinement sur la courbe post-pic au sein de notre modèle n'était pas optimale. C'est pourquoi une attention particulière a été portée sur les articles traitant des chargements biaxiaux et triaxiaux en compression. Un des buts de ce mémoire étant la modélisation d'une colonne en béton armé, nous devons nous assurer que le confinement amené par la présence d'étriers dans la colonne soit modélisé adéquatement. Ainsi l'effet de la variation du taux de confinement sur la courbe post-pic qui peut être effectuée en augmentant la section des étriers ou en diminuant l'espacement vertical entre les étriers par exemple, sera pris en compte par notre modèle. Cependant il existe encore trop peu d'articles de références qui fournissent les courbes  $\sigma$ - $\varepsilon$  complètes, c'est-à-dire pour de grandes déformations jusqu'au plateau de contrainte résiduelle (voir Figure 2.19 pour la définition de la contrainte résiduelle). Nous ne pouvons réellement statuer que sur une tendance et non sur des valeurs exactes. Dans l'article de Samani et Attard (2012), une revue très complète des essais de compression multiaxiale connus est effectuée, ce qui a facilité énormément nos recherches.

### 2.2.6.1 Confinement actif ou passif

Tout d'abord, il faut faire le distinguo entre le confinement actif ou passif. Dans les structures réelles comme des poteaux, le confinement du béton en compression est passif puisqu'il est assuré par les armatures. Les étriers de confinement latéral vont retenir la déformation du béton et donc retarder l'expansion des fissures. Le confinement latéral n'est donc assuré que par réaction à la sollicitation dans l'axe majeure de compression. Cependant la plupart du temps pour les essais en laboratoire, des blocs de béton sont testés en chargement biaxial ou triaxial en appliquant une pression sur les parois latérales des échantillons. Ce confinement est alors dit actif puisque c'est un élément extérieur au spécimen qui vient appliquer le confinement. On peut alors appliquer le niveau de confinement que l'on désire et maintenir cette contrainte indépendamment de la sollicitation majeure en compression. Au chapitre 4, nous procéderons à des validations de notre modèle avec confinement actif dans un premier temps. Nous verrons que la validation avec confinement passif est plus difficile à mettre en œuvre car cela dépend grandement de la formulation des effets de Poisson dans notre modèle et du choix de la taille du maillage par rapport à l'espacement vertical des étriers.

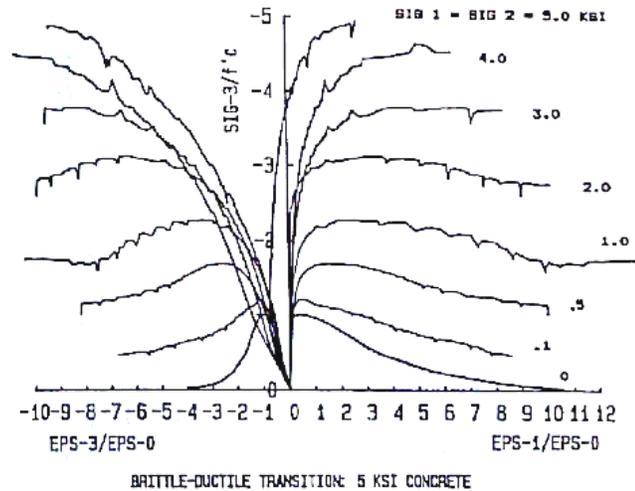
### 2.2.6.2 Influence du confinement sur la phase pré-pic et sur le mode de rupture

On sait depuis longtemps que la résistance du béton ainsi que sa déformation au pic augmentent quand il est confiné (Figure 2.15). Les premiers travaux de Richart et al (1928) ont évalué le gain de résistance avec la précision de l'époque à environ 4.5 fois la contrainte de confinement.

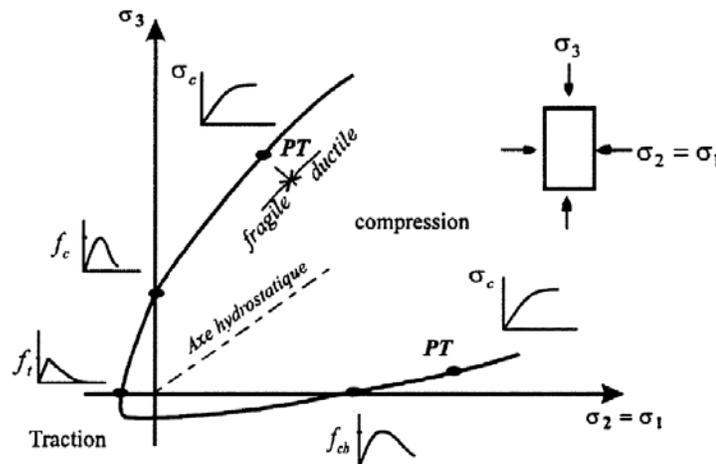


**Figure 2.15 - Évolution de la résistance et de la déformation au pic en fonction du confinement latéral (d'après Massicotte, 2013)**

À la fin des années 80 et au début des années 90, la recherche sur la compression multiaxiale a connu un regain d'intérêt avec par exemple Van Mier (1986), Smith et al. (1989) (Figure 2.16), Xie et al. (1995), Bouzaiene (1995), Attard et Setunge (1996). Plusieurs de ces articles avaient pour but d'exhiber la transition entre un mode de rupture fragile et ductile. Sur la Figure 2.17, Bouzaiene (1995) schématise l'existence de ce point de transition sur l'enveloppe de rupture du béton sous sollicitation multiaxiale. La modélisation de l'influence du confinement sur la phase pré-pic est aujourd'hui très bien réalisée dans *EPM3D* grâce à une approche hypoélastique. Cependant on cherche aujourd'hui à modéliser la courbe  $\sigma$ - $\epsilon$  complète en tenant compte des variations de l'adoucissement. Malheureusement il existe beaucoup moins d'articles qui traitent du comportement post-pic du béton en grandes déformations, c'est-à-dire jusqu'au plateau de contrainte résiduelle.



**Figure 2.16 - Courbes de contraintes normalisées ( $\frac{\sigma_3}{f'_c}$ ) en fonction des déformations normalisées au pic longitudinales ( $\frac{\epsilon_3}{\epsilon_0}$ ) et latérales ( $\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}$ ) pour des niveaux de confinement différents (en ksi) pour un béton de 5 ksi (34.5 MPa) (d'après Smith, 1989)**



**Figure 2.17 - Enveloppe de rupture du béton sous sollicitation multiaxiale (d'après Bouzaiene, 1995)**

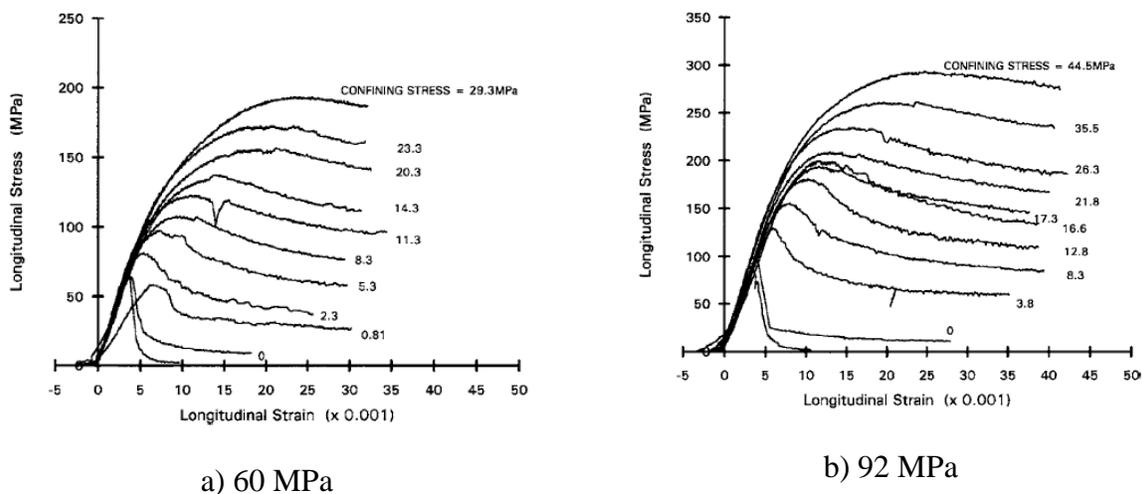
Remarquons que l'influence sur la phase pré-pic du frottement due aux techniques de chargement constitue un type de confinement. Finalement les efforts de cisaillement générés par frottement créent des zones de confinement seulement aux extrémités du spécimen. Dans les logiciels par éléments finis, il est possible de prendre en compte le frottement. Grâce à un maillage raffiné, on peut même observer les zones de confinement aux extrémités. Ainsi nous pensons

qu'une formulation de la courbe post-pic dépendant seulement du niveau de contrainte de confinement au sein de l'élément pourrait prendre en compte l'effet des techniques de chargement. Cela étant dit, nous n'inclurons pas le frottement comme paramètre d'entrée dans notre modèle.

### **2.2.6.3 Influence du confinement latéral sur la pente post-pic**

Les essais biaxiaux et triaxiaux ont montré que le coefficient de la pente d'adoucissement du béton diminue, quand le confinement grandit. Autrement dit le confinement aurait tendance à rendre le béton moins fragile en retenant les déformations latérales excessives et en empêchant la propagation rapide des fissures en bande de cisaillement qui comme on l'a vu, sont la cause principale de la chute de contrainte post-pic. Au point de transition, le coefficient de la pente devient nul. Au-delà de ce point, le béton peut être considéré comme écrouissant avec un module tangent positif.

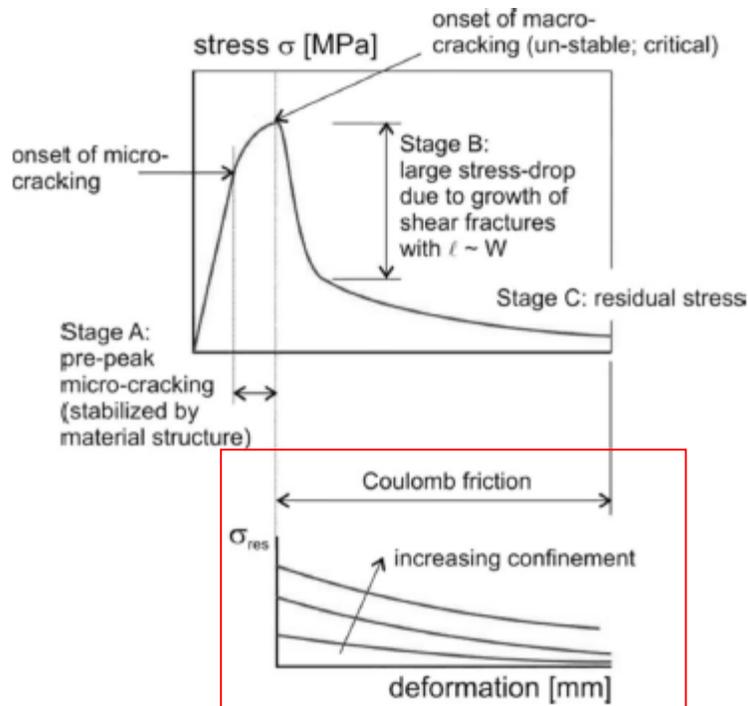
La Figure 2.18 est issue de l'article de Xie et al. (1995). On peut voir que dès les premières valeurs de confinement, la pente post-pic diminue très rapidement car les fissures longitudinales de fendage (mode I) ne peuvent plus se développer. Ainsi on peut faire un lien avec le confinement qu'apportent les étriers dans un poteau en béton armé, où le niveau de confinement n'est pas très élevé, mais le gain en ductilité est tout de même conséquent (Sheikh et Uzumeri, 1980; Mander, Priestley et Park, 1988; Cusson et Paultre, 1994). De plus on peut voir que pour des valeurs plus élevées de confinement, la pente continue à diminuer mais de façon plus lente. Comme notre modèle est volontairement simple avec une modélisation linéaire de l'adoucissement, il faudra donc veiller à faire varier le coefficient de la pente en fonction du confinement de façon adéquate.



**Figure 2.18 – Courbes de compression triaxiale pour un béton de 60 MPa et 92 MPa (d'après Xie et. al. 1995)**

#### 2.2.6.4 Influence du confinement sur la contrainte résiduelle

Pour Van Mier (2009), la contrainte résiduelle est due aux contraintes de frottement (*Coulomb friction*) qui se développent entre les blocs créés par les fissures en bande de cisaillement (Figure 2.19). Sur la Figure 2.18, on peut voir que le plateau de contrainte résiduelle varie aussi en fonction du niveau de confinement. Ceci peut toujours s'expliquer par le fait que les déformations latérales excessives sont empêchées et donc les contraintes de frottement entre les blocs sont augmentées. Il semble que l'augmentation du plateau suit la même tendance que la diminution de la pente, c'est-à-dire très rapide pour des niveaux faibles de confinement et plus lente pour des niveaux forts. Il est cependant difficile de se faire une vraie opinion concernant la contrainte résiduelle, car trop peu d'essais se rendent jusque là. Pour des valeurs de confinement au-delà du point de transition, environ 30% de  $f_c'$ , l'enveloppe de rupture et l'enveloppe de contrainte résiduelle coïncident (Samani et Attard, 2012).



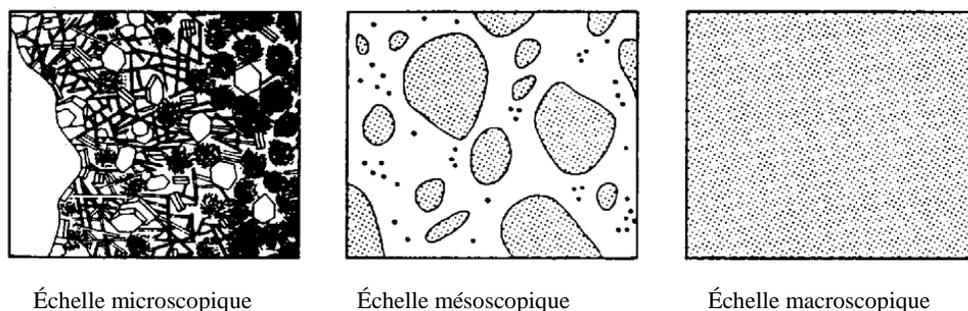
**Figure 2.19 - Modèle en 4 étapes du processus de fissuration dans le béton en compression : influence du confinement sur la contrainte résiduelle (d'après Van Mier, 2009)**

## 2.3 Classification des modèles de bétons

Il existe une multitude de modèles numériques pour représenter le comportement du béton et il est très pratique d'établir une classification afin de pouvoir situer notre modèle par rapport aux autres. Chaque modèle peut suivre une approche différente qui est établie pour un but précis. Bien entendu chaque approche a ses points forts et ses points faibles. Nous présentons ici trois critères selon lesquels les modèles peuvent être classés : l'échelle, la théorie utilisée pour le comportement non linéaire élastique en phase pré-pic et la modélisation de la fissuration en post-pic.

### 2.3.1 Classification selon l'échelle de modélisation

Tout d'abord on peut classer les différents modèles numériques du béton selon leur échelle. Habituellement on définit trois échelles : microscopique, mésoscopique et macroscopique (Wittman, 1983) (Figure 2.20).



**Figure 2.20 - Différentes échelles de modélisation pour le béton (d'après Wittman, 1983)**

À l'échelle microscopique on vient modéliser les différents constituants de la pâte de ciment comme les particules de C-S-H ou la portlandite. Cette échelle de modélisation est nécessaire pour prendre en compte des phénomènes liés à la microstructure du béton comme l'hydratation des grains de ciment, le retrait ou le fluage.

À l'échelle mésoscopique, on ne considère plus que la pâte de ciment et les granulats qui vont être considérés comme deux milieux continus distincts. Dans certains modèles, on prend aussi en compte l'interface pâte/granat. À cette échelle, les modèles par éléments finis peuvent être utilisés ainsi que les modèles en treillis (*lattice models* en anglais) pour décrire le comportement du matériau et même simuler la formation de fissures. Un des modèles treillis à l'échelle mésoscopique les plus célèbres est celui de Schlangen et Van Mier (1992). Pour les modèles à éléments finis, des propriétés sont définies pour chacun des deux milieux (pâte et granulat) et on peut introduire des contraintes d'interactions entre eux.

Enfin l'échelle macroscopique est celle utilisée dans notre modèle et dans tous les modèles qui ont pour but de faire des analyses à l'échelle de la structure. À cette échelle le béton devient un matériau continu et homogène. Ces propriétés sont « lissées » sur tout le volume en faisant une moyenne des différents paramètres. La théorie de la mécanique des milieux continus est donc applicable et il est possible d'utiliser des méthodes de calcul telles que la méthode des éléments finis sur l'ensemble du volume. Il est important de préciser qu'à cette échelle nous ne pourrions pas prendre en considération les paramètres liés à la microstructure du béton mais seulement les caractéristiques globales. Et c'est là toute la difficulté. Par la volonté de toujours modéliser plus finement le comportement de notre matériau, nous devons améliorer les lois constitutives macroscopiques à partir des résultats obtenus sur des analyses à l'échelle de la microstructure. En

d'autres termes, certains paramètres d'entrée de notre modèle, comme la résistance en compression par exemple, sont des paramètres de sorties pour des modèles microscopiques.

On voit se dessiner l'un des grands défis de la modélisation de la rupture. La localisation des déformations lors de la rupture en compression rend alors l'hypothèse d'un milieu continu discutable et donc l'application de la théorie des milieux continus n'est plus appropriée en l'état. En effet la propagation de la fissure et la zone de localisation correspond plutôt à une échelle mésoscopique. Nous allons être obligés de modéliser un phénomène local avec une échelle macroscopique et au sein d'un matériau aux propriétés globales. Nous verrons comment l'introduction de certains artifices de calcul, comme la théorie de la fissure répartie (*smearred crack theory*), peut palier à ces difficultés.

### 2.3.2 Classification selon la théorie utilisée pour le comportement pré-pic

À partir de ce point, nous ne nous intéresserons plus qu'aux modèles macroscopiques. Au sein de cette classe de modèles, on peut faire apparaître une nouvelle répartition en fonction de la théorie utilisée quant à la représentation du comportement pré-pic. La description de l'évolution des contraintes en fonction des déformations dans la phase pré-pic peut se faire sous deux formes : totale ou incrémentale.

La formulation totale fait correspondre à toute valeur de contrainte prise par un nœud une déformation. Les modèles élastiques non linéaires sont basés sur une modification simple des modèles élastiques linéaires. La relation linéaire entre les contraintes et les déformations, appelée loi de Hooke ( $\sigma = E\varepsilon$ ), est remplacée par une fonction non linéaire :

$$\sigma_{ij} = F_{ij}(\varepsilon_{kl}) \quad (2.2)$$

L'inconvénient majeur des modèles à formulation totale est l'impossibilité de la prise en compte du chemin de chargement. Dans les modèles connus de la littérature on peut citer celui de Kotsovos (1980), un des premiers modèles isotropes avec généralisation de la loi de Hooke.

Dans la formulation incrémentale, on vient faire le lien entre l'incrément de contrainte et l'incrément de déformation avec un module tangent. Ce module tangent est recalculé à chaque pas

de calcul. Dans la présentation du modèle *EPM3D* au chapitre 3 nous reviendrons plus en détails sur les différentes formulations de lois constitutives pour la phase pré-pic du béton.

### 2.3.3 Classification selon la modélisation de la fissuration

Toujours au sein des modèles macroscopiques, on peut définir deux classes distinctes selon leur façon d'appréhender la fissuration du béton. Certains modèles sont dits à fissuration diffuse (*smearred crack*) alors que d'autres se servent de la théorie de la fissuration discrète (*discrete crack*).

La théorie de la fissuration discrète revient à modéliser la séparation créée par la fissure de manière explicite. C'est-à-dire que l'on va pouvoir observer une véritable séparation et une progression du front de la fissure. Souvent c'est l'utilisateur qui vient définir l'endroit de l'initiation de la fissure. Ensuite la propagation de la fissure peut être traitée de deux manières différentes : soit on considère que le chemin de fissuration est connu et donc le maillage est effectué en fonction du chemin choisi, soit il est déterminé en calculant à chaque itération la direction des contraintes maximales et on procède à un remaillage autour de la fissure.

La théorie de la fissuration diffuse, ou aussi appelée fissuration répartie, est comme son nom l'indique un artifice de calcul qui sert à diffuser ou à répartir sur un volume de matériau considéré les déformations dues à la fissuration. Elle a vu le jour avec Rashid (1968). On ne cherche pas à savoir où va se situer exactement la fissure et quel sera son chemin de propagation mais plutôt à obtenir un comportement global réaliste de la structure avec le bon déplacement et les forces correspondantes. Pour cela, on vient modifier localement la loi constitutive dans la zone fissurée. La loi est toujours exprimée en termes de contraintes-déformations diffusées sur une certaine hauteur.

La fissuration diffuse est tout à fait adaptée à la modélisation macroscopique par éléments finis, car la zone fissurée est encore considérée comme un milieu homogène. La mécanique des milieux continus y est donc encore applicable (continuité du champ de déformation). Dans la terminologie des éléments finis, on parle de limiteurs de localisation par régularisation de la loi constitutive. Nous allons détailler ceci au paragraphe suivant.

## 2.4 Modélisation de l'adoucissement par la méthode des éléments finis

### 2.4.1 Instabilité matérielle en mécanique non linéaire

On parle d'instabilité pour un système donné si, lorsqu'on applique une petite perturbation vis-à-vis de la sollicitation ou du chargement, cela conduit à une modification disproportionnée du comportement de ce système. Il existe deux types d'instabilités que l'on peut rencontrer en mécanique non linéaire : géométrique ou matérielle. L'instabilité géométrique apparaît lorsque l'hypothèse des petites déformations n'est plus vérifiée et que la géométrie changeante du problème rend la matrice de rigidité singulière, c'est-à-dire que  $[K]$  n'est plus inversible. L'instabilité géométrique peut survenir en cas de flambement ou d'effets  $P-\Delta$  par exemple.

Cependant même quand l'hypothèse des petites déformations est vérifiée, la matrice de rigidité peut devenir singulière. Ceci se produit quand le matériau présente un comportement adoucissant, c'est-à-dire un module tangent négatif. On parle alors d'instabilité matérielle.

### 2.4.2 Mise en évidence du problème d'unicité de la solution lors de la localisation des déformations

Le fait que la matrice de rigidité du problème devienne singulière, conduit à des problèmes d'unicité de la solution vis-à-vis du maillage. On parle de résultats dépendants ou indépendants du maillage (*mesh-dependent or mesh-independent results*). Ces problèmes sont dus à la localisation des déformations introduite par un module tangent négatif. L'initiation de la localisation se fait dans l'élément (ou rangée d'éléments) le (ou la) plus faible du maillage. Quand bien même, si tous les éléments sont identiques, la localisation est inévitable. Elle sera alors produite numériquement par la méthode de résolution à cause de l'ordre dans lequel sont effectuées les opérations ou des erreurs d'arrondis.

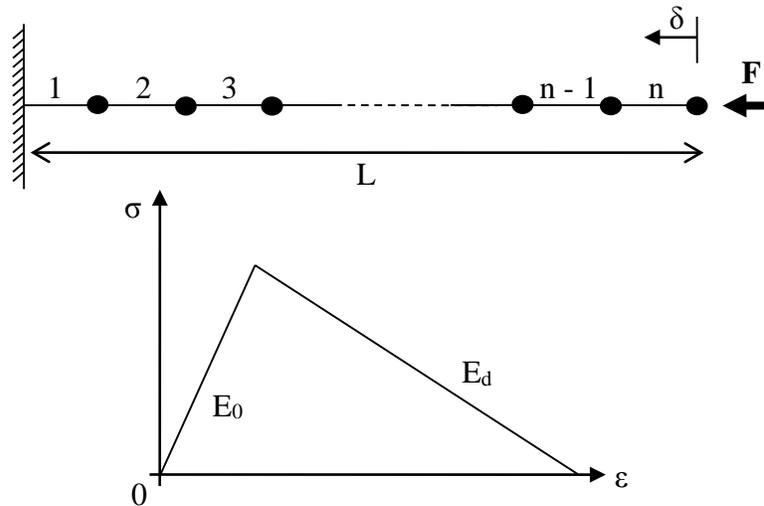
Supposons que l'on applique un déplacement à la structure et qu'au sein d'un élément (ou d'une rangée d'éléments) du maillage, la déformation dépasse la déformation au pic  $\varepsilon_c$ . Si le matériau est adoucissant, la contrainte au sein de cet élément va baisser alors que les éléments

voisins subissent toujours une augmentation de contrainte. À l'itération suivante, la méthode de résolution cherchant à satisfaire l'équilibre interne de la structure, les éléments voisins vont alors subir une baisse de contrainte. Ils vont alors se décharger en n'ayant jamais dépassé le pic. Le déchargement des éléments sera alors absorbé par l'élément qui se plastifie. Ainsi toutes les déformations plastiques vont se produire au sein d'un élément (ou rangée d'éléments). On comprend alors aisément que le milieu n'est plus homogène et qu'il existe maintenant deux zones distinctes avec des lois constitutives distinctes. Le problème est que la géométrie de ces zones dépend du maillage. Pour deux maillages différents, on aura alors deux problèmes différents et donc deux solutions différentes. Il n'y a plus unicité de la solution. On dit que le résultat est dépendant du maillage (*mesh-dependent*).

Pour illustrer ceci nous allons prendre l'exemple d'une barre soumise à de la compression modélisée par des éléments à une dimension (Figure 2.21) que l'on retrouve souvent dans la littérature notamment dans Crisfield (1984), De Borst (1987) ou Ibrahimbegovic (2006).

La barre de longueur  $L$  et de section  $A$  est discrétisée en  $n$  éléments treillis. Elle est fixe à une extrémité et subit une force  $F$  à l'autre. Plaçons-nous dans le cas le plus simple possible en supposant que la barre reste linéaire durant toute la phase pré-pic avec un module  $E_0 > 0$ . On note  $E_d < 0$ , le module d'adoucissement de la loi  $\sigma$ - $\varepsilon$  du matériau. On note  $E_{moy}$  le module d'adoucissement moyen pour la totalité de la barre. On a :

$$F = \frac{AE_{moy}}{L} \delta \quad (2.3)$$

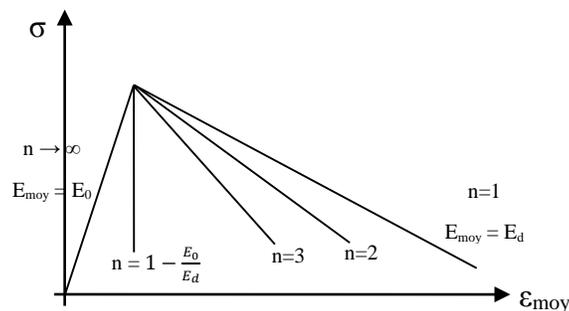


**Figure 2.21 - Barre en compression discrétisée en  $n$  éléments et loi constitutive bilinéaire**

Il y a donc un seul élément qui plastifie selon  $E_d$  et tous les autres se déchargent selon  $E_0$ . Si on assimile la chaîne d'éléments à une mise en parallèle de  $n$  ressorts, on a alors :

$$\frac{1}{E_{moy}} = \left(\frac{n-1}{n}\right) \frac{1}{E_0} + \left(\frac{1}{n}\right) \frac{1}{E_d} \quad (2.4)$$

Le module d'adoucissement global de la structure  $E_{moy}$  est donc fonction du nombre d'éléments. Cela se traduit par un comportement global de la structure dépendant du maillage comme on peut le voir sur la Figure 2.22.



**Figure 2.22 - Mise en évidence du manque d'unicité de la solution en fonction du maillage**

On rencontre le même souci en 2D ou en 3D que ce soit pour un adoucissement en compression, en traction ou en cisaillement. On doit alors mettre en place ce que l'on appelle des limiteurs de localisation. On parle aussi de méthode de régularisation.

### 2.4.3 Limiteurs de localisation

À partir des années 80, avec l'essor de la méthode des éléments finis dû au progrès de l'informatique, beaucoup d'articles ont proposé des méthodes afin de contrer les difficultés rencontrées avec des matériaux adoucissants. Le béton étant un des matériaux les plus utilisés au monde, il n'est pas anodin de constater que beaucoup de ces articles étaient directement appliqués au cas du béton. La majorité des recherches étaient consacrées à l'adoucissement en traction, car on s'est très vite rendu compte que sa prise en considération améliorerait significativement les résultats des modèles de poutres en béton armé en flexion avec raidissement en traction. Cependant les aspects théoriques développés ici sont applicables pour tout matériau adoucissant et pour n'importe quelle sollicitation (traction, compression, cisaillement).

Ce paragraphe est largement inspiré des livres « Mécanique non linéaire des solides indéformables » (Ibrahimbegovic, 2006) et « Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures » (Belytschko et al., 2000).

Différentes méthodes ont été proposées dans la littérature afin de limiter la localisation des déformations. On peut répertorier 3 grands types de limiteurs :

- 1 – les limiteurs qui s'inscrivent dans le cadre de la théorie locale des milieux continus;
- 2 – les limiteurs qui cherchent à « enrichir » le cadre de la théorie locale des milieux continus;
- 3 – les limiteurs qui s'inscrivent dans le cadre de la théorie non locale des milieux continus.

Pour mettre en place ces limiteurs de localisation, il faut donc apporter: aucune modification (catégorie 1), de légères modifications (catégorie 2) ou d'importantes modifications (catégorie 3) du cadre standard de la théorie locale de la mécanique des milieux continus.

Les limiteurs de la première catégorie sont les plus simples à mettre en œuvre. On vient seulement modifier la loi constitutive du matériau de façon à ce que l'énergie dissipée soit indépendante du maillage. On peut par exemple modifier la loi constitutive du matériau en la

rendant viscoplastique, c'est-à-dire en introduisant un paramètre fictif de viscosité dépendant du pas de calcul de l'analyse afin d'assurer l'indépendance vis-à-vis du maillage. On parle alors de régularisation viscoplastique (Needleman, 1988). On peut aussi modifier la loi en rendant le module tangent d'adoucissement dépendant du maillage. Cette technique est celle qui est utilisée dans notre modèle, car c'est la plus simple à mettre en œuvre et elle a montré de très bons résultats. Elle sera détaillée au paragraphe suivant.

Les limiteurs de la deuxième catégorie sont les plus utilisés aujourd'hui d'après Ibrahimbegovic (2006). Ils nécessitent quelques modifications de la théorie locale de la mécanique des milieux continus. En effet on vient introduire volontairement des discontinuités dans le champ des déplacements (Simo et al, 1993) ou le champ des déformations (Ortiz et al, 1987) au sein de l'élément qui plastifie. La régularisation est effectuée sur la formulation de l'élément même, donc sur la matrice  $[B]$  qui fait le lien entre les déplacements nodaux et le champ des déformations. Il serait bon à l'avenir d'introduire ce type de limiteur dans nos analyses. Cela constitue une bonne piste d'amélioration de notre modèle aussi bien pour l'adoucissement en traction, en cisaillement ou en compression.

L'implantation numérique des limiteurs de la troisième catégorie est très compliquée à mettre en œuvre et c'est pourquoi ils sont peu utilisés. Le principe de la théorie non locale est de « calculer la contrainte en un point en prenant en compte toutes les déformations dans le voisinage de ce point (par exemple, une boule) défini à partir d'une longueur caractéristique » (Ibrahimbegovic, 2006). Les articles qui posent les fondements de la théorie non locale sont (Bazant et Lin, 1988), (Pijaudier-Cabot et Bazant, 1987) et (Bazant et Pijaudier-Cabot, 1988). Pour que la régularisation soit efficace, on doit avoir plusieurs éléments à l'intérieur de cette longueur caractéristique. Or cela amène plusieurs complications. Les éléments doivent « communiquer » entre eux pour effectuer le calcul du champ des contraintes ce qui est loin d'être facile à gérer avec un logiciel de résolution par éléments finis classique. De plus la longueur caractéristique est difficile à définir physiquement. Bazant et Lin (1988) fixent pour le béton en traction une longueur caractéristique entre 3 à 6 fois le diamètre du plus gros granulats. Cela veut dire que l'on doit avoir une taille de maillage de l'ordre du diamètre du plus gros granulats ce qui peut causer des problèmes de modélisation pour certaines échelles de structures. Pour toutes ces raisons, ces limiteurs n'ont pas rencontré beaucoup de succès.

## **2.5 Limiteur de localisation basé sur la régularisation du module tangent d'adoucissement : théorie de la fissuration diffuse avec conservation de l'énergie de rupture**

Le limiteur le plus simple de tous à mettre en place fait, bien sûr, partie de la première catégorie. Il est basé sur une régularisation du module tangent d'adoucissement en le rendant dépendant du maillage. Le principe de conservation de l'énergie de rupture est adopté.

C'est ce type de limiteur que Bouzaiene (1995) a choisi pour la modélisation du comportement adoucissant du béton en traction et en compression et que l'on retrouve aujourd'hui dans notre modèle *EPM3D*. Ce choix est justifié aussi par la volonté de garder un modèle portatif, c'est-à-dire que l'on veut qu'il soit utilisable avec n'importe quel logiciel d'éléments finis et sans aucune modification du cadre standard de la théorie locale de la mécanique des milieux continus.

Nous tenons à préciser que ce type de limiteur ne va pas distribuer les déformations sur plusieurs éléments. La localisation des déformations a toujours lieu et il n'y a toujours qu'une seule rangée d'éléments qui plastifient. Le limiteur agit seulement sur le comportement global de la structure pour assurer l'unicité de la solution vis-à-vis du maillage.

### **2.5.1 Cas de la traction**

Le concept de la fissuration répartie a été développé pour le cas de la fissuration en traction. Il est donc important de présenter le concept dans le cas plus simple d'une propagation de fissure en mode I avant d'en faire une généralisation pour le cas de la compression.

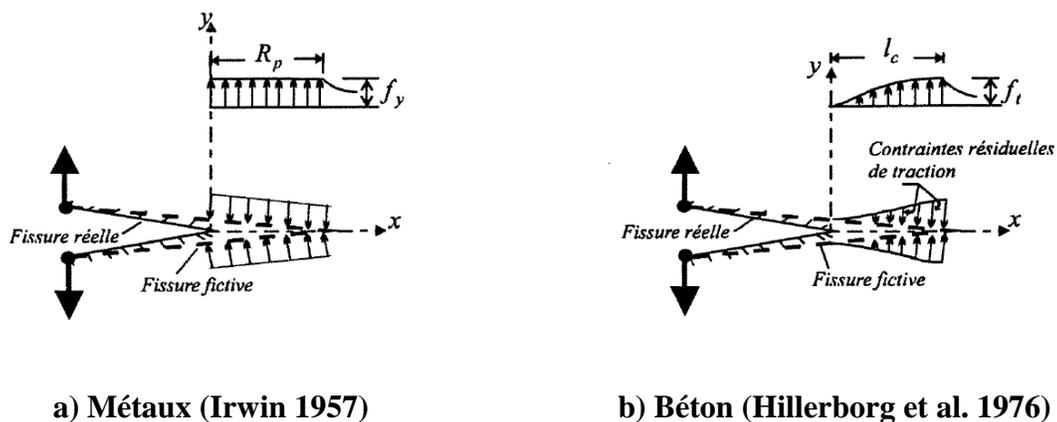
#### **2.5.1.1 Modèle de fissuration fictive (FCM) adapté au béton : définition de l'énergie de rupture en traction $G_f$**

La définition de l'énergie de rupture en traction  $G_f$  trouve son origine à la base de la mécanique de la rupture avec la théorie de Griffith (1921) qui traite de la propagation d'une fissure en mode I pour un matériau purement linéaire élastique (*Linear Elastic Fracture Mechanics, LEFM*). L'énergie de rupture est définie comme étant l'énergie consommée par la propagation de

la fissure. Pour un matériau purement linéaire, les contraintes à la pointe de la fissure augmentent à l'infini. C'est un cas très théorique qui est adapté seulement aux matériaux comme le verre, la céramique ou la glace.

Plus tard, Irwin (1957) a introduit le concept de fissuration fictive (*fictitious crack model, FCM*) pour les matériaux parfaitement plastiques (métaux). Les contraintes à la pointe de la fissure n'augmentent plus à l'infini mais sont égales à la contrainte plastique  $f_y$  du matériau. Il définit une zone de processus ou d'élaboration (*Fracture Process Zone, FPZ*) où le matériau est plastique en avant de la pointe de la fissure. La longueur de la zone est noté  $R_p$  sur la Figure 2.23a. Les contraintes empêchant l'ouverture de fissure dans la FPZ sont appelées les contraintes de cohésion.

Hillerborg et al. (1976) ont ensuite adapté le modèle de fissuration fictive au béton. Pour le béton, la distribution des contraintes plastiques de cohésion dans la FPZ n'est pas constante. Comme illustré sur la Figure 2.23b, les contraintes de cohésion diminuent progressivement sur une longueur  $l_c$  de la contrainte maximale en traction  $f_t$  à zéro à la pointe de la fissure réelle. Le cas particulier du béton est que la longueur  $l_c$  est très grande comparée à  $R_p$  pour les métaux et la dissipation d'énergie s'effectue de manière beaucoup plus complexe.



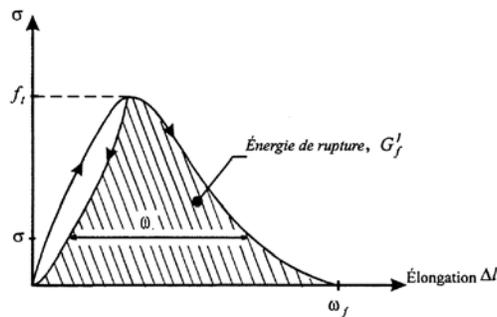
**Figure 2.23 - Différence entre le concept de fissuration fictive pour les métaux et pour le béton (d'après Bouzaiene, 1995)**

Cependant Hillerborg et al. (1976) font le postulat que l'énergie de rupture du béton est calculable de la même façon que pour les métaux et définissent donc l'énergie de rupture en traction dissipée par unité de surface par l'intégrale de la courbe contrainte de cohésion vs ouverture de fissure fictive :

$$G_f = \int_0^{\delta_f} \sigma(\delta) d\delta \quad (2.5)$$

où  $\sigma$  est la contrainte de cohésion variant le long de la FPZ de longueur  $l_c$ ,  $\delta = 0$  est l'ouverture de fissure fictive à la pointe et  $\delta_f$  est l'ouverture de la fissure fictive où la contrainte de cohésion devient nulle.  $G_f$  s'exprime en N/m.

En pratique, on peut obtenir  $G_f$  en réalisant un essai de traction directe. On intègre la courbe de contrainte-déplacement de la presse en soustrayant la partie de la courbe correspondant au matériau non fissuré (Figure 2.24). On peut aussi obtenir  $G_f$  de façon plus précise avec le test de la poutre en flexion 3 points préconisé par le comité RILEM (UNI EN., 2005). Ce test est effectué sur une poutre de longueur 600 mm et de section 150x150 mm<sup>2</sup> entaillée sur sa fibre inférieure à mi-longueur. De cette façon on impose une faiblesse et on contrôle l'apparition de la fissure. On mesure l'ouverture de fissure et la force appliquée à mi-travée et par calcul inverse on obtient  $G_f$ . Il existe aussi un test sur une dalle circulaire posée sur 3 appuis avec charge au centre. Ces méthodes sont utilisées à l'École Polytechnique de Montréal pour la caractérisation mécanique des bétons renforcés de fibres (de Montaignac, 2011, Tordjman, 2012).



**Figure 2.24 - Calcul de l'énergie de rupture en traction  $G_f$  avec la courbe d'un essai de traction directe (d'après Bouzaiene, 1995)**

$G_f$  dépend avant tout de la composition du béton notamment de la taille du plus gros granulat et de sa résistance en compression  $f_c'$ . Le code CEB-FIP 2010 européen stipule la formule suivant pour  $G_f$  (en N/m) :

$$G_f = 73(f_{cm})^{0,18} \quad (2.6)$$

où  $f_{cm}$  est la résistance moyenne et vaut  $f_c' + 8$  MPa. Cette équation est valable pour une température ambiante de 20°C.

### 2.5.1.2 Modèle de fissuration diffuse : principe de conservation de l'énergie de rupture

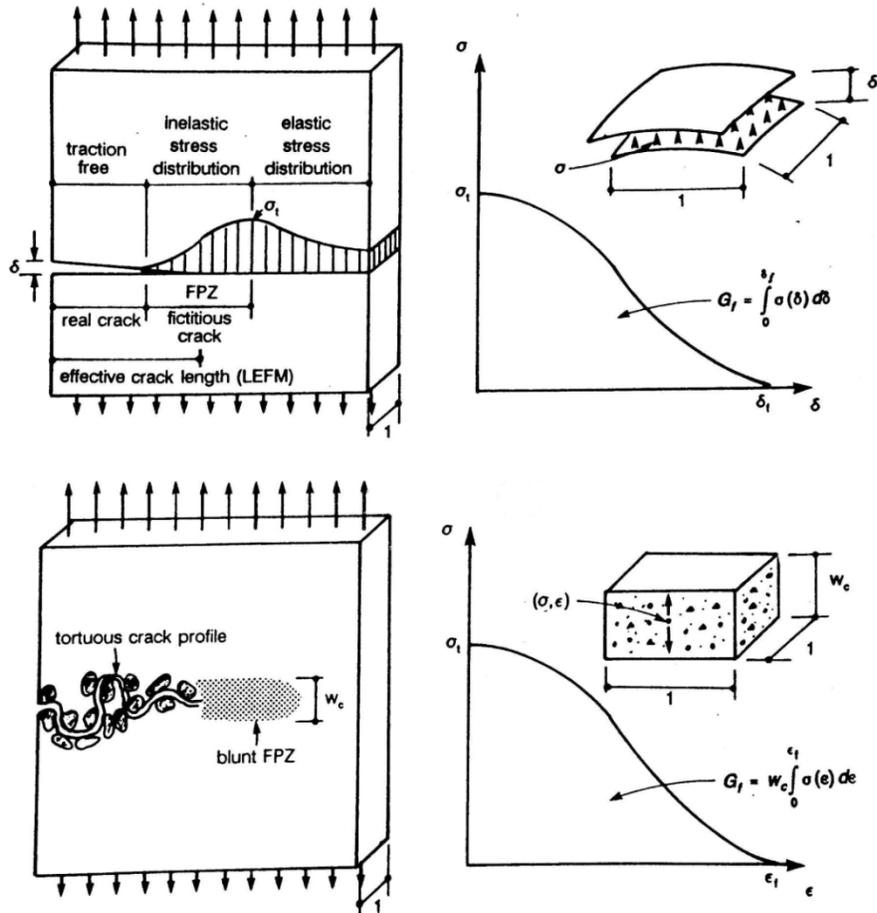
Les modèles de fissuration répartie ou diffuse (*smearred crack model*) reposent donc sur un postulat fondamental de la mécanique de la rupture du béton : l'énergie de rupture en traction du béton, notée  $G_f$ , est un paramètre intrinsèque du matériau. C'est pourquoi les modèles qui utilisent cette technique de régularisation sont aussi appelés dans la littérature « *energy-based fracture model* ». On rencontre aussi l'appellation : modèle de Dugdale-Barenblatt (Dugdale, 1960 et Barenblatt, 1962).

L'approche d'Hillerborg et al. (1976) considère que la fissure est linéique. En réalité la fissure est tortueuse et la localisation des déformations se produit sur une bande de matériau. C'est pourquoi Bazant et Oh (1983) proposent un modèle de fissuration par bande (*crack band model*) qui constitue le fondement des modèles de fissuration diffuse pour le béton. L'énergie de rupture devient :

$$G_f = \int_0^{\delta_f} \sigma(\delta) d\delta = w_c \int_0^{\varepsilon_f} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon \quad (2.7)$$

où  $w_c$  est la largeur de la bande. Du point de vue purement mathématique, ce n'est qu'un changement de variable avec  $\varepsilon = \frac{\delta}{w_c}$ . Cette égalité assure la conservation de l'énergie de rupture.

La Figure 2.25 représente le passage de la fissuration discrète à la fissuration répartie.



**Figure 2.25 – Équivalence entre le modèle de fissuration fictive (fissuration discrète) et le modèle de fissuration par bande (fissuration répartie) (d'après Bhattacharjee, 1993)**

Dans la zone fissurée, la loi constitutive est définie en termes de contrainte-déformation. Pour lutter contre les problèmes de dépendance du maillage expliqués précédemment, Bazant et Oh (1983) fixent  $w_c$  à trois fois la taille du plus gros granulat.

Très vite on s'est rendu compte qu'en reliant directement  $G_f$  à la taille du maillage, on diminuait considérablement les problèmes de dépendance au maillage (Willam et al., 1986; Rots, 1988; Pramono et Willam, 1989; Dahlblom et Ottosen, 1990; Yamaguchi et Chen, 1990).  $w_c$  a laissé place à  $h$ , le paramètre de maille ou taille caractéristique du maillage :

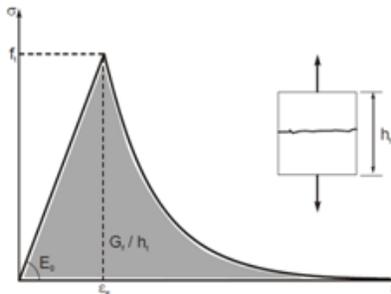
$$\frac{G_f}{h} = \int_0^{\epsilon_f} \sigma(\epsilon) d\epsilon \quad (2.8)$$

Pour un maillage donné, le ratio  $G_f/h$  est fixé. Il faut donc modifier la loi constitutive pour chaque maillage, c'est-à-dire pour chaque  $h$  choisi, de façon à ce que l'intégrale soit toujours égale à  $G_f/h$ .

Si on choisit une loi linéaire pour le comportement post-pic, il est alors très facile de la modifier en jouant uniquement sur le coefficient de la pente. Si la loi est bilinéaire, exponentielle ou inverse, on peut jouer sur d'autres paramètres. Par exemple dans le modèle *EPM3D*, on utilise une forme exponentielle avec :

$$\sigma = f_t \exp\left(-\frac{\varepsilon - \varepsilon_e}{\varepsilon_a}\right) \quad (2.9)$$

où  $\varepsilon_e = \frac{f_t}{E_0}$  et  $\varepsilon_a$  est le paramètre dépendant de  $h$  qui permet de modifier la loi de façon à conserver l'énergie. On assume un comportement linéaire en pré-pic.



**Figure 2.26 - Courbe en traction dans *EPM3D* (d'après Massicotte et al., 2012)**

Notons que la taille caractéristique  $h$  de l'élément dépend de la géométrie de l'élément, du nombre de points d'intégration de Gauss et de l'orientation du plan de fissure. Elle doit être mesurée dans la direction normale au plan de fissure.

## 2.5.2 Cas de la compression

### 2.5.2.1 Considérations

La théorie de la fissuration diffuse pour l'adoucissement en traction repose donc sur la postulat fondamental que l'énergie de rupture en traction est un paramètre intrinsèque du matériau. Pour le cas de la compression, il s'avère que les chercheurs n'arrivent toujours pas aujourd'hui à

se mettre d'accord sur l'existence d'une énergie de rupture en compression. Comme on l'a vu, les travaux de Van Mier (1986) mettent en évidence la localisation en compression, mais ceci n'est pas accepté par toute la communauté scientifique. La modélisation de l'adoucissement en compression manque cruellement de paramètres intrinsèques clairs pour avancer.

De plus le comportement post-pic en compression est plus complexe qu'en traction, puisqu'il est le résultat de deux modes de propagations combinés (modes I et II). L'effet du confinement doit aussi être pris en compte dans la formulation post-pic. La rupture en compression s'accompagne de déformations latérales excessives.

Notons aussi que dans le cas d'une rupture en traction le plan de fissure est facile à identifier, il est normal à la direction de la contrainte maximale. Dans le cas d'une rupture en compression, l'orientation du plan de fissure est très difficile à évaluer. Il est donc difficile de définir physiquement la direction dans laquelle la mesure de  $h$  doit être effectuée. Pour une modélisation en trois dimensions on conseille donc de garder des éléments avec une géométrie proche du cube où  $h$  est calculé par :

$$h = \sqrt[3]{dV} \quad (2.10)$$

où  $dV$  est le volume représenté par le point d'intégration. Nous verrons au chapitre 4 que nous utilisons des éléments cubes à intégration réduite avec un seul point d'intégration. Donc dans notre cas,  $h$  est égal à l'arête du cube de l'élément.

Il faut donc faire des choix quant à la précision que l'on désire pour notre modèle et les différents aspects sur lesquels nous voulons mettre l'accent. Dans le but de garder un modèle simple et donnant de bons résultats, Bouzaiene (1995) considère une localisation des déformations parfaite en compression et définit de manière « déguisée » une énergie de rupture en compression en incorporant l'effet du confinement. De cette façon, Bouzaiene espérait être capable de modéliser le comportement ductile des colonnes en béton armé plus ou moins confinées. Plus tard Ben Ftima (2013) fera un parallèle direct avec l'énergie de rupture en traction en définissant explicitement une énergie de rupture en compression. Nous présentons plus en détails au chapitre suivant le modèle de Bouzaiene et les modifications apportées par Ben Ftima (2013).

Nous présentons dans ce qui suit des modèles que nous avons rencontré qui modélisent le comportement post-pic en compression en incluant le principe de conservation d'énergie de rupture.

### 2.5.2.2 Modèle de Markeset et Hillerborg (1995) pour la compression uniaxiale

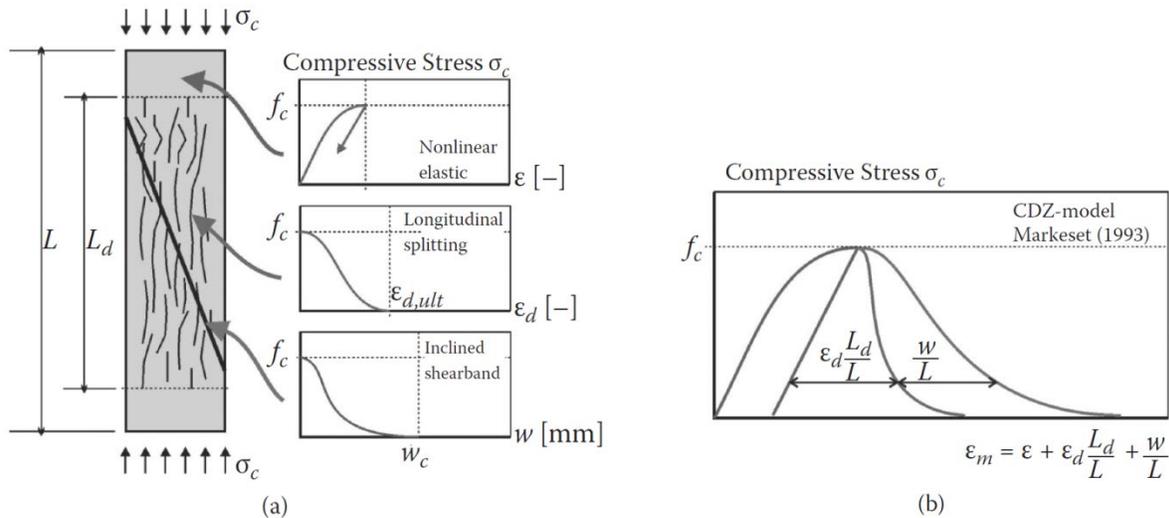
En 1995, Markeset et Hillerborg publient un article présentant un nouveau modèle appelé « CDZ model » (Compressive Damage Zone model). C'est une amélioration des modèles d'Hillerborg (1989) et de Bazant (1989) qui ont proposé une approche simple en faisant un parallèle entre adoucissement en traction et en compression uniaxiale.

Le modèle de Markeset et Hillerborg (1995) ne prend pas en compte les effets du confinement latéral. Il se base sur l'hypothèse d'une zone de fracture en compression de longueur limitée,  $L_d$ . Cette longueur est plus grande que celle donnée par Bazant (1989). Ils prennent en compte la localisation des déformations ainsi que les effets d'échelle mais aussi la fissuration par fendage. Le post-pic en compression est décrit au moyen de trois courbes (Figure 2.27). La première courbe définit le déchargement élastique. Cette courbe est valide sur la longueur totale du spécimen,  $L$ . La deuxième décrit la fissuration par fendage, distribuée sur la longueur  $L_d$ , tandis que la troisième est liée à la localisation des déformations par fissuration en bande de cisaillement.

D'après Van Mier (2013), c'est le modèle en compression uniaxiale le plus abouti à ce jour, car c'est le seul à considérer les fissures de fendage sur une certaine longueur  $L_d$ . Cependant ce modèle est qualitatif et aucune équation n'est calibrée sur des essais expérimentaux. Il apporte juste des éléments de réponse quant à la prise en compte des différents phénomènes observés. La déformation d'adoucissement moyenne se décompose donc en trois parties comme ceci :

$$\varepsilon_m = \varepsilon_{\acute{e}l} + \varepsilon_d \frac{L_d}{L} + \frac{w}{L} \quad (2.11)$$

où  $\varepsilon_m$  est la déformation moyenne sur toute la hauteur  $L$  du spécimen,  $\varepsilon_d$  est la déformation moyenne due au fendage sur la hauteur endommagée  $L_d$  et  $w$  est l'ouverture de fissure en bande de cisaillement. Ce dernier paramètre peut être comparé à l'ouverture de fissure dans la modélisation de l'adoucissement en traction.



Représentation des trois courbes et leurs zones d'application

Composition des déformations dans la zone endommagée

**Figure 2.27 - Modèle de Markeset et Hillerborg (1995)**

Ici l'énergie de rupture en compression peut donc être décomposée en deux termes :

$$G_{f_c} = G_{f\_cisaillement} + L_d W_{fendage} \quad (2.12)$$

où  $G_{f\_cisaillement}$  est l'énergie de rupture dissipée par la bande de cisaillement par unité de surface et est analogue à  $G_f$  en traction.  $W_{fendage}$  est l'énergie de rupture dissipée par la fissuration de fendage par unité de volume. On ramène l'énergie de rupture dissipée par fendage à une énergie par unité de surface en la multipliant par la longueur  $L_d$ .

Cependant ce modèle pose problème, puisqu'il introduit des paramètres supplémentaires à déterminer de façon expérimentale et ceci n'est pas aisé. L'obtention en pratique de la longueur  $L_d$  de la zone de dommage est très difficile.

Par ailleurs, lors de la présence de confinement, même à faible niveau, les fissures de fendage n'apparaissent plus et le terme  $L_d W_{fendage}$  peut être négligé (Samani et Attard, 2012). C'est pourquoi nous pensons que l'hypothèse d'un modèle basé sur l'énergie de rupture en compression où seule la propagation de la fissure en mode II entre en compte est tout à fait appropriée lorsque le but ultime est de modéliser des poteaux en béton armé. Dans notre modèle, la variation de la pente post-pic ne sera fonction que de la propagation de la fissure en bande de cisaillement influencée par le confinement. Nous rejoignons ainsi le modèle de Van Mier (2009).

### 2.5.2.3 Modèles pour la compression triaxial

Ces modèles traitent de l'adoucissement en le caractérisant par le couple déformation et contrainte au pic  $(\varepsilon_0, \sigma_0)$  et la contrainte résiduelle ( $\sigma_{résiduelle} = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \sigma$ ). Ainsi la qualité du modèle dépend essentiellement du critère de rupture utilisé pour calculer  $(\varepsilon_0, \sigma_0)$  et de la formule de la contrainte résiduelle, fonction du confinement ou non.

La fonction de la courbe  $\sigma$ - $\varepsilon$  post-pic, reliant la contrainte au pic à la contrainte résiduelle, peut être linéaire (Saatcioglu et Razvi, 1992), fractionnelle (Attard et Setunge, 1996), exponentielle (Binici, 2005) ou puissance (Samani et Attard, 2012). Certains définissent des points supplémentaires le long de la courbe d'adoucissement comme des points d'inflexions dans le modèle d'Attard et Setunge (1996) pour une meilleure superposition des résultats. Tous ces modèles adoptent un paramètre réglable de façon à ce que l'aire sous la courbe soit toujours égale à  $G_f/h$ . Ils sont donc utilisables dans une modélisation par éléments finis. Cependant l'aire sous la courbe prise en compte est un peu différente. En effet, on ne prend que l'aire comprise entre  $\sigma_0$  et  $\sigma_{résiduelle}$  (Figure 2.28). On peut voir ceci comme la véritable énergie dissipée par la propagation de la fissure en bande de cisaillement, puisqu'une fois la fissure complètement propagée, il ne reste que des contraintes de frottement responsable de la présence de la contrainte résiduelle. De plus, on vient ajouter l'aire correspondante au déchargement élastique.

La forme supposée pour le déchargement varie d'un modèle à l'autre. Elle peut tout aussi bien être linéaire mais avec un module de déchargement spécifique ou bien être non linéaire. C'est une des questions encore en suspens dans la littérature. Cependant pour que le modèle soit cohérent, il faut absolument que les éléments se trouvant hors de la zone de localisation se déchargent bien de la même façon que celle supposée dans le calcul de l'aire hachurée. Nous verrons au chapitre 3 que notre modèle souffrait d'une telle incohérence.

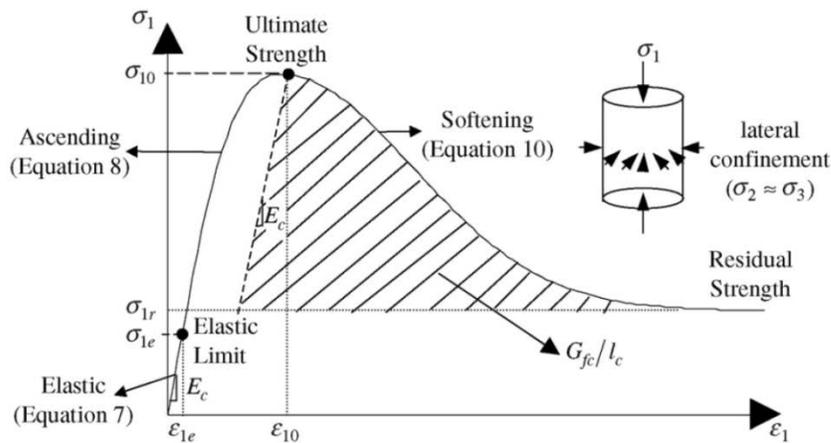
#### 2.5.2.3.1 Modèle de Binici (2005)

À l'instar de Cusson et Paultre (1995) ou Cusson et al. (1996), Binici (2005) propose une fonction exponentielle pour décrire la partie adoucissante de la courbe  $\sigma$ - $\varepsilon$ . L'équation de la courbe d'adoucissement est donc :

$$\sigma = \sigma_{résiduelle} + (\sigma_0 - \sigma_{résiduelle}) \exp \left[ - \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\alpha} \right)^2 \right] \quad (2.13)$$

$$\text{Avec } \alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}(\sigma_0 - \sigma_{résiduelle})} \left( \frac{2G_{fc}}{h} - \frac{(\sigma_0 - \sigma_{résiduelle})^2}{E_c} \right) \quad (2.14)$$

où le paramètre  $\alpha$  est calculé de façon à ce que l'aire hachurée sous la courbe de la Figure 2.28 soit égale à  $G_{fc}/h$ . Le critère de rupture utilisé pour déterminer  $(\varepsilon_0, \sigma_0)$  est celui de Pramono et Willam (1989). Ce critère de rupture est très utilisé dans les modèles récents et fournit de bons résultats. La contrainte résiduelle dépend du niveau de confinement et est aussi calculée avec le critère de Pramono et Willam. Le déchargement est supposé se produisant linéairement avec le module d'Young initial  $E_c$ .



**Figure 2.28 - Courbe contrainte-déformation pour le béton confiné (d'après Binici, 2005)**

Les valeurs de l'énergie de rupture  $G_{fc}$  sont calculées à partir d'essais de compression uniaxiale issus d'articles de références comme (Van Mier, 1986), (Vonk, 1992) ou (Van Mier et al., 1997).

Le point faible de ce modèle tient au fait que Binici considère  $G_{fc}$  indépendante de la contrainte de confinement. Cela conduit à une mauvaise superposition des résultats.

### 2.5.2.3.2 Modèle de Samani et Attard (2012)

Le modèle de Samani et Attard (2012) paru tout récemment est une version améliorée du modèle d'Attard et Setunge (1996). Ce dernier avait quelques limitations majeures. Par exemple,

il ne prenait pas en compte les effets d'échelle et était établi pour des faibles contraintes de confinement, ne pouvant ainsi afficher le mode de transition fragile/ductile. Samani et Attard (2012) proposent une fonction puissance pour définir le comportement post-pic :

$$\frac{\sigma}{\sigma_0}(\varepsilon) = \frac{\sigma_{résiduelle}}{\sigma_0} + \left(1 - \frac{\sigma_{résiduelle}}{\sigma_0}\right) \left(\frac{\sigma_i}{f'_c}\right)^{\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_i - \varepsilon_0}\right)^2} \quad (2.15)$$

où  $(\varepsilon_i, \sigma_i)$  sont les coordonnées du point d'inflexion de la courbe. L'utilisation d'un point d'inflexion comme point de passage obligatoire de la courbe post-pic leur permet d'avoir des résultats qui se superposent bien avec les données expérimentales. C'est sur ces paramètres que l'on peut jouer pour la conservation de l'énergie :

$$\frac{G_{fc}}{h} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}(\varepsilon_i - \varepsilon_0)(\sigma_0 - \sigma_{résiduelle})}{\sqrt{\ln(f'_c) - \ln(\sigma_i)}} + \frac{\frac{1}{2}(\sigma_0 - \sigma_{résiduelle})^2}{E_c} \quad (2.16)$$

Samani et Attard (2012) définissent une énergie de rupture en compression dépendant du confinement. Le calcul de  $(\varepsilon_i, \sigma_i)$  fait intervenir la plus petite contrainte de confinement dans le plan normal à la contrainte majeure de compression. Cela permet de prendre en compte les chargements où le confinement latéral n'est pas uniforme. Les résultats sont bien plus satisfaisants que ceux de Binici (2005). C'est pourquoi nous nous en inspirerons.

Par ailleurs, ils utilisent leur propre critère de rupture pour le calcul des coordonnées au pic et assument eux aussi un déchargement linéaire avec le module initial. Ils calculent la contrainte résiduelle en fonction du confinement. Nous adopterons d'ailleurs directement leur formule pour le calcul de la contrainte résiduelle dans notre modèle.

C'est pour nous le meilleur modèle que nous ayons rencontré, car il incorpore tous les phénomènes que nous avons décrits dans cette revue. Il est calibré sur une multitude d'essais de compression triaxiale connus de la littérature<sup>3</sup>. Il est même capable de modéliser le béton sous compression uniaxiale en proposant des équations un peu différentes dans le cas d'un confinement nul et ainsi tenir compte de la fissuration de fendage. Dans les conclusions et recommandations de

---

<sup>3</sup> Voir l'article de Samani et Attard pour la liste complète des essais qui ont servi à la calibration des équations

ce mémoire, nous conseillons dans un futur proche d'adopter complètement ce modèle pour la partie post-pic.

#### **2.5.2.4 Remarques**

Ces modèles ont besoin de s'appuyer sur une multitude d'essais expérimentaux et malheureusement, on manque dans la littérature d'essais en compression multiaxiale qui se rendent jusqu'à la contrainte résiduelle. Il faudrait constituer une banque de données avec des essais standardisés pour tous les types de bétons et pour la totalité de la courbe  $\sigma$ - $\varepsilon$ . Cependant les paramètres à faire varier, comme le niveau de confinement, la géométrie ou la résistance, sont tellement nombreux que l'ampleur de la tâche est colossale. La recherche sur le comportement post-pic souffre aussi d'une grande dispersion des résultats en fonction du matériel d'essai et du processus utilisé (vitesse du chargement, dispositif de contrôle en déplacement, etc.) dans les laboratoires du monde entier. Le test round-robin mené par Van Mier et al. (1997) est un premier pas pour la mise en place de normes vis-à-vis des essais, mais ceci reste limité. Il a donc fallu effectuer des choix quant aux paramètres majeurs à prendre en compte et aux paramètres mineurs à laisser de côté. Nous présenterons au chapitre 3 les améliorations que nous avons apportées à notre modèle. Elles ne tiennent pas forcément compte de tout ce que nous avons présenté dans cette revue de littérature. Nous tenions à garder une formulation la plus simple possible en limitant le nombre de paramètres d'entrée de manière à observer un bon comportement global.

## CHAPITRE 3 PRÉSENTATION ET MODIFICATIONS DU MODÈLE CONSTITUTIF EPM3D

### 3.1 Présentation d'*EPM3D*

#### 3.1.1 Introduction

Dans ce paragraphe, nous allons décrire les principaux aspects théoriques de notre modèle. En effet quand on élabore un modèle de matériau, on doit faire des choix quant à la philosophie à adopter pour répondre au mieux à ses propres besoins. En suivant les différentes classifications données au paragraphe 2.3, nous pouvons définir le modèle *EPM3D* (Endommagement Progressif Multiaxial Tridimensionnel) comme un modèle constitutif de béton à l'échelle macroscopique suivant la théorie hypoélastique pour le comportement pré-pic. Pour la phase post-pic, la théorie de la fissuration diffuse (*smearred crack theory*) est adoptée et le limiteur de localisation choisi est basé sur la conservation de l'énergie de rupture aussi bien en traction qu'en compression. Toutes les informations données ici peuvent être retrouvées dans le rapport interne le plus récent (Massicotte et al., 2012).

La principale fonction de ce modèle est la modélisation de structures en béton armé par les éléments finis. Il n'est donc pas question ici de parler de l'interaction des granulats ou des effets de l'infiltration de l'eau dans la matrice. Le comportement que nous cherchons est un comportement global. Traiter la fissuration de manière diffuse est obligatoire quand on modélise à l'échelle de la structure en éléments finis (taille caractéristique des éléments environ entre  $10^{-2}$  et 1 m). En effet la théorie de la fissuration discrète nécessite un maillage très fin autour de la fissure si on veut obtenir des résultats appréciables (taille caractéristique entre  $10^{-4}$  et  $10^{-3}$  m) ce qui est inconcevable dans notre cas.

En phase pré-pic, le béton est donc considéré comme un matériau homogène mais orthotrope. L'orthotropie apparaît pour des contraintes supérieures à la limite linéaire élastique. Elle est prise en compte par la définition de 6 coefficients de Poisson différents ( $\nu_{ij} \neq \nu_{ji}$ ). En phase post-pic, le béton se divise en deux milieux homogènes : la zone de déchargement élastique et la zone fissurée. La taille de la zone fissurée est due uniquement à la taille du maillage. La continuité

du champ de déformation entre les deux zones est assurée. Le principe de superposition des déformations est possible, car les deux zones subissent la même contrainte. Le raisonnement est analogue à une chaîne de ressorts en série.

### 3.1.2 Différentes approches pour la modélisation de la phase pré-pic

Bouzaiene et Massicotte (1997) ont donc fait le choix d'un modèle tridimensionnel avec l'approche hypoélastique pour traiter du comportement non linéaire du béton (comportement pré-pic). Il faut savoir qu'il existe une multitude d'approches avec chacune leurs modèles fondateurs associés : approche élastique non linéaire (Kotsovos, 1980, ou Ahmad et Shah, 1986), élasto-plastique avec règle d'écoulement associée (Murray et al., 1979) ou non associée (Han et Chen, 1985), élasto-plastique endommageable (Bazant et Kim, 1979) ou enfin endochronique (Bazant et Bhat, 1976)<sup>4</sup>. Le choix d'un modèle hypoélastique fut justifié par Bouzaiene pour différentes raisons. Tout d'abord, l'approche hypoélastique tient compte de l'historique de chargement dans la formulation de la loi constitutive ce qui est indispensable pour la modélisation d'essais cycliques (sismique ou fatigue). Elle n'est pas la seule à pouvoir le faire, mais les autres approches telles que l'approche endochronique ou élasto-plastique endommageable conduisent à des procédures de calculs trop lourdes et sont confrontées à des difficultés quant à la définition des paramètres d'entrée du modèle. Le but étant de modéliser le béton à l'échelle de la structure, il a fallu faire le choix d'un calcul moins coûteux avec une précision moindre mais tout à fait acceptable. De plus, afin de prendre en compte la transition entre les deux états extrêmes du béton, à savoir son comportement adoucissant en compression uniaxiale et son comportement ductile voire écrouissant en compression triaxiale, Bouzaiene et Massicotte (1997) ont fait le pari que la théorie hypoélastique basée sur le concept de déformation équivalente de Darwin et Pecknold (1977) serait la mieux adaptée.

Dans ce qui suit, nous allons dans un premier temps présenter la modélisation du comportement pré-pic. Sans trop entrer dans les détails, nous définirons le principe du modèle

---

<sup>4</sup> Pour une description détaillée des différentes approches non linéaires pour les modèles constitutifs de béton, nous invitons le lecteur à se reporter à la thèse de Bouzaiene (1995).

hypoélastique, le paramètre d'endommagement utilisé et le concept de la déformation équivalente. Nous finirons par une introduction aux critères de rupture. La modélisation du comportement post-pic en compression dans *EPM3D* sera traitée à part entière au paragraphe 3.2.

### 3.1.3 Définition d'un modèle hypoélastique

Bouzaiene (1995) rapporte que selon l'ASCE (1982), l'avantage de la théorie hypoélastique est d'être simple et adéquate pour décrire le comportement irréversible des géomatériaux comme le béton. L'approche hypoélastique est très proche de l'approche élastique non linéaire. Il convient donc de faire le lien avec cette dernière.

L'approche élastique non linéaire est tout simplement une généralisation de l'approche élastique linéaire. Nous rappelons donc que l'approche élastique linéaire consiste à relier par une relation linéaire, loi de Hooke, le tenseur des déformations à celui des contraintes par l'intermédiaire de la matrice constitutive  $E_{ijkl}$ :

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.1)$$

où  $E_{ijkl}$  est une matrice carrée d'ordre 6 (dans le cas d'un problème en trois dimensions) et à coefficients constants. Le passage à la théorie élastique non linéaire se fait tout simplement en mettant en place une relation plus générale :

$$\sigma_{ij} = F_{ijkl}(\varepsilon_{kl}) \varepsilon_{kl} \quad (3.2)$$

où  $F_{ijkl}$  est une matrice-fonction quelconque. Le calcul de chaque contrainte est effectué par une fonction différente. Ce genre de fonction est généralement difficile à mettre en œuvre et nécessite souvent beaucoup de paramètres d'entrées. Il est aussi très difficile par l'intermédiaire de cette théorie de définir une variable interne décrivant le comportement du béton. Ici la formulation est dite totale, car on vient définir la loi contrainte-déformation pour tout état de déformation. On parle de relation injective entre le tenseur des déformations et le tenseur des contraintes.

L'aspect fondamental de l'approche hypoélastique réside alors dans la formulation incrémentale de la loi constitutive. En effet dans notre cas, on définit une relation linéaire entre l'incrément de contrainte et l'incrément de déformation :

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\sigma_{pq}, \varepsilon_{rs}, \lambda) d\varepsilon_{kl} \quad (3.3)$$

où  $C_{ijkl}$  est appelé le tenseur constitutif tangent, ou par vulgarisation module tangent. Il est recalculé à chaque incrément et dépend de l'historique des contraintes et déformations  $(\sigma_{pq}, \varepsilon_{rs})$  et d'un paramètre d'endommagement  $\lambda$  que nous définissons au paragraphe suivant. Un modèle hypoélastique sera alors d'autant plus efficace si la définition de son paramètre d'endommagement est fidèle à la réalité. Le passage d'un modèle hypoélastique à une dimension à un modèle à deux dimensions est assuré par le principe de la déformation équivalente de Darwin et Pecknold (1977), puis par généralisation à trois dimensions grâce aux travaux d'Elwi et Murray (1979).

### 3.1.4 Principe de variable d'endommagement

Le principe de la variable d'endommagement est nécessaire pour une bonne modélisation des cycles de chargement et déchargement. Avec cette variable, on vient prendre en compte la dégradation de la matrice de béton par microfissuration due aux mésomécanismes présentés au paragraphe 1.2. À l'instant où il effectue le calcul, le modèle a besoin de savoir comment le béton a été sollicité depuis le début de l'analyse. En effet un béton qui aura subi une forte compression ( $>70\%$  de  $f_c'$ ) dans une certaine direction aura un module de déchargement affaibli ( $E_{déchargement} < E_0$ ) et sera moins performant en traction selon cette même direction qu'à l'état initial. Il en est de même pour des chargements où la direction de la contrainte majeure de compression peut varier pendant l'essai. Si on commence par une forte compression sur l'axe  $x$  et que l'on bascule la sollicitation de l'éprouvette progressivement sur l'axe  $z$ , la résistance selon l'axe  $z$  ne sera pas la même que pour un essai uniaxial classique sur l'axe  $z$ . Ainsi Bouzaiene (1995) définit un paramètre d'endommagement pour tenir compte de la dégradation de la matrice du béton et être capable de modéliser correctement les chargements non proportionnels. Il suit ainsi la position énoncée dans l'état de l'art de l'ASCE (1982), à savoir que « pour avoir une formulation indépendante de la rotation des axes de contraintes principales, seul un scalaire peut fournir une mesure indépendante de l'historique des déformations ».

Ce paramètre d'endommagement, noté  $\lambda$ , est donc un scalaire dont la valeur est incrémentée de  $\Delta\lambda$  pour chaque incrément de déformation plastique  $\Delta\varepsilon^p$ . Un incrément de déformation négatif, c'est-à-dire dans le sens du déchargement, n'a donc aucun effet sur la valeur du paramètre

d'endommagement. Ce dernier fournit donc une mesure de l'irréversibilité des lésions qu'a subit la matrice. Il pourrait s'apparenter à une forme de calcul d'entropie dans la théorie du désordre. Il est toujours positif et ne peut qu'augmenter. Il est borné entre 0 et 1, où 0 signifie que le béton est sain et encore à l'état élastique et 1 signifie que l'on a atteint le pic sur la courbe uniaxiale équivalente. Le paramètre d'endommagement est noté  $\lambda$  et s'exprime par :

$$\lambda = \int_{\text{chemin de chargement}} d\lambda = \int \frac{1}{\varepsilon_{max}^p} d\varepsilon^p \approx \sum \Delta\lambda = \sum \frac{\Delta\varepsilon^p}{\varepsilon_{max}^p} = \sum \frac{\Delta\varepsilon_{eq} \frac{\Delta\sigma}{E_0}}{\varepsilon_c - \frac{\sigma_c}{E_0}} \quad (3.4)$$

où  $\Delta\varepsilon_{eq}$  est l'incrément de déformation équivalente qui vient de la courbe de déformation équivalente uniaxiale décrite au paragraphe suivant,  $\Delta\sigma$  est l'incrément de contrainte selon l'axe considéré,  $\varepsilon_c$  et  $\sigma_c$  sont la déformation et la contrainte au pic sur la courbe de déformation équivalente,  $E_0$  est le module élastique et  $\varepsilon^p$  est la déformation plastique.  $\varepsilon_{max}^p$  représente donc la déformation plastique maximale et vaut :

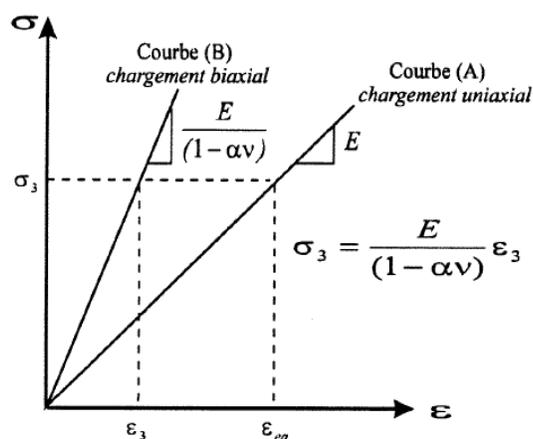
$$\varepsilon_{max}^p = \varepsilon_c - \varepsilon_{élastique} = \varepsilon_c - \frac{\sigma_c}{E_c} \quad (3.5)$$

### 3.1.5 Concept de la déformation uniaxiale équivalente

Le principe de la déformation uniaxiale équivalente est apparu avec le modèle hypoélastique de Darwin et Pecknold (1977). Ce modèle a connu le succès par sa simplicité et sa facilité à être intégré dans les programmes de calcul. À l'origine, ce concept a été établi pour des contraintes biaxiales et a été étendu au cas de chargement triaxial par Elwi et Murray (1979).

Ce principe répond à la question : comment peut-on obtenir la courbe  $\sigma$ - $\varepsilon$  d'un chargement biaxial à partir de celle d'un chargement uniaxial ? « La technique consiste essentiellement à soustraire les effets de Poisson lorsqu'on vient calculer les modules de rigidité de la matrice constitutive » (Bouzaiene, 1995). Sur la Figure 3.1, on représente la courbe  $\sigma$ - $\varepsilon$  dans la direction de compression principale  $\sigma_3$  correspondant à un chargement dans le domaine linéaire, biaxial et proportionnel avec  $\sigma_1 = \alpha\sigma_3$  et  $\sigma_2 = 0$ . Pour un niveau de contrainte donnée, on veut connaître la déformation correspondante.

Le concept s'explique bien en condition de chargement biaxial dans le domaine linéaire. Cela devient un peu plus compliqué à illustrer dans le cas d'un chargement triaxial dans le domaine non linéaire. C'est pourquoi nous ne rentrerons pas dans les détails et laissons au lecteur intéressé le soin d'approfondir ce point en allant lire les articles mentionnés.



**Figure 3.1 - Concept de la déformation uniaxiale équivalente dans le cas d'un chargement biaxial (d'après Darwin et Pecknold, 1977)**

### 3.1.6 Critères de rupture

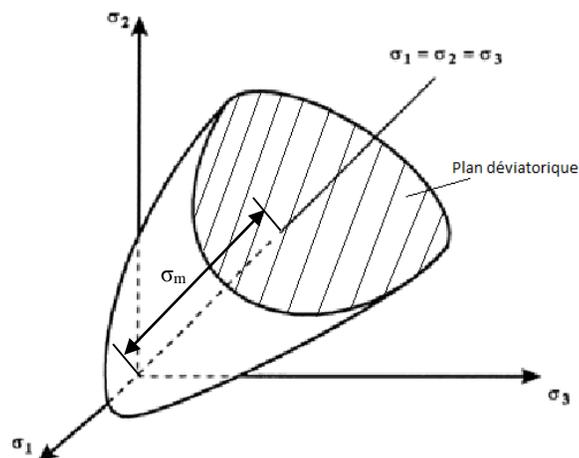
Dans le modèle d'origine de Bouzaiene (1995), deux enveloppes de ruptures sont disponibles : l'enveloppe de rupture de Willam et Warnke (1975) et celle de Hsieh et al. (1982). Nous ne donnerons pas ici les équations de ces deux enveloppes de ruptures, car leur formulation est compliquée et ceci alourdirait la lecture de ce mémoire inutilement, mais nous renvoyons le lecteur à la thèse de Bouzaiene ou directement aux articles de références pour de plus amples informations. Nous nous attarderons plus ici sur la manière de les utiliser au sein du modèle puisque la formulation de la courbe post-pic fait intervenir le couple déformation et contrainte au pic ( $\epsilon_c$ ,  $\sigma_c$ ). Le choix du critère est donc crucial pour avoir une bonne superposition des résultats d'analyse avec les essais expérimentaux.

Les enveloppes de rupture sont nécessaires pour évaluer la contrainte au pic  $\sigma_c$ <sup>5</sup> dans le cas d'un chargement triaxial quelconque. On représente souvent les enveloppes de rupture dans un repère orthonormé à trois dimensions comme sur la Figure 3.2 avec les contraintes principales pour axes directeurs. On appelle axe hydrostatique l'axe représenté sur la Figure 3.2 et d'équation  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ . On appelle plan déviatorique, tout plan normal à l'axe hydrostatique. On peut représenter n'importe quel champ de contrainte  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  initialement écrit dans la base des contraintes principales par un triplet  $(\sigma_m, \tau_m, \theta)$  où  $\sigma_m$  est la contrainte hydrostatique moyenne,  $\tau_m$  est la contrainte déviatorique et  $\theta$  est l'angle de similarité compris entre  $0^\circ$  (méridien de traction) et  $60^\circ$  (méridien de compression). Ces contraintes sont appelées contraintes octaédriques. En fait,  $\sigma_m$  fixe la coordonnée sur l'axe hydrostatique du plan déviatorique dans lequel on se trouve.  $\tau_m$  et  $\theta$  sont les coordonnées polaires du point correspondant au champ de contrainte dans le plan déviatorique (Figure 3.3). Dans le cas du critère de rupture de Willam et Warnke (1975), pour une pression hydrostatique croissante, la forme de l'enveloppe de rupture dans le plan déviatorique passe progressivement d'un triangle à un cercle.

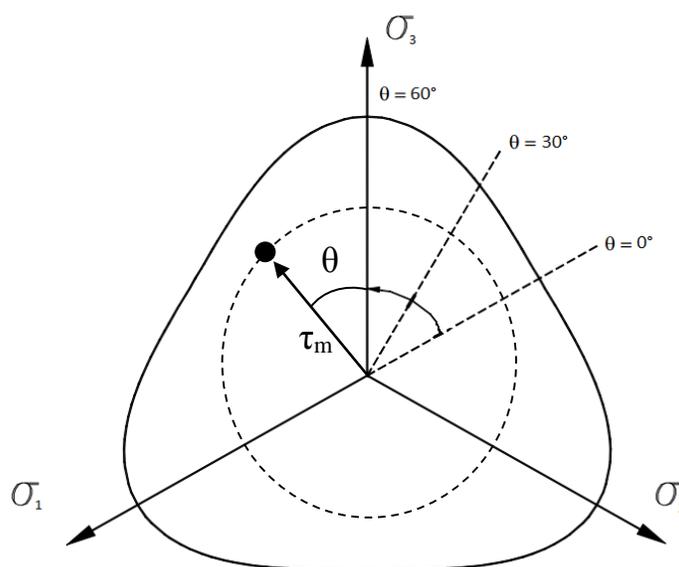
Les deux enveloppes de rupture que nous utilisons ont un point commun dans le sens où elles donnent toutes les deux la résistance ultime aussi bien en compression qu'en traction en considérant que la résistance ne dépend pas du trajet de contrainte, la dégradation de la résistance étant déjà assuré par le paramètre d'endommagement  $\lambda$ . Elles se distinguent principalement par le nombre de points de contrôle utilisés : 5 pour l'enveloppe de Willam-Warnke et 4 pour Hsieh-Ting-Chen. On comprend aisément que plus il y a de points de contrôle, plus l'enveloppe de rupture est sophistiquée et plus le nombre de paramètres d'entrées est grand. Or les paramètres d'entrée doivent être déterminés expérimentalement et leur obtention n'est pas chose facile. Ainsi il faut faire un compromis pour avoir un critère de rupture performant et simple d'utilisation.

---

<sup>5</sup> Quand nous parlons de contrainte au pic, c'est en fait la contrainte maximale que l'on peut atteindre sur l'axe majeur de compression. Dans notre cas, on définit toujours  $\sigma_3$  comme étant la contrainte majeure de compression. On a toujours :  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .



**Figure 3.2 - Forme d'une enveloppe de rupture tridimensionnelle usuelle pour le béton**

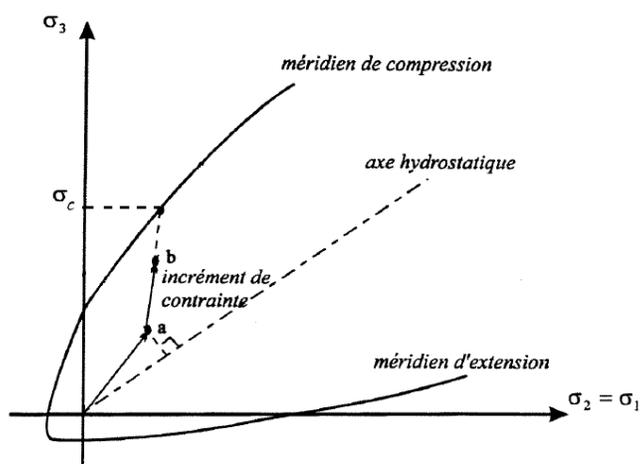


**Figure 3.3 - Représentation des contraintes octaédriques dans le plan déviatorique de coordonnée hydrostatique  $\sigma_m$**

Une fois que l'on a défini l'enveloppe de rupture avec les coordonnées octaédriques, il faut mettre en place un moyen de calculer la contrainte maximale. Tant que l'on se situe loin de la rupture, le calcul de la contrainte au pic  $\sigma_c$  est effectué à chaque pas en prolongeant linéairement l'incrément de contrainte de façon à rencontrer l'enveloppe de rupture (Figure 3.4). La déformation  $\varepsilon_c$  est automatiquement calculée avec le principe de la déformation équivalente. Ainsi pour chaque pas de calcul, on se réfère à une nouvelle courbe contrainte-déformation uniaxiale équivalente où la déformation et la contrainte au pic pour l'axe majeur de compression ( $\varepsilon_c$ ,  $\sigma_c$ ) ont été actualisées

au pas précédent. Cela permet une bonne estimation des déformations pré-pic. D'autres techniques pour obtenir  $\sigma_c$  peuvent être utilisées comme la prolongation suivant la contrainte déviatorique  $\tau_m$  en fixant  $\sigma_m$  ou la prolongation selon une ligne droite passant par l'origine de l'espace  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , mais elles conduisent tantôt à une surestimation tantôt à une sous-estimation des déformations.

À un pas de calcul donné, lorsque l'incrément de contrainte rencontre l'enveloppe, il y a alors rupture. On garde la dernière valeur de  $\sigma_c$  calculée et on passe alors dans une toute autre dimension, celle du post-pic.



**Figure 3.4 - Calcul de la contrainte maximale en compression multiaxiale à l'aide de l'enveloppe de rupture (d'après Bouzaiene, 1995)**

### 3.1.7 Autres capacités du modèles

Quand on s'approche de la résistance maximale du béton, la proportionnalité entre les déformations axiales et latérales due aux effets de Poisson n'est plus valable. Le coefficient de Poisson n'est plus constant et augmente très rapidement. Il se pose alors un problème lors d'un chargement biaxial avec un axe de compression majeure et où l'on viendrait confiner le béton selon un deuxième axe et le laisser libre sur un troisième. Il en résulte que les déformations latérales seront asymétriques et donc qu'il faut utiliser des coefficients de Poisson différents pour chaque plan principal. Bouzaiene a donc mis en place une formulation pour les 6 coefficients  $\nu_{ij}$  ( $i \neq j$ ) :

$$\nu_{ij} = \nu_0 + \lambda(1 - \nu_0) \left( \frac{\sigma_i - \sigma_j}{\sigma_c} \right) ; \sigma_i < 0 ; \sigma_i \leq \sigma_j \quad (3.6)$$

$$\nu_{ij} = \nu_0 ; \text{sinon}$$

où  $\sigma_i$  est la contrainte majeure de compression et  $\sigma_j$  est l'une des contraintes de confinement.  $\nu_0$  est le coefficient de Poisson usuel du béton souvent pris égal à 0.2. Bouzaiene fait intervenir le paramètre d'endommagement  $\lambda$  dans l'expression des coefficients de Poisson. Quand on s'approche de la rupture en compression et que la contrainte de confinement devient négligeable devant la contrainte majeure de compression,  $\nu_{ij}$  tend vers  $\lambda$ , c'est-à-dire vers 1.

C'est grâce à la définition non symétrique de ces coefficients que l'on rend la matrice constitutive non symétrique à l'approche du pic et donc que l'on prend en compte la transformation du béton en un matériau orthotrope. Le paramètre  $\lambda$  donne juste une information de l'avancée de la microfissuration au sein du matériau de manière globale. On peut voir aussi qu'avec cette définition si on reste en chargement élastique alors  $\lambda = 0$  et donc  $\nu_{ij} = \nu_0$ . La matrice constitutive reste alors symétrique.

L'une des autres capacités du modèle est la prise en compte du raidissement en traction. Les travaux de Nour et al. (2005) ont notamment apporté des améliorations sur ce point. Ce phénomène bien connu est observé lors de la mise en traction d'un béton renforcé d'une barre d'armature. La rigidité de l'ensemble béton fissuré/acier est meilleure que la somme de chaque partie séparément. Pour représenter cette synergie, on peut soit modifier la loi post-pic en traction du béton soit la loi en traction de l'acier. Le choix qui est effectué dans notre modèle est de venir modifier localement (autour des armatures) la loi post-pic en traction du béton en proposant à l'utilisateur plusieurs équations de raidissement issues de la littérature.

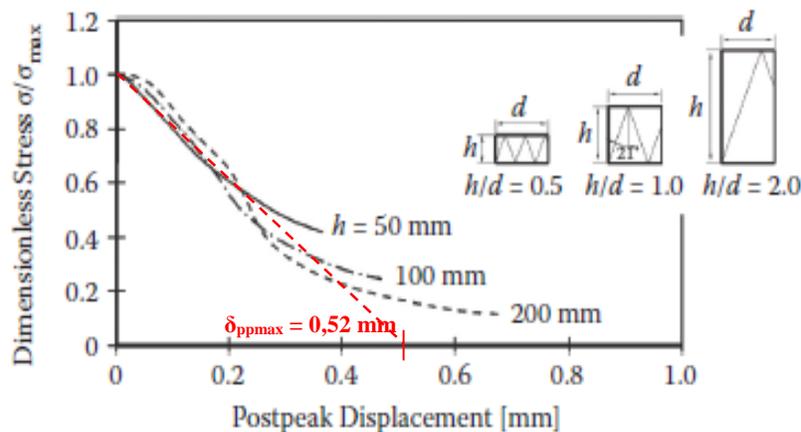
### **3.2 Modélisation du comportement post-pic en compression avant modifications**

Dans l'état actuel du modèle *EPM3D*, l'utilisateur a accès aux deux paramètres  $\delta$  et  $\gamma_u$  qui conditionnent le comportement post-pic en compression uniaxiale. Le paramètre  $\delta$  correspond à un déplacement (en millimètres) post-pic inélastique maximal en compression uniaxiale et sera défini

au paragraphe suivant. Le paramètre  $\gamma_u$  quant à lui correspond au rapport de la contrainte résiduelle  $\sigma_{résiduelle}$  sur la contrainte au pic  $f_c'$  en compression uniaxiale.

### 3.2.1 Définition du paramètre $\delta$

La définition et la valeur de  $\delta$  par défaut dans *EPM3D* proviennent de la série d'essais réalisés par Van Mier (1986) sur des spécimens avec des rapports d'élancements  $h/d$  de 0.5, 1 et 2. Comme nous l'avons vu au chapitre 2, Van Mier a montré que si l'on considère le post-pic en termes de déplacement (mm) et non plus en termes de déformations ( $\epsilon$ ), on peut démontrer que la rupture est localisée. Ainsi quand on trace la courbe contrainte-déplacement post-pic de ces trois essais, on obtient trois courbes qui se superposent (Figure 3.5).



**Figure 3.5 - Courbe contrainte-déplacement post-pic des essais de Van Mier (1986)**

Sur ce graphique, la contrainte est normalisée au pic et le déplacement post-pic est calculé simplement en soustrayant au déplacement totale  $\delta_{tot}$  le déplacement  $\delta_c$  au pic :

$$\delta_{pp} = \delta_{tot} - \delta_c \quad (3.7)$$

Si on assimile ces trois courbes à une seule droite (en pointillés rouges), on peut définir le déplacement maximal correspondant à une contrainte résiduelle nulle. On le note  $\delta_{ppmax}$  et il vaut ici 0.52mm.

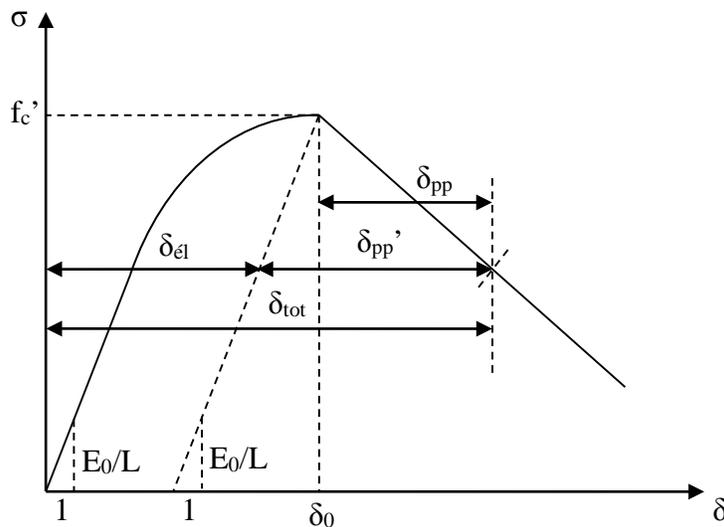
Dans sa thèse, Bouzaiene déduit la composante élastique du déplacement  $\delta_{el}$  correspondant au déchargement des régions en dehors de la zone de rupture. De cette façon, il s'assure de

représenter le vrai comportement du matériau au sein de la zone de localisation. En effet, la zone de localisation absorbe le déchargement élastique des parties adjacentes.

Le déplacement post-pic inélastique qu'il considère a donc pour expression :

$$\delta_{pp'} = \delta_{tot} - \delta_{\acute{e}l} = \delta_{tot} - \left( \delta_c - \frac{(f'_c - \sigma)}{E_0} L \right) \quad (3.8)$$

où  $L$  est la longueur de mesure du capteur de déplacement. Il faut donc veiller à modifier les courbes des essais avec la bonne valeur de  $L$ . Si le déplacement est calculé entre les plateaux de la presse, comme dans le cas présent pour les essais de Van Mier, alors  $L$  est égale à la hauteur du spécimen. On représente sur la Figure 3.6 ci-dessous les différents déplacements considérés dans le diagramme contrainte-déplacement.

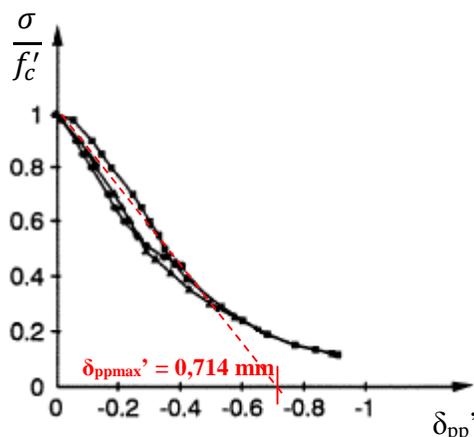


**Figure 3.6 - Représentation du déplacement post-pic inélastique  $\delta_{pp'}$**

On peut noter que Bouzaiene a supposé que les parties des spécimens de Van Mier en dehors de la zone de rupture se déchargeaient linéairement avec un module  $E_0$  correspondant au module élastique initial.

En définitive cela revient à effectuer une petite rotation pour chaque courbe dans le sens trigonométrique. La superposition des courbes s'en trouve légèrement modifiée, comme on peut le voir sur la Figure 3.7 ci-dessous.  $\delta_{pp'}$  peut être défini comme une « ouverture de fissure en compression ». Mais si on considère que la rupture se produit uniquement avec une bande en cisaillement et que l'on néglige les fissures de fendage réparties sur une zone d'endommagement

plus grande alors  $\delta_{pp}'$  est simplement une ouverture de fissure en cisaillement. C'est ce paramètre qui est actuellement utilisée dans *EPM3D* et qui est noté simplement  $\delta$ . Bouzaiene (1995) considère que c'est un paramètre intrinsèque du matériau. La valeur de  $\delta$  sera alors différente pour chaque composition de béton. Sans le vouloir réellement, c'était une manière « déguisée » de définir une énergie de rupture en compression uniaxiale  $G_{fcu}$ .



**Figure 3.7 - Courbes contrainte normalisée vs déplacement post-pic avec déduction de la composante élastique (d'après Bouzaiene, 1995)**

Pour le mélange de béton de Van Mier (1986), on trouve donc  $\delta_{ppmax}' = 0.714\text{mm}$  pour un béton normal d'environ 45 MPa. C'est cette valeur qui est utilisée par défaut actuellement dans *EPM3D*.

### 3.2.2 Équation de la pente d'adoucissement de Bouzaiene (1995)

Au départ, Bouzaiene a fait le choix d'une modélisation très simple en représentant la phase post-pic par une simple fonction linéaire sans plateau de contrainte résiduelle. Il a défini une droite passant par le pic et dont la pente  $E_d$  est simplement le produit de  $h$ , la taille caractéristique du maillage, et d' $E_{dp}$ , la pente du diagramme contrainte-déplacement :

$$E_d = E_{dp}h \quad (3.9)$$

$$\text{Avec } E_{dp} = -\frac{f_c'}{\delta}\kappa \quad (= -1,4f_c'\kappa, \text{ pour } \delta = 0.714\text{mm}) \quad (3.10)$$

où  $\delta$  est l'ouverture de fissure maximale en compression définie au paragraphe précédent.  $\kappa$  est un coefficient introduit par Bouzaiene, afin de prendre en compte l'effet du confinement sur la pente

d'adoucissement. En fait  $\kappa$  relie directement la pente d'adoucissement à  $R_\tau$ , ratio introduit par Bouzaiene qui traduit l'état de contrainte dans lequel se trouve l'élément de béton.  $R_\tau$  est défini comme étant le rapport entre le cisaillement maximal et la contrainte normale moyenne :

$$R_\tau = \frac{\tau_{max}}{\sigma_{moy}} = \frac{\left(\frac{(\sigma_{max} - \sigma_{min})}{2}\right)}{\left(\frac{(\sigma_{max} + \sigma_{min})}{2}\right)} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{\sigma_{max} + \sigma_{min}} \leq 1 \quad (3.11)$$

où  $\sigma_{max} = \sigma_3$  est la contrainte majeure en compression et  $\sigma_{min} = \sigma_1$  est la contrainte de compression minimale dans le plan normal à la direction de  $\sigma_{max}$ , autrement dit la contrainte de confinement la plus faible. Notons que le modèle est codé de façon à ce que l'on ait toujours  $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$ .  $R_\tau$  est toujours compris entre 0 et 1. Pour un état de contrainte non confiné ou en traction, c'est-à-dire pour  $\sigma_{min} \geq 0$ ,  $R_\tau = 1$ . Pour un état de contrainte hydrostatique de compression, c'est-à-dire pour  $\sigma_3 = \sigma_2 = \sigma_1 \leq 0$ ,  $R_\tau = 0$ .

L'une des plus importantes contributions de la thèse de Bouzaiene fut la détermination du point de transition entre le comportement fragile et ductile du béton sous confinement. En effet, il a montré que celui-ci était défini pour  $R_\tau$  environ égal à 0,725. Ainsi il a introduit le coefficient  $\kappa$  afin de linéariser les valeurs de  $R_\tau$  entre 0 (état de transition) et 1 (état non confiné).

$$\kappa = 3.636R_\tau - 2.636 \geq 0 \quad (3.12)$$

Ainsi pour  $R_\tau = 1$ , béton non confiné,  $\kappa = 1$ . Et pour  $R_\tau = 0.725$ , béton au point de transition,  $\kappa = 0$ . Pour toute valeur de  $R_\tau < 0.725$ , on pose  $\kappa = 0$ .

Au point de transition et au-delà, la pente post-pic  $E_d$  sera donc nulle. Le béton sera considéré comme parfaitement plastique à ce point. On ne considère pas de pente positive en post-pic pour traduire l'érouissage au-delà du point de transition. On considère que l'érouissage s'il a lieu sera pris en charge par l'approche hypoélastique et le critère de rupture en phase pré-pic. En résumé avec cette formulation simple, Bouzaiene entendait prendre en compte l'augmentation de la pente en fonction de  $f_c'$  et la diminution de la pente en fonction du confinement. De plus en reliant directement la pente  $E_d$  à la taille caractéristique du maillage  $h$ , il voulait prendre en compte l'effet de la localisation.

Mais cette formulation n'était pas tout à fait adéquate et amenait des problèmes de dépendance vis-à-vis du maillage. La définition de la pente  $E_d$  n'incluait pas le déchargement élastique de l'élément fini dans lequel avait lieu la fissure. La formule proposée par Bouzaiene était juste qualitative et ne vérifiait donc pas la conservation de l'énergie de rupture en compression.

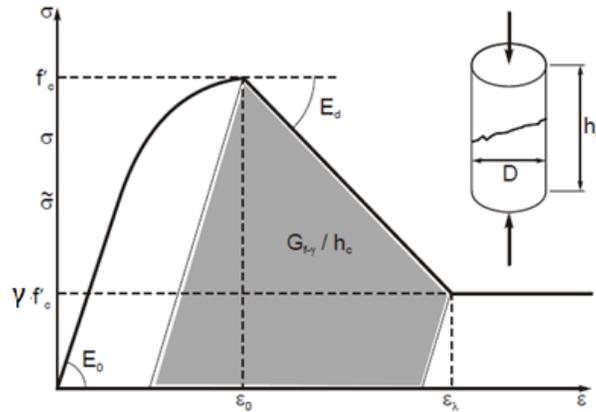
### 3.2.3 Modifications apportées par Ben Ftima

Ben Ftima (2013) a donc reformulé l'équation d' $E_d$  de Bouzaiene (1995) pour réduire la dépendance du modèle à la taille du maillage et vérifier la conservation de l'énergie de rupture. Il a aussi introduit le paramètre  $\gamma_u$  qui est le rapport de la contrainte résiduelle sur la contrainte au pic en compression uniaxiale :

$$\gamma_u = \frac{\sigma_{\text{résiduelle\_uniaxiale}}}{f_c'} \quad (3.13)$$

De plus il a importé le modèle dans le logiciel *ABAQUS*. Il est maintenant possible d'effectuer des analyses avec le module *ABAQUS/Explicit* qui est plus approprié pour les analyses avec des matériaux adoucissants. Nous expliquerons plus en détails au chapitre 4 les différences que cela implique vis-à-vis d'une résolution implicite traditionnelle. Cela nous permet de procéder relativement facilement à la validation du modèle.

La courbe  $\sigma$ - $\varepsilon$  post-pic en compression est toujours représentée par une fonction linéaire. Cependant un plateau traduisant la présence d'une contrainte résiduelle est maintenant ajouté (Figure 3.8). Le modèle se veut toujours aussi simple, car on cherche seulement à épouser les différentes tendances qui ont pu être mises en évidence au chapitre 2.



**Figure 3.8 - Courbe contrainte-déformation en compression pour le comportement post-pic dans *EPM3D* (d'après Massicotte et al., 2012)**

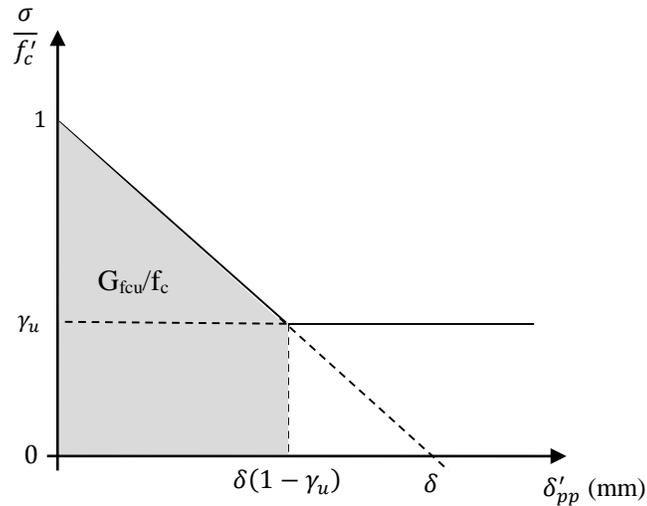
L'aire grisée sous la courbe contrainte-déformation sur la Figure 3.8 est égale à  $G_{fcu}/h$ . Ben Ftima a ajouté l'aire correspondante au déchargement élastique qui manquait dans la définition de la pente de Bouzaiene. On a :

$$\frac{G_{fcu}}{h} = \frac{1}{2} f_c'^2 (1 - \gamma_u^2) \left( \frac{1}{E_0} - \frac{1}{E_d} \right) \quad (3.14)$$

où  $G_{fcu}$  est l'énergie de rupture en compression uniaxiale. Elle est tout simplement égale à l'aire sous la courbe contrainte-ouverture de fissure en compression (Figure 3.9). Ben Ftima garde comme référence les essais de Van Mier et définit toujours la loi contrainte-ouverture de fissure en compression par une droite. Le calcul est alors très simple et donne :

$$G_{fcu} = \frac{1}{2} \delta (1 - \gamma_u^2) f_c' \quad (3.15)$$

Notons que  $G_{fcu}$  est homogène au produit d'une contrainte par un déplacement (MPa.mm ou N/mm). Par exemple pour le mélange de Van Mier (1986),  $G_{fcu} = 16$  N/mm avec  $\gamma_u = 0$  et  $f_c' = 45$  MPa.



**Figure 3.9 – Définition de  $G_{fcu}$**

Nous avons alors deux équations pour définir  $G_{fcu}$ . Afin de maintenir l'égalité entre ces deux équations, la pente  $E_d$  doit s'exprimer ainsi :

$$E_d = - \frac{h}{\frac{\delta}{f'_c} - \frac{h}{E_0}} \quad (3.16)$$

Notons que Ben Ftima considère toujours un déchargement linéaire avec le module élastique initial  $E_0$ . La prise en compte du confinement a complètement été mise de côté par Ben Ftima, car le modèle était trop dépendant du maillage quand on venait multiplier la pente  $E_d$  par le coefficient  $\kappa$ . Par conséquent, la description du comportement post-pic est faite uniquement dans le cas de la compression uniaxiale.

### 3.3 Commentaires sur le modèle avant nos modifications

#### 3.3.1 Prise en compte du confinement

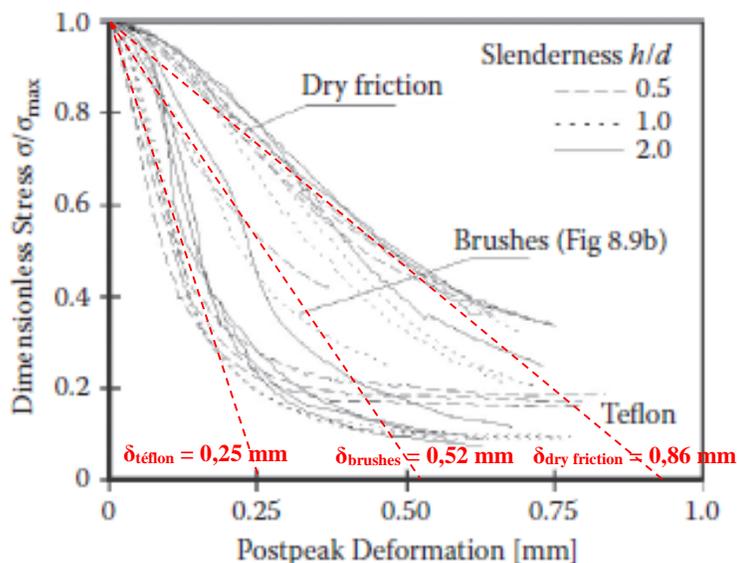
Le modèle n'est donc plus en mesure de traiter l'effet du confinement sur le comportement post-pic. Il va falloir remettre en place le paramètre  $\kappa$  tout en temps gardant à l'esprit que le modèle doit demeurer indépendant du maillage. On apportera aussi une attention particulière quant à la diminution de la pente post-pic en fonction du niveau de confinement. Nous allons devoir modifier

la relation entre  $\kappa$  et  $R_t$  en se calibrant sur les essais de compression triaxiale de la littérature. En effet Bouzaiene (1995) avait proposé une relation linéaire entre ces deux paramètres juste pour tenir compte de la tendance. Les résultats de Smith et al. (1989) ou de Xie et al. (1995) montrent que la relation n'est pas linéaire. Une diminution significative de la pente post-pic s'observe pour des valeurs de confinement faibles. Pour des valeurs de confinement proches du point de transition, le coefficient de la pente ne semble plus beaucoup varier. Il faudra probablement mettre en place une relation avec une fonction inverse ( $1/x$ ) ou exponentielle inverse ( $e^{-x}$ ) entre  $\kappa$  et  $R_t$ .

De plus il semblerait que le confinement ait aussi un effet sur le plateau de contrainte résiduelle (Van Mier, 2009; Samani et Attard, 2012), nous devons donc faire varier le plateau de contrainte résiduelle en fonction du confinement. Selon les différents essais présents dans la littérature, la contrainte résiduelle serait en grande partie due aux contraintes de frottement se développant entre les différents blocs de béton glissant les uns par rapport aux autres une fois que les macrofissures se sont propagées. Le fait de confiner un échantillon vient augmenter les contraintes de frottement. Il en résulte un gain de résistance.

### **3.3.2 Commentaire sur la valeur par défaut du paramètre $\delta$**

Bouzaiene (1995) a mis en place le paramètre  $\delta$  en considérant qu'il était un paramètre intrinsèque du matériau. Comme on l'a vu la valeur par défaut est fixée à 0.714 mm pour un béton de 45 MPa. Deux ans plus tard dans l'article de Van Mier et Van Vliet (1997), des essais supplémentaires ont été réalisés sur la même composition de béton et avec des spécimens de même géométrie. Seules les conditions limites de chargement variaient. Si l'on regarde la Figure 3.10 ci-dessous, on s'aperçoit que pour les trois systèmes de chargement utilisés on obtient trois valeurs de  $\delta$  différentes pour un même matériau.



**Figure 3.10 - Courbes contrainte normalisée au pic vs déplacement post-pic pour différents rapports d'élanement et systèmes de chargement (d'après Van Mier et Van Vliet, 1997)**

On retrouve la valeur  $\delta_{ppmax} = 0.52\text{mm}$ , noté ici  $\delta_{brushes}$ , qui a servi au modèle de Bouzaiene. On voit ici que si on limite au maximum le frottement aux extrémités du spécimen, la pente de la courbe  $\sigma$ - $\delta_{pp}$  devient plus raide et donc  $\delta_{ppmax}$  diminue,  $\delta_{teflon} = 0.25\text{ mm}$ .

En toute logique, si l'on veut définir  $\delta$  comme étant l'ouverture de fissure maximale en compression uniaxiale, il faut prendre une valeur de  $\delta$  obtenue avec un système de chargement se rapprochant le plus possible du cas idéal où le frottement est nul. Ici avec des feuilles de téflon, le coefficient de frottement est de l'ordre de 0.01. En tenant compte encore du déchargement élastique, nous devrions donc changer la valeur de 0.714 mm par 0.41 mm pour un béton de 45 MPa.

### 3.3.3 Prise en compte de l'influence de $f_c'$ sur la pente post-pic

Comme nous l'avons mentionné au chapitre 2, la pente post-pic est plus raide pour des bétons de plus fortes résistances. Autrement dit plus  $f_c'$  est grand, plus  $E_d$  est grand. Bouzaiene avait d'ailleurs essayé de prendre en compte ce phénomène dans sa définition d' $E_d$  mais toujours de manière qualitative.

Nous pensons que l'influence de  $f_c'$  ne tient en fait qu'à la définition de  $G_{fcu}$ . Au même titre que  $G_f$  en traction, il faudrait calibrer  $G_{fcu}$  sur des données expérimentales. Cela implique de faire de nombreux essais de compression uniaxiale standardisés sur des mélanges aux compositions différentes afin d'obtenir les lois de contrainte-ouverture de fissure en compression. Une fois cette base de données constituée, on pourrait proposer une relation empirique de  $G_{fcu}$  en fonction de  $f_c'$  et/ou du diamètre du plus gros granulat et/ou de tout autre constituant de la matrice.

Cependant nous manquons aujourd'hui cruellement de ce type de données, d'autant plus qu'il n'existe toujours pas de test standardisé. Le test round-robin mené par Van Mier et al. (1997) et les recommandations qui ont suivi constitue un premier pas dans cette direction mais le chemin reste encore très long.

En attendant, nous pensons que la prise en compte de l'influence de  $f_c'$  peut être réalisée par l'intermédiaire du paramètre  $\delta$ . Il doit rester un paramètre d'entrée que l'utilisateur doit déterminer pour chaque mélange de béton.  $G_{fcu}$  étant égale à :

$$G_{fcu} = \frac{1}{2} \delta (1 - \gamma_u^2) f_c' \quad (3.17)$$

Pour un béton de résistance  $f_c'$  donnée, il faut définir  $\delta$  de façon à ce que l'analyse se superpose du mieux possible avec la courbe contrainte-déformation expérimentale. Nous avons d'ailleurs procédé à ce type de raisonnement plus loin pour le calibrage de  $\kappa$ .

Dans la même optique, l'un des buts principaux de notre programme expérimental présenté au chapitre 5 est la détermination de la valeur de  $\delta$  pour un béton fibré de 80 MPa très utilisé à l'École Polytechnique. Cela aura pour but notamment d'améliorer des analyses de poutres en flexion qui ont subi une rupture du bloc de compression.

## 3.4 Modifications apportées à EPM3D

### 3.4.1 Remise en service du coefficient $\kappa$

Nous avons tout d'abord remis en place le paramètre  $\kappa$ . Pour garder un comportement post-pic indépendant du maillage, nous devons appliquer le coefficient directement à l'énergie de

rupture. Nous notons donc à partir de maintenant  $G_{fc}$  l'énergie de rupture en compression dans le cas général. Elle vaut :

$$G_{fc} = \frac{G_{fcu}}{\kappa} = \frac{1}{2} \delta (1 - \gamma^2) \frac{f'_c}{\kappa} \quad (3.18)$$

Pour  $\kappa = 1$ , on retrouve bien  $G_{fcu}$ . Pour un niveau de confinement approchant l'état de transition ( $\kappa = 0$ ),  $G_{fc}$  tend vers l'infini ce qui est correct puisque le matériau devient ductile. La pente post-pic devient nulle et donc le matériau ne rompt plus. L'équation d' $E_d$  devient alors :

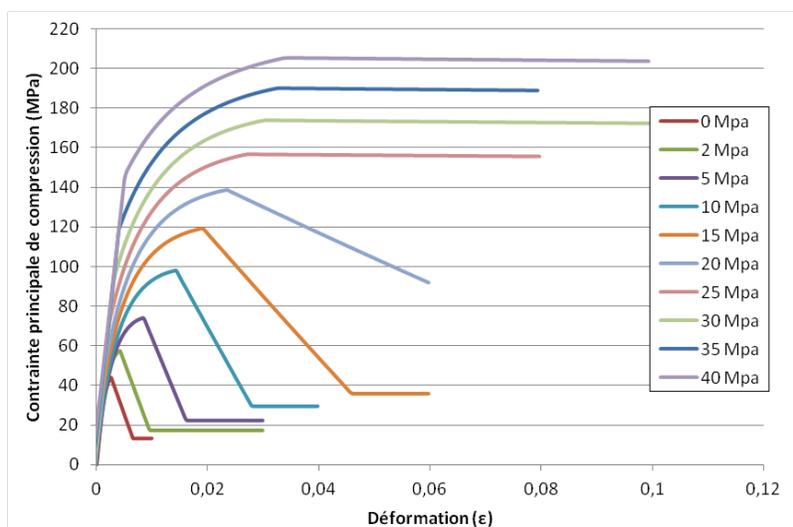
$$E_d = - \frac{h}{\frac{\delta}{\kappa \sigma_c} - \frac{h}{E_0}} \quad (3.19)$$

Notons que nous avons remplacé au dénominateur  $f'_c$  par  $\sigma_c$ . Ainsi la droite est bien définie à partir du pic peu importe le niveau de confinement.

Après quelques analyses avec *ABAQUS* sur un élément cube simple et avec l'enveloppe de rupture de Hsieh et al. (1982)<sup>6</sup>, on obtient une pente de  $E_d$  variant en fonction du confinement et qui devient nulle à partir du point de transition ( $R_r = 0.725$ ) (Figure 3.11). La résistance  $f'_c$  du béton utilisé ici est de 45 MPa. L'effet du confinement est donc à nouveau pris en compte par le modèle pour la partie post-pic. Nous allons procéder à la calibration de  $\kappa$  au paragraphe 3.4.5.

---

<sup>6</sup> Nous verrons au paragraphe suivant que l'utilisation de tel ou tel critère de rupture a une grande importance pour notre modèle.

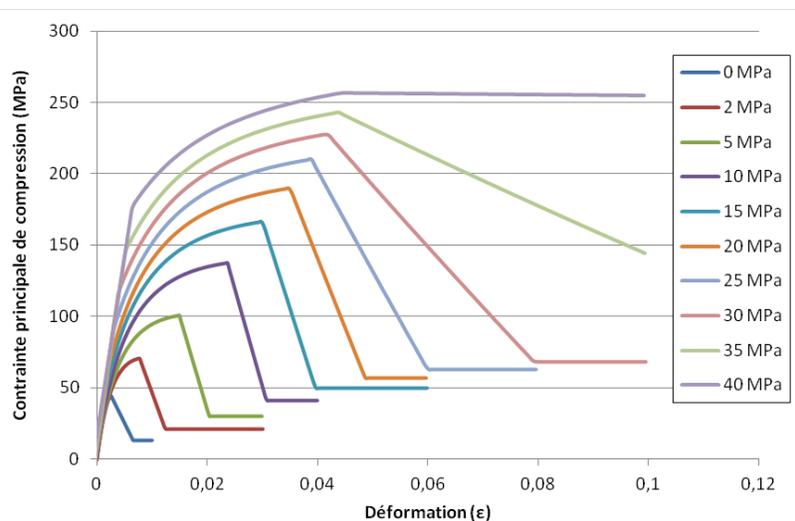


**Figure 3.11 - Analyses de compression triaxiale avec différents niveaux de confinement réalisées sur un simple élément cube avec l'enveloppe de rupture de Hsieh et al. (1982)**

### 3.4.2 Note importante sur les enveloppes de rupture

Nous avons remarqué que le modèle donnait des résultats beaucoup plus satisfaisants quand l'enveloppe de rupture définie par Hsieh et al. (1982) était utilisée à la place de l'enveloppe de rupture de Willam et Warnke (1975). L'enveloppe de Willam-Warnke est celle utilisée par défaut dans le modèle car elle donne de meilleurs résultats de manière globale, notamment dans le traitement d'essais de flexion et de traction.

Cependant le principal défaut de l'enveloppe de Willam et Warnke (1975) est la surestimation de la contrainte maximale en compression sous faible confinement. Étant donné que la valeur de  $R_\tau$  est directement reliée à  $\sigma_{max}$  et  $\sigma_{min}$ , si on surestime  $\sigma_{max}$  cela peut poser quelques problèmes comme on peut le voir sur la Figure 3.12 puisque  $R_\tau$  ne prendra pas les valeurs attendues et sera toujours environ égal à 1 pour un faible confinement. On voit que la pente post-pic devient plus raide pour des valeurs de confinement de 2 ou 5 MPa que pour le cas de la compression uniaxiale ce qui ne correspond pas au phénomène physique observé. Au-dessus de 20 MPa de confinement, le comportement devient adéquat mais les valeurs de la contrainte au pic et de la pente post-pic ne sont pas bonnes. Le point de transition est atteint pour un chargement quasi hydrostatique ce qui ne correspond pas aux observations de Bouzaiene (1995).



**Figure 3.12 - Analyses de compression triaxiale avec différents niveaux de confinement réalisées sur un simple élément cube avec l'enveloppe de rupture de Willam et Warnke (1975)**

Par contre quand on prend l'enveloppe de rupture de Hsieh et al. (1982), le comportement est adéquat à savoir une diminution graduelle de la pente post-pic en fonction du degré de confinement et ce grâce à une meilleure estimation de la contrainte maximale (Figure 3.11). Ainsi si lors d'une analyse il se produit une rupture en compression, nous recommandons fortement d'utiliser cette enveloppe de rupture. Dans la suite de ce mémoire toutes les analyses de validation sont effectuées avec le critère de Hsieh et al. (1982).

### 3.4.3 Incohérence du module de déchargement élastique

Dans les premières analyses que nous avons effectuées pour vérifier l'indépendance des résultats vis-à-vis du maillage, nous avons pu constater une incohérence par rapport au module de déchargement considéré. En effet comme on l'a vu, Ben Ftima a considéré un déchargement élastique selon le module d'Young initial  $E_0$  pour établir la formule d' $E_d$ . Or en parcourant la thèse de Bouzaiene, nous nous sommes aperçus qu'il avait mis en place une définition du module de déchargement particulière  $E_{déchargement}$  dans la phase pré-pic.  $E_{déchargement}$  dépend du module initial  $E_0$ , du paramètre d'endommagement  $\lambda$  et du niveau de confinement représenté par l'ancienne valeur de  $\kappa$ . Il varie de  $E_0$  à  $\frac{2}{3}E_0$  arrivé au pic. Il est ensuite fixé à  $\frac{2}{3}E_0$  pour la partie post-pic. Cela signifie

que les éléments hors zone de localisation se déchargeaient élastiquement avec un module  $E_{déchargement} = \frac{2}{3}E_0$  et que les éléments où la localisation avait lieu se déchargeaient élastiquement avec un module  $E_0$ . La conservation de l'énergie sur tout le spécimen n'était donc plus respectée. Cela conduisait à un décalage des courbes en fonction de la taille caractéristique du maillage. Cela s'observait d'autant plus pour un faible confinement et pour un maillage grossier ( $h$  grand).

Il fallait donc aussi réécrire la formule d' $E_d$  avec le bon module de déchargement :

$$E_d = - \frac{h}{\frac{\delta}{\kappa\sigma_c} - E_{déchargement}} \quad (3.20)$$

Il convient de noter que pour le calcul du module de déchargement, il faut donc faire un choix entre garder la formulation de  $\kappa$  de Bouzaiene ou opter pour la nouvelle formulation de  $\kappa$  proposée plus loin pour la pente d'adoucissement. Cependant ce choix ne pourrait se justifier que par une série d'essais expérimentaux. Pour le moment nous garderons la formulation de Bouzaiene pour le calcul d' $E_{déchargement}$ . L'équation dans la phase pré-pic pour le module de déchargement est :

$$E_{déchargement} = E_0(1 - \chi) \quad (3.21)$$

$$\text{Avec } \chi = \kappa \frac{E_0}{6E_{sec}} R_\varepsilon \text{ où } R_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \text{ et } E_{sec} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

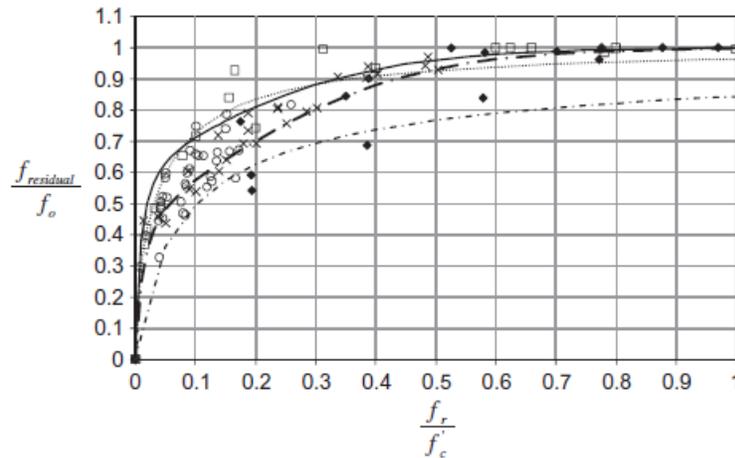
où  $E_{sec}$  est le module sécant au point de la courbe contrainte-déformation auquel on se trouve et  $\varepsilon_c$  est la déformation au pic. Pour un béton normal non confiné ( $\kappa = 1$ ), au pic on a  $R_\varepsilon = 1$  et  $E_0/E_{sec} \sim 2$ , donc  $E_{déchargement} \sim \frac{2}{3}E_0$ . On remarque que si on confine le béton,  $\kappa$  diminue et donc le module de déchargement augmente et reste proche de  $E_0$ . Arrivé au pic, la valeur est fixée et ne changera plus en phase post-pic. Pour de plus amples informations sur le module de déchargement, nous renvoyons le lecteur à la thèse de Bouzaiene (1995).

### 3.4.4 Contrainte résiduelle variable en fonction du confinement

Ben Ftima (2013) a donc introduit le paramètre  $\gamma_u = \frac{\sigma_{résiduelle\_uniaxiale}}{f_c'}$  avec une valeur recommandée de 0.2. Il s'avère que la contrainte résiduelle est, elle aussi, dépendante du

confinement comme le montre la Figure 3.13, tirée de l'article de Samani et Attard (2012). En généralisant, nous introduisons le paramètre  $\gamma$ , ratio de la contrainte résiduelle et de la contrainte au pic en présence de confinement :

$$\gamma = \frac{\sigma_{\text{résiduelle}}}{\sigma_c} \quad (3.22)$$



**Figure 3.13 - Contrainte résiduelle normalisée vs contrainte de confinement normalisée (d'après Samani et Attard, 2012)**

Pour Samani et Attard,  $f_0$  correspond à notre contrainte au pic  $\sigma_c$  et  $f_r$  à la contrainte de confinement  $\sigma_{min}$ . On peut noter que Samani et Attard considèrent que lors d'une compression uniaxiale ( $\frac{\sigma_{min}}{f'_c} = 0$ ) la contrainte résiduelle est nulle ( $\gamma_u = \frac{\sigma_{\text{résiduelle\_uniaxiale}}}{\sigma_c} = 0$ ) contrairement à notre modèle qui recommande  $\gamma_u = 0.2$ . On voit aussi sur la Figure 3.13 que la contrainte résiduelle augmente en fonction du niveau de confinement pour atteindre des valeurs proches de 1 pour  $\frac{\sigma_{min}}{f'_c} > 0.5$  ce qui correspond au point de transition pour des bétons ordinaires. Le ratio  $\frac{\sigma_{min}}{f'_c}$  est appelé ratio de confinement dans la littérature.

Explications et lien avec Bouzaiene (1995) :

Pour des bétons normaux, on considère souvent l'équation de Richart et al. (1928) pour estimer grossièrement la contrainte au pic ( $\sigma_c = \sigma_{max}$ ) :

$$\sigma_{max} = f'_c + 4.5\sigma_{min} \quad (3.23)$$

$$\frac{\sigma_{max}}{f'_c} = 1 + 4.5 \frac{\sigma_{min}}{f'_c} = 3.25 \quad \text{pour} \quad \frac{\sigma_{min}}{f'_c} = 0.5 \quad (3.24)$$

Si on divise  $R_\tau$  par  $f'_c$  au numérateur et au dénominateur et qu'on remplace par les valeurs calculées au-dessus :

$$R_\tau = \frac{\left(\frac{\sigma_{max}}{f'_c} - \frac{\sigma_{min}}{f'_c}\right)}{\left(\frac{\sigma_{max}}{f'_c} + \frac{\sigma_{min}}{f'_c}\right)} = \frac{3.25 - 0.5}{3.25 + 0.5} = 0.733 \approx 0.725 \quad (3.25)$$

En effet pour un rapport de confinement de 0.5, nous sommes très proches de la valeur avancée par Bouzaiene (1995) pour le point de transition. L'influence du confinement exprimée en fonction du ratio  $\frac{\sigma_{min}}{f'_c}$  plutôt que  $R_\tau$  est donc équivalente. D'ailleurs nous n'avons jamais rencontré dans aucun modèle la définition d'un tel facteur  $R_\tau$ . La plupart des modèles utilisent le ratio  $\frac{\sigma_{min}}{f'_c}$ . C'est pourquoi nous exprimerons non seulement  $\gamma$  en fonction de  $\frac{\sigma_{min}}{f'_c}$ , mais aussi de  $\kappa$ . On peut noter que le plateau de contrainte résiduelle augmente très vite pour des contraintes de confinement faibles. Le confinement qu'apporte la présence d'étriers au sein d'un poteau de béton est un confinement passif et de faible niveau. Dépendamment du ratio d'acier, le rapport de confinement ne dépasse quasiment jamais 0.5. Cependant comme on peut le voir sur la Figure 3.13 c'est bien entre 0 et 0.5 que la contrainte résiduelle augmente de la manière la plus significative. Il en est de même pour la pente post-pic. Il est donc important de bien calibrer notre modèle sur cet intervalle.

Nous proposons donc de suivre une version modifiée de la formulation de Samani et Attard (2012) :

$$\gamma = 1 - \frac{1}{400a^{(5.8a^{0.7}+1.3)} + \frac{1}{1-\gamma_u}} \quad (3.26)$$

avec  $a = \frac{\sigma_{min}}{f'_c}$  le ratio de confinement.

La présence de  $\gamma_u$  au dénominateur est une modification de notre part de la formule originale. Nous nous démarquons donc du modèle de Samani et Attard sur ce point, car nous considérons qu'il est possible d'observer une contrainte résiduelle non nulle lors d'un essai de

compression uniaxiale. Nous verrons notamment au chapitre 5 que  $\gamma_u$  semble plus élevé pour un béton fibré que pour un béton normal. Au même titre que  $\delta$ ,  $\gamma_u$  est un paramètre d'entrée du modèle. On représente  $\gamma$  en fonction de  $a = \frac{\sigma_{min}}{f'_c}$  sur la Figure 3.14 avec pour l'exemple  $\gamma_u = 0.2$ .

De plus, à l'origine la formule dépend de  $f'_c$ . Nous nous sommes placés du côté conservateur en adoptant la formule pour un béton de 120 MPa (en point-grand tiret sur la Figure 3.13) et nous avons simplifié les termes faisant intervenir  $f'_c$ .

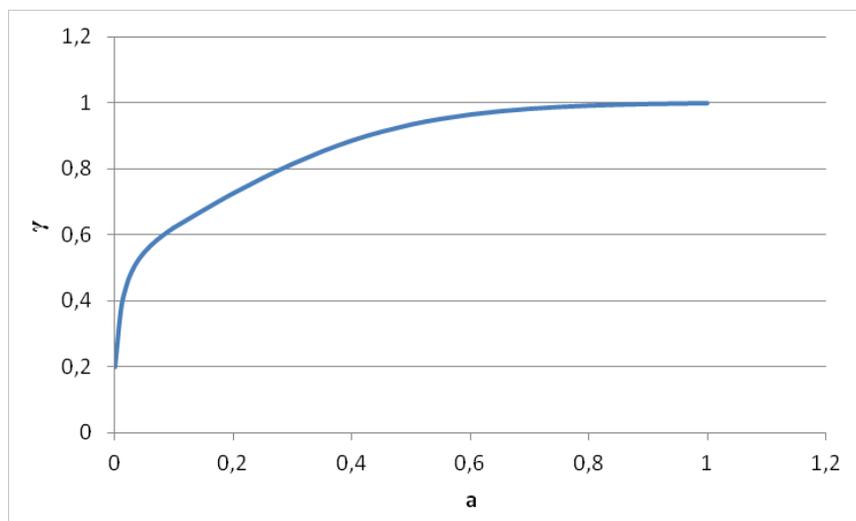


Figure 3.14 - Courbe de  $\gamma$  en fonction de  $\frac{\sigma_{min}}{f'_c}$  avec  $\gamma_u = 0.2$

### 3.4.5 Proposition d'une nouvelle relation pour $\kappa$

#### 3.4.5.1 Problèmes avec les premières propositions

Au début, nous avons proposé des relations de  $\kappa$  toujours en fonction de  $R_t$  car nous pensions que ce paramètre introduit par Bouzaiene traduisait bien l'état de contrainte au sein du matériau susceptible de mener à une rupture fragile ou ductile. Nous avons d'abord remplacé la relation linéaire introduite par Bouzaiene par des relations un peu plus complexes pour prendre en compte le fait que l'effet du confinement sur la pente d'adoucissement est très significatif dès les premières valeurs de confinement.

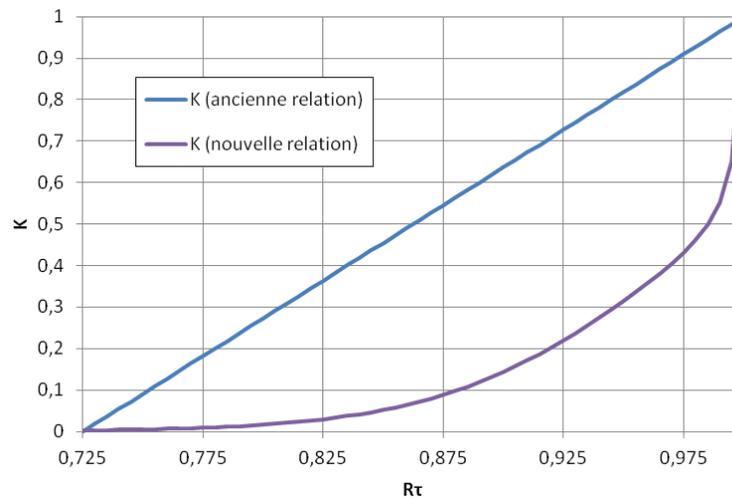
Nous avons proposé dans un premier temps une relation entre  $R_\tau$  et  $\kappa$  en gardant la même forme que la relation proposée pour l'évolution de la contrainte résiduelle en fonction du confinement que nous avons pu rencontrer dans le modèle de Samani et Attard (2012) :

$$\kappa = \frac{1}{400b^{(5.8b^{0.7}+1.3)} + 1} \quad (3.27)$$

$$\text{Avec } b = 3.636(1 - R_\tau) \quad (3.28)$$

À noter ici que nous avons procédé à un changement de variable à l'aide de  $b$  dans l'équation afin de respecter la plage de valeur de  $\kappa$  à savoir  $[0, 1]$  pour  $R_\tau$  allant de 0.725 à 1.

Si on représente cette nouvelle relation entre  $\kappa$  et  $R_\tau$  et l'ancienne sur le même graphique (Figure 3.15), on comprend que l'effet du confinement augmentera très vite pour des contraintes de confinement faibles. Nous tenons à faire remarquer que la courbe que nous avons proposée respectait la tendance mais n'était pas calibrée sur des essais de la littérature.



**Figure 3.15 - Comparaison entre la nouvelle et l'ancienne relation entre  $\kappa$  et  $R_\tau$**

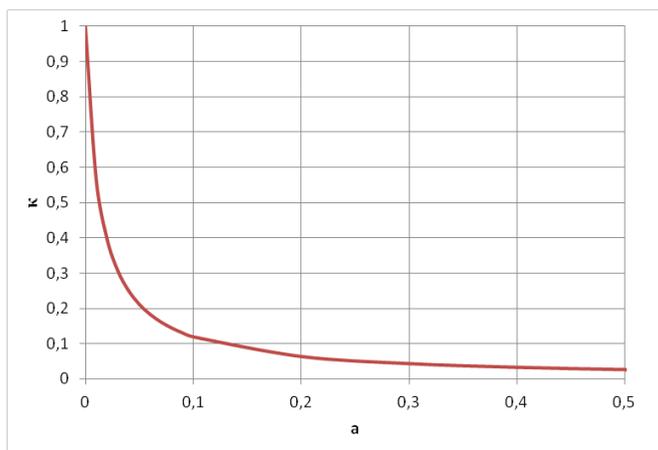
Après avoir passé beaucoup de temps à essayer de modifier les coefficients de la relation de façon à obtenir un comportement adéquat, nous avons dû abandonner l'idée d'exprimer  $\kappa$  en fonction de  $R_\tau$ . En effet le fait que la pente  $E_d$  de la courbe fasse déjà intervenir la contrainte au pic  $\sigma_c$ , aussi présente dans  $R_\tau$ , cela conduisait à une redondance qui était difficile à gérer. Nous avons donc décidé de proposer une relation en fonction de  $\frac{\sigma_{min}}{f'_c}$ .

### 3.4.5.2 Proposition retenue

Finalement, nous proposons donc l'équation suivante que nous représentons sur la Figure 3.16:

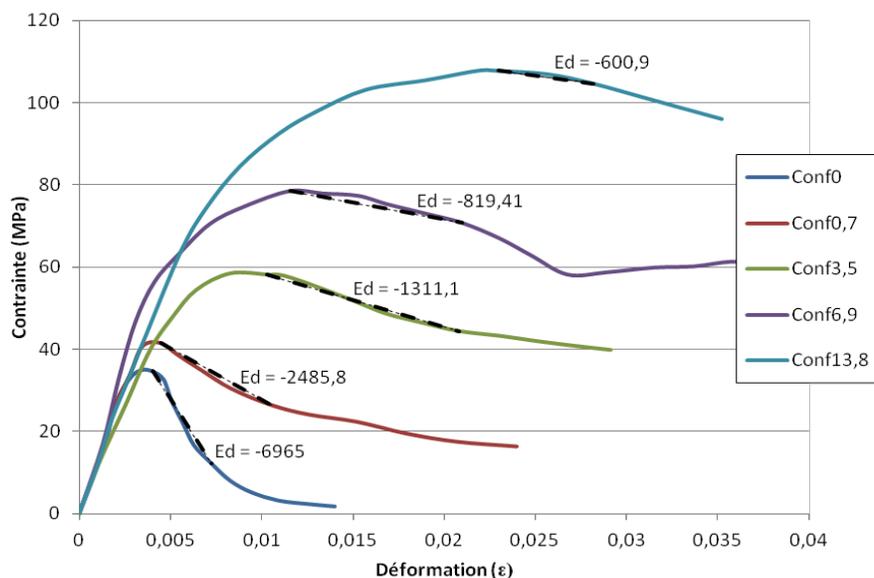
$$\kappa = \frac{1}{80a^{(0.1a^{0.5}+1)} + 1} \quad (3.29)$$

Avec  $a = \frac{\sigma_{min}}{f'_c}$

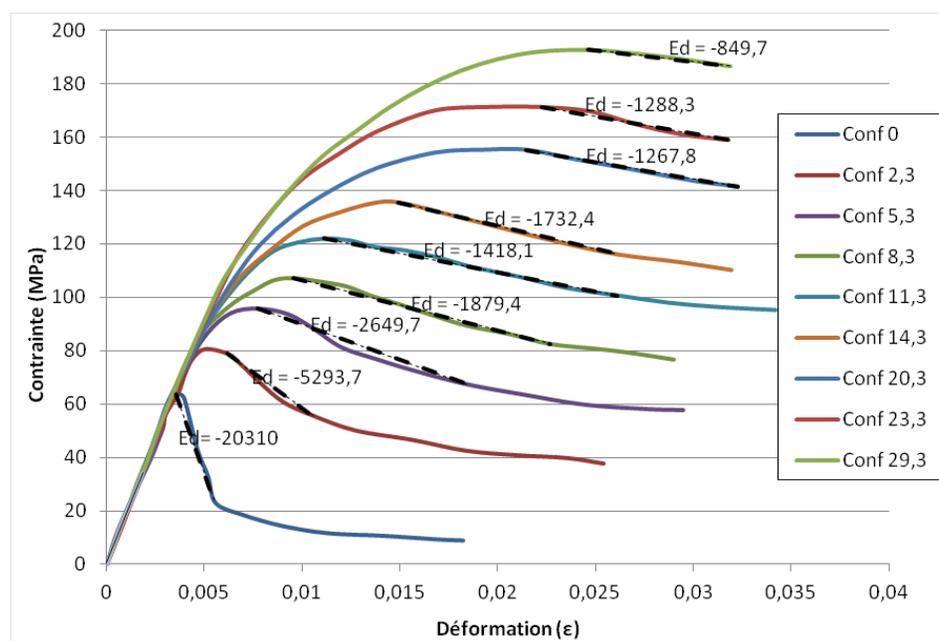


**Figure 3.16 - Représentation de  $\kappa$  en fonction de  $a$**

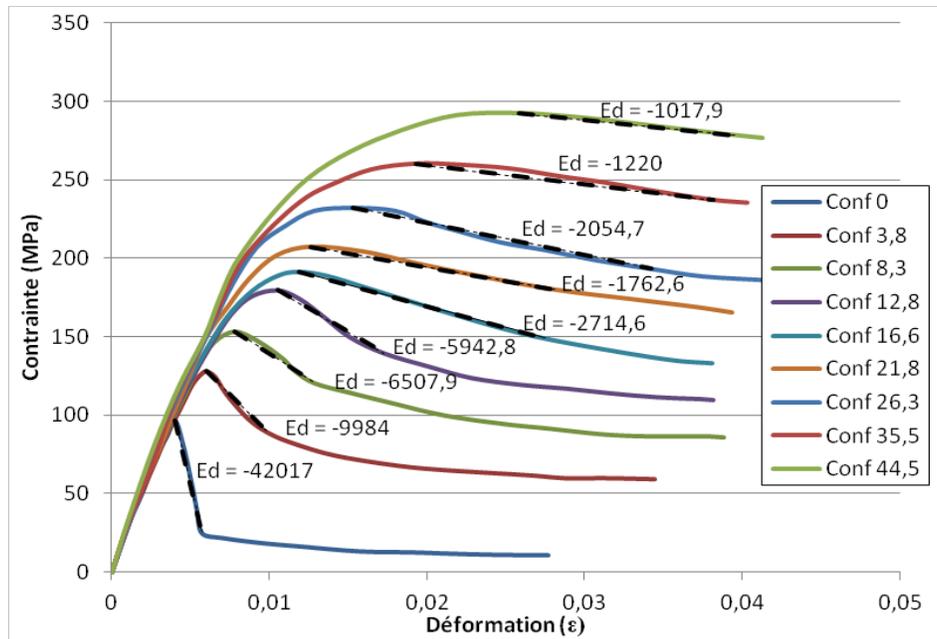
Les coefficients de l'équation sont calibrés sur trois essais connus de la littérature. Sur la Figure 3.17, Figure 3.18 et Figure 3.19 les courbes  $\sigma$ - $\varepsilon$  issues des essais de Smith et al. (1989) et Xie et al. (1995) sur des bétons de 34.5 MPa, 63 MPa et 92 MPa sont représentées avec plusieurs valeurs de confinement. On a évalué la pente d'adoucissement pour chaque courbe.



**Figure 3.17 - Courbes contrainte-déformation issues de l'article de Smith et al. (1989) pour un béton de 34.5 MPa avec plusieurs valeurs de confinement**

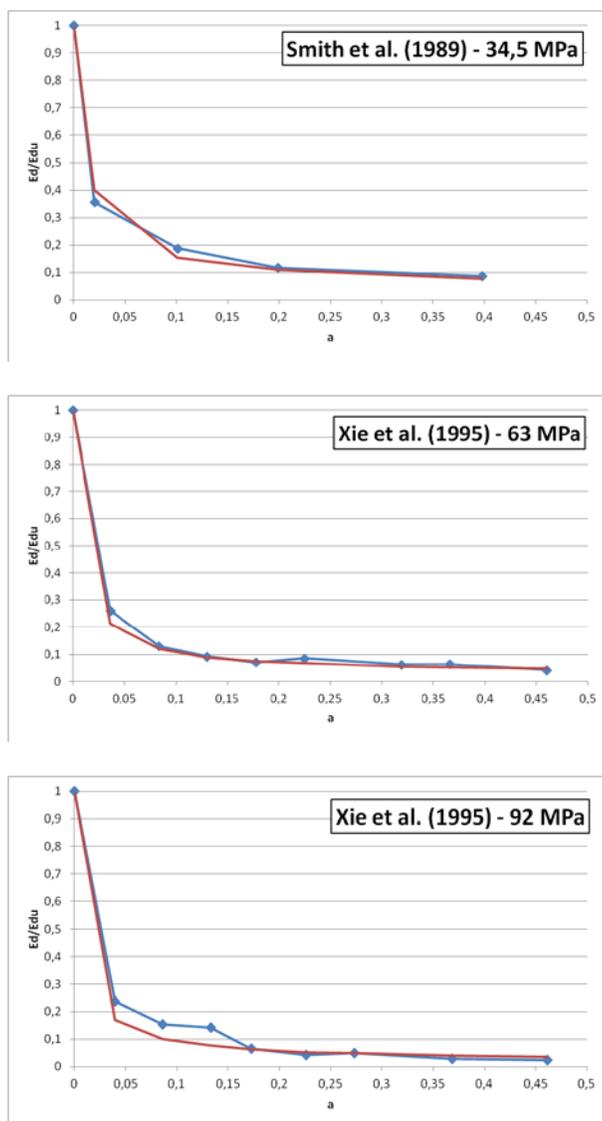


**Figure 3.18 - Courbes contrainte-déformation issues de l'article de Xie et al. (1995) pour un béton de 63 MPa avec plusieurs valeurs de confinement**



**Figure 3.19 - Courbes contrainte-déformation issues de l'article de Xie et al. (1995) pour un béton de 92 MPa avec plusieurs valeurs de confinement**

Sur la figure Figure 3.20, on représente le rapport  $\frac{E_d}{E_{du}}$  en fonction du ratio de confinement  $a = \frac{\sigma_{min}}{f'_c}$  pour chacun des trois bétons. La courbe bleue est la courbe expérimentale et la courbe rouge est celle calculée avec la formule d' $E_d$  d'*EPM3D* dépendant de  $\kappa$  nouvelle version.  $E_{du}$  est la pente post-pic dans le cas de la compression uniaxiale ( $\kappa = 1$ ). On a fixé une valeur de  $\delta$  pour chaque béton pour obtenir la valeur exacte d' $E_{du}$ .



**Figure 3.20 - Évolution d' $E_d/E_{du}$  en fonction du ratio de confinement  $a$  pour les trois bétons considérés (en bleu la courbe expérimentale, en rouge la courbe calculée avec EPM3D et la nouvelle version de  $\kappa$ )**

Pour toutes les courbes présentées le ratio d'élancement  $h/d$  des spécimens était égal à 2. Pour le béton de Smith et al. (1989) de 34.5 MPa les essais ont été effectués sur des spécimens de hauteur de 108 mm. Pour les bétons de 63 MPa et 92 MPa de Xie et al. (1995), la hauteur était de 110 mm. Les valeurs de  $\delta$  entrées afin d'obtenir la bonne pente  $E_{du}$  sont respectivement 0.726 mm, 0.660 mm et 0.623 mm pour les bétons de 34.5 MPa, 63 MPa et 92 MPa. On peut voir que l'on se trouve dans le même ordre de grandeur que la valeur par défaut proposée par Bouzaiene qui est de 0.714 mm pour un béton de 45 MPa.

On obtient une très bonne superposition des courbes expérimentales sauf peut-être pour le béton de 92 MPa dans l'intervalle  $a = 0.05$  à  $0.15$  où l'on surestime un peu l'effet du confinement. Cependant nous verrons au chapitre 4 avec nos validations que cela reste très correct.

### 3.4.6 Conclusion sur les modifications

Nous avons effectué des modifications pour prendre en compte l'effet du confinement dans le but de rendre le modèle capable de modéliser des poteaux en béton armé où le ratio de confinement se situe souvent entre 0 et 0.5 tout dépendant de l'espacement et l'aire des étriers utilisés. L'accent a été mis sur la calibration de la pente post-pic et de la contrainte résiduelle dans le cas d'essais en compression triaxiale avec des données expérimentales d'articles renommés.

L'équation de la pente post-pic fait maintenant intervenir le module de déchargement et la contrainte au pic pour assurer la conservation de l'énergie. L'influence de la longueur des spécimens sera donc bien prise en compte.

Les effets des techniques de chargement, c'est-à-dire du coefficient de frottement entre les plaques de chargement et les spécimens lors d'un essai de compression uniaxiale n'ont pas été considérés pour deux raisons. Premièrement, nous pensons que cela peut être directement pris en compte avec l'effet du confinement dans les zones de confinement triaxiales aux extrémités. Deuxièmement l'effet du coefficient de frottement s'estompe très vite quand on procède à des essais de compression triaxiale. Donc dans le cas de la modélisation de colonne en béton armé nous pouvons le négliger.

L'effet de  $f_c'$  sur la pente est pris en compte directement par la définition de  $\delta$  pour un mélange donné. Ce paramètre doit être déterminé par l'utilisateur.

Enfin l'influence de la géométrie de la section des spécimens n'a même pas été abordée car nous manquons beaucoup trop de données sur lesquelles nous baser.

Au chapitre suivant, nous procédons à un ensemble de validation des modifications apportées. Ce sont des analyses volontairement très simples de façon à vérifier que le modèle fournit un comportement global fidèle à la réalité.

## CHAPITRE 4 VALIDATION DU MODÈLE AVEC ABAQUS/EXPLICIT

Le modèle *EPM3D* a été développé pour être implanté dans un logiciel de calcul par éléments finis. Grâce aux progrès de l'informatique et à sa simplicité de programmation, la méthode des éléments finis a connu un essor considérable depuis sa création et surtout dans les 20 dernières années. Cette méthode consiste à discrétiser un volume de façon à résoudre de manière approchée un problème aux valeurs limites. Beaucoup de logiciels utilisant cette méthode ont vu le jour et notre choix s'est porté sur le logiciel *ABAQUS* et son module de résolution *ABAQUS/Explicit*. La première partie de ce chapitre explique les différents aspects théoriques abordés liés notamment à la méthode des éléments finis. Nous expliquons notamment le principe de la résolution explicite ainsi que l'intégration de Gauss réduite que nous utilisons. Cette partie a été rédigée en consultant les livres de Paultre (2005), Ibrahimbegovic (2006) et Craveur et Jetteur (2010) ainsi que le manuel d'utilisateur d'*ABAQUS* version 6.11 (Hibbitt et al., 2011). La deuxième partie consiste en une série de validations du modèle notamment pour vérifier la prise en compte de la localisation des déformations, du confinement actif et du confinement passif en présence d'étriers. À chaque fois une étude de la sensibilité vis-à-vis du maillage est effectuée. La dernière partie est un ensemble de conseils à suivre pour la modélisation du comportement post-pic de colonnes en béton armé avec *ABAQUS/Explicit* et *EPM3D* en tenant compte de tous les paramètres qui peuvent entrer en compte.

Nous tenons aussi à préciser que ce chapitre reprend très largement les considérations faites par Ben Ftima (2013).

### 4.1 Introduction et définitions

#### 4.1.1 Introduction à Abaqus

Ben Ftima (2005) a effectué une analyse comparative des trois logiciels de calculs par éléments finis les plus connus (*ADINA*, *ANSYS* et *ABAQUS*). Cette étude portait sur plusieurs points comme la rapidité et la facilité du prétraitement (phase d'élaboration du modèle), la possibilité de diffuser les éléments de barres d'armatures dans les éléments solides de béton et la présence d'une

méthode d'intégration explicite. Le logiciel de calcul par éléments finis *ABAQUS* a remporté la mise. Par la suite, *ABAQUS* a été racheté par Dassault Systèmes, le producteur du logiciel de dessin assisté par ordinateur *CATIA*. L'interface graphique d'*ABAQUS* a donc été améliorée et elle est maintenant très pratique pour le prétraitement. *ABAQUS* est un logiciel très complet permettant de faire des analyses linéaires ou non linéaires, statiques ou dynamiques. Le module *ABAQUS/CAE* est une interface dans laquelle l'utilisateur peut définir toutes les propriétés de son analyse (géométrie des différentes pièces, propriétés mécaniques, choix des éléments, choix de l'intégration de la matrice de rigidité, choix du mode de résolution). Pour la résolution des analyses, il existe deux modules *ABAQUS/Standard* et *ABAQUS/Explicit*. Le premier est un module utilisant des schémas de résolution implicite dits classiques pour des analyses statiques comme la méthode Newton-Raphson ou la méthode de Risks (méthode de longueur d'arc). Il peut aussi résoudre implicitement des problèmes dynamiques notamment avec la méthode de Newmark- $\beta$ . Le second utilise une méthode de résolution explicite pour l'intégration temporelle des problèmes dynamiques. Cette méthode est encore assez nouvelle dans le domaine du génie civil. Elle permet notamment une meilleure prise en compte des problèmes à forte non-linéarité matérielle et est donc particulièrement adaptée pour les matériaux adoucissants.

#### **4.1.2 Introduction à la modélisation par éléments finis pour les problèmes non-linéaires**

Pour toute modélisation par éléments finis d'une structure, il faut effectuer des choix en fonction des spécificités du problème, des différents paramètres à prendre en compte et du degré de précision que l'on exige. Pour l'analyse non linéaire des structures, étant donné que les propriétés de rigidité (et/ou d'amortissement) peuvent changer au cours de l'analyse en fonction du temps, du chemin de chargement ou du changement de géométrie de la structure, la résolution directe n'est plus possible et l'on doit procéder à une discrétisation de l'équation du problème afin de le résoudre pas à pas. L'équation prend alors une forme **incrémentale**. Le type d'incrément ou pas de calcul dépend du type d'analyse et du choix de l'intégration numérique. Cela peut-être un incrément de déplacement, de charge ou encore de temps. Il faut aussi faire le choix d'imposer une force ou un déplacement sur chaque degré de liberté (noté DDL dans la suite) du modèle.

Une fois le choix de l'intégration numérique effectué, il faut procéder à la discrétisation géométrique du problème, c'est-à-dire mailler la structure. Pour cela il faut choisir un type d'élément et une taille moyenne pour le maillage. Il faut aussi choisir comment la matrice de rigidité de l'élément sera intégrée. L'intégration de Gauss, exacte ou réduite, est la méthode la plus utilisée dans les logiciels.

### 4.1.3 Définitions importantes

- Une analyse est dite **statique** si l'équation à résoudre ne fait pas intervenir les forces d'inertie et d'amortissement visqueux. L'équation à résoudre pour un problème par éléments finis statique est de la forme (équation usuelle de la méthode des éléments finis) :

$$\{F_{ext}\} = \{F_{int}\} \quad \text{où} \quad \{F_{int}\} = [K]\{u\} \quad (4.1)$$

où  $\{F_{ext}\}$  est le vecteur des forces externes,  $\{F_{int}\}$  est le vecteur des forces internes,  $[K]$  est la matrice de rigidité et  $\{u\}$  le vecteur des déplacements. Ici c'est un ensemble d'équations algébriques que l'on cherche à résoudre.

Une analyse est dite **dynamique** si l'équation à résoudre fait intervenir la variable temps. Les forces d'inertie et d'amortissement visqueux doivent être prises en compte. L'équation à résoudre pour une analyse par éléments finis dynamique est de la forme (équation du mouvement de Newton) :

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{F_{ext}(t)\} \quad (4.2)$$

où  $[M]$  est la matrice de masse,  $[C]$  la matrice d'amortissement,  $\{\ddot{u}\}$  le vecteur des accélérations, et  $\{\dot{u}\}$  le vecteur des vitesses. Ici c'est un ensemble d'équations différentielles en temps que l'on cherche à résoudre.

Une analyse est dite dynamique **quasi-statique** lorsque l'application des charges externes est assez lente pour que les termes de forces d'inertie et d'amortissement soient quasi-nuls ( $[M]\{\ddot{u}\} \approx [C]\{\dot{u}\} \approx 0$ ), on a donc :

$$\{F_{ext}\} \approx [K]\{u\} \quad (4.3)$$

On met en place des critères sur le taux d'application de la charge ou du déplacement pour que l'analyse soit toujours considérée comme quasi-statique. On peut donc résoudre des problèmes statiques avec les outils d'analyse dynamique si l'on respecte ces critères.

- Une analyse statique est dite **linéaire** si la matrice de raideur  $[K]$  est à coefficients constants, c'est-à-dire si elle est indépendante du chargement. Dans le cas inverse, on dit que l'analyse est **non linéaire**. Les non-linéarités sont soit matérielles (matériau élastique-non linéaire, élasto-plastique, hyperélastique, etc.) soit géométriques (effet  $P-\Delta$ , grandes déformations, flambement, etc.).

Une analyse dynamique est dite **linéaire** si les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité sont à coefficients constants, c'est-à-dire si elles ne dépendent ni de la charge ni du temps.

- Une méthode d'intégration numérique, pour un problème statique ou dynamique, est dite **explicite** lorsque l'on calcule les inconnues du pas  $n+1$  uniquement à partir des valeurs connues de l'état précédent  $n$  (ou de quelques états précédents  $n, n-1, n-2$ , etc.).

Une méthode d'intégration numérique, pour un problème statique ou dynamique, est dite **implicite** si l'on vient calculer les inconnues du pas  $n+1$  à partir d'une combinaison des valeurs de l'état précédent  $n$  et d'une estimation sur les valeurs au pas  $n+1$ . Une résolution implicite nécessite donc une boucle d'itérations et un critère de convergence (habituellement on applique une certaine tolérance sur le résidu).

- Une méthode d'intégration numérique est dite **conditionnellement** (respectivement **inconditionnellement**) **stable** s'il existe une restriction (respectivement n'existe pas de restriction) sur le pas de calcul afin de rendre l'analyse stable.

Avec ces définitions, nous pouvons maintenant décrire nos analyses comme des analyses quasi-statiques non linéaires avec intégration temporelle explicite conditionnellement stable. Nous allons dans un premier temps expliquer le choix et le fonctionnement de la méthode d'intégration

numérique que nous utilisons. Puis dans un second temps, nous expliquerons le choix du type d'élément pour le béton et l'acier.

## 4.2 Choix de la méthode d'intégration numérique

### 4.2.1 Nécessité et condition d'une analyse quasi-statique avec résolution explicite

Le module *ABAQUS/Standard* propose une multitude de méthodes d'intégration numérique implicite dite classiques. Pour les problèmes statiques, la méthode de Newton-Raphson (classique, modifiée, BFGS) ou la méthode de longueur d'arc sont disponibles. Pour les problèmes dynamiques, nous pouvons utiliser les méthodes de Newmark- $\beta$ , Wilson- $\theta$  ou encore HHT- $\alpha$ . Ces différentes méthodes implicites, que ce soit en analyse statique ou dynamique, éprouvent beaucoup de difficultés à converger en cas de forte non-linéarité, matérielle comme géométrique. Le temps de calcul augmente de façon exponentielle et peut devenir infini si la convergence est impossible. Dans le cas d'un matériau adoucissant comme le béton, la non-linéarité matérielle est bien évidemment très forte. L'un des problèmes que l'on rencontre alors avec une résolution implicite est la difficulté à redistribuer l'instabilité créée par la localisation des déformations.

Ainsi la meilleure manière d'appréhender le comportement adoucissant du béton est d'utiliser une intégration explicite. Or l'intégration explicite dans *ABAQUS* n'est possible que pour les problèmes dynamiques. Il faut alors considérer le problème comme quasi-statique, c'est-à-dire utiliser les équations de l'analyse dynamique avec une application « très lente » du chargement. On définit un chargement « lent » quand la durée de l'application de la charge est lente par rapport à la période fondamentale  $T_0$  du système. Ainsi *ABAQUS* propose d'appliquer une durée égale à 10 fois  $T_0$ . Afin de s'assurer que notre analyse est bien quasi-statique, le ratio des énergies cinétique et interne du système global,  $E_c/E_i$ , doit toujours être inférieur à 5% (critère fixé par le manuel d'*ABAQUS*). En cas de non-respect de ce critère, on peut allonger la durée à 20 ou 30 fois  $T_0$ .

Plusieurs études comparatives, comme celles de Rebelo et al. (1992), Prior (1994) ou encore Ben Ftima (2013), ont montré qu'une méthode de résolution explicite était bien plus efficace en terme de vitesse de calcul et pour une précision équivalente qu'une résolution implicite pour les

problèmes dynamiques non linéaires. Par contre la méthode que nous utilisons est conditionnellement stable, c'est-à-dire qu'il va falloir s'assurer de respecter le critère de stabilité.

#### 4.2.2 Méthode d'intégration temporelle explicite des différences centrées

L'une des méthodes de résolution explicite les plus répandues dans les logiciels d'éléments finis est la méthode des différences centrées. C'est cette méthode qui est utilisée dans *ABAQUS/Explicit*. Ici nous allons présenter le principe de cette méthode avec l'hypothèse que la matrice de masse est diagonale (matrice de masse concentrée) et que l'amortissement visqueux est négligeable. Ces conditions représentent le cas idéal d'application de la méthode et sont particulièrement adaptées à une analyse quasi-statique où les forces d'inertie et d'amortissement sont quasi-nulles. *ABAQUS/Explicit* travaille toujours avec des matrices de masse diagonales cependant l'amortissement peut-être non nul. Pour une présentation plus générale de la méthode, nous renvoyons le lecteur au paragraphe 6.2 de l'ouvrage de Belytschko et al. (2000) ou encore au chapitre 23 du livre de Paultre (2005).

La méthode des différences centrées s'appelle ainsi, car on vient approcher le vecteur des vitesses et des accélérations nodales par une différence de déplacements centrée sur le pas de calcul  $n$ . Le vecteur des vitesses nodales peut s'écrire :

$$\{\dot{u}_n\} = \frac{\{u_{n+1/2}\} - \{u_{n-1/2}\}}{\Delta t} \quad (4.4)$$

De même le vecteur des accélérations nodales peut s'écrire :

$$\{\ddot{u}_n\} = \frac{\{\dot{u}_{n+1/2}\} - \{\dot{u}_{n-1/2}\}}{\Delta t} \quad (4.5)$$

En décalant l'indice de l'équation du vecteur des vitesses de  $+1/2$  et de  $-1/2$  et en reportant dans l'équation du vecteur d'accélérations nodales, on obtient :

$$\{\ddot{u}_n\} = \frac{\{u_{n+1}\} - 2\{u_n\} + \{u_{n-1}\}}{\Delta t^2} \quad (4.6)$$

L'équation du mouvement que nous considérons est :

$$[M_d]\{\ddot{u}_n\} + [K_n]\{u_n\} = \{F_{ext_n}\} \quad (4.7)$$

En reportant la nouvelle équation du vecteur des accélérations, on obtient une relation directe pour calculer le vecteur des déplacements au pas  $n+1$  uniquement en fonction de valeurs déjà connues au pas  $n$  et  $n-1$  :

$$\{u_{n+1}\} = \Delta t^2 [M_d]^{-1} \left( \{F_{ext_n}\} - [K_n]\{u_n\} - \frac{1}{\Delta t^2} [M_d] (\{u_{n-1}\} - 2\{u_n\}) \right) \quad (4.8)$$

$$\{u_{n+1}\} = \Delta t^2 [M_d]^{-1} \{\tilde{F}_n\} \quad (4.9)$$

La présence du paramètre  $\{u_{n-1}\}$  nécessite une procédure d'initiation du calcul avec le calcul de  $\{u_{-1}\}$ . En général, on connaît  $\{u_0\}$ ,  $\{\dot{u}_0\}$ ,  $\{F_{ext_0}\}$  et  $[K_0]$ .

$$\{u_{-1}\} = \{u_0\} - \Delta t \{\dot{u}_0\} + \frac{\Delta t^2}{2} \{\ddot{u}_0\} \quad (4.10)$$

$$\text{Avec } \{\ddot{u}_0\} = [M_d]^{-1} (\{F_{ext_0}\} - [K_0]\{u_0\}) \quad (4.11)$$

Les calculs à effectuer sont alors très simples, en particulier parce que la seule matrice à inverser est la matrice de masse qui est diagonale. De plus cette procédure ne nécessite aucune itération et ne connaîtra aucun problème de convergence. Malgré un pas de temps très petit (de l'ordre de  $10^{-5}$  secondes pour nos analyses), le gain en temps de calcul par rapport à une résolution classique implicite avec *ABAQUS/Standard* est considérable (Ben Ftima, 2013). Par contre, comme nous le verrons au paragraphe suivant, on doit mettre en place un critère sur le pas de temps à utiliser pour la stabilité.

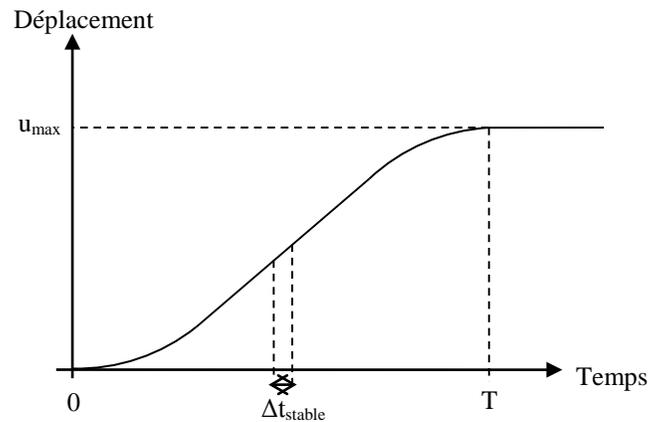
La détermination du vecteur des forces nodales équivalentes  $\{\tilde{F}_n\}$  passe par l'intégration de la matrice  $[K_n]$ . Ceci est fonction du type d'élément choisi et du modèle constitutif (*EPM3D* dans notre cas). La matrice de rigidité est mise à jour,  $[K_n]$  devient  $[K_{n+1}]$ , à la fin de chaque pas de calcul à l'aide du vecteur  $\{u_{n+1}\}$ .

Enfin afin de pouvoir appréhender le comportement post-pic adoucissant, il est évident que nous devons piloter nos analyses en déplacement. Cela veut dire que pour certains DDL le déplacement est imposé et que pour les autres c'est la force qui est imposée (souvent à zéro sauf dans nos analyses de confinement actif). Ainsi pour les DDL où le déplacement est imposé, c'est

la composante du vecteur des forces externes  $\{F_{ext_n}\}$  correspondante qui devient l'inconnue. Pour ces DDL, l'inversion de la matrice diagonale n'est donc pas nécessaire :

$$\{F_{ext_n}\} = \frac{1}{\Delta t^2} [M_d] (\{u_{n+1}\} + 2\{u_n\} - \{u_{n-1}\}) + [K_n] \{u_n\} \quad (4.12)$$

Cela revient à transformer le déplacement imposé en une force d'inertie en faisant une approximation sur le vecteur des accélérations par la méthode des différences centrées. Pour de meilleurs résultats en analyse quasi-statique avec cette méthode, on conseille d'utiliser une amplitude lisse (*smooth step* dans *ABAQUS*) pour le chargement, surtout lorsque l'on impose le déplacement (Figure 4.1). De cette façon, il n'y a pas de discontinuité dans le taux de chargement et on limite la création d'ondes parasites (Ben Ftima, 2013).



**Figure 4.1 - Amplitude lisse pour le déplacement imposé**

### 4.2.3 Critère de stabilité

La méthode des différences centrées est conditionnellement stable. Elle exige que le pas de temps soit inférieur à un pas de temps critique fonction du système étudié :

$$\Delta t \leq \Delta t_{crit} = \frac{T_{min}}{\pi} = \frac{2}{\omega_{max}} \text{ avec } T_{min} = \min_n T_n \quad (4.13)$$

où  $T_{min}$  est la plus petite période de vibration du système à  $n$  DDL,  $\omega_{max}$  est la pulsation maximale correspondante.

Lorsque le système comporte un grand nombre de DDL, il est fastidieux de déterminer la plus petite période de vibration du système, *ABAQUS* procède alors à une estimation conservatrice de  $\Delta t$  en prenant :

$$\Delta t = \frac{h}{c} \quad (4.14)$$

où  $h$  est comme au chapitre 3 la longueur caractéristique de l'élément et  $c$  la vitesse de propagation d'onde au sein de l'élément (par exemple  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  pour un matériau élastique avec un coefficient de Poisson nul). *ABAQUS* calcule ce  $\Delta t$  pour tous les éléments du maillage et prend le minimum. On peut choisir que  $\Delta t$  soit calculé au début et reste fixe durant toute l'analyse ou qu'il soit calculé à chaque pas de temps. On peut aussi entrer un facteur de réduction de  $\Delta t$  afin de gagner en précision.

Pour des analyses plus performantes en termes de vitesse de calcul, on peut augmenter artificiellement  $\Delta t$  en procédant à un « *mass scaling* ». On vient « alourdir » les éléments de plus petites tailles de notre maillage afin que le  $\Delta t$  minimum corresponde à un élément plus grand. Cependant nous n'utiliserons pas ce procédé et veillerons à ce que tous les éléments du maillage aient sensiblement la même taille. Comme nous l'avons déjà mentionné nous conseillons que la géométrie des éléments reste proche de celle du cube.

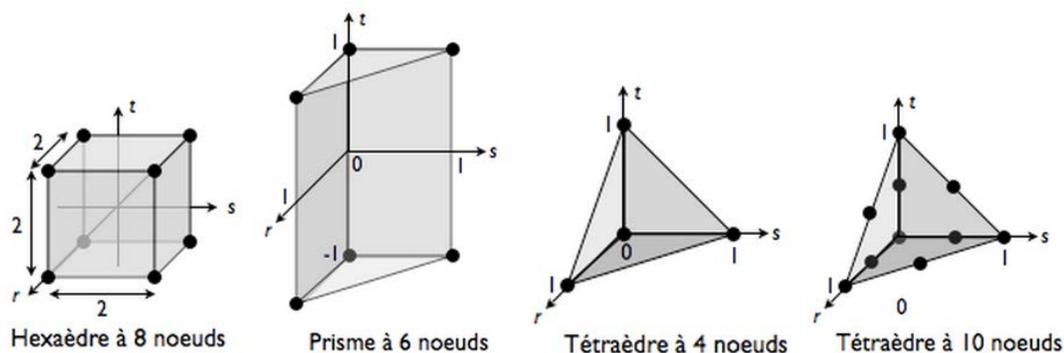
## 4.3 Choix du type d'élément

### 4.3.1 Type d'élément pour le béton

#### 4.3.1.1 Éléments disponibles en trois dimensions dans *ABAQUS/Explicit*

Le modèle *EPM3D* comme son nom l'indique est un modèle de béton à trois dimensions. Il s'utilise donc seulement avec des éléments solides. Malheureusement *ABAQUS/Explicit* dispose de peu d'éléments 3D. Il existe un élément hexaédrique, un élément prisme triangulaire et deux

éléments tétraédriques (premier et second ordre) (Figure 4.2). Le choix s'est très vite porté sur l'élément hexaédrique du premier ordre (fonctions de forme linéaires) à 8 nœuds, noté C3D8 dans *ABAQUS*, car il est très performant pour les problèmes à géométrie simple et parce qu'il offre la possibilité d'une intégration réduite (on le note alors C3D8R) favorable à la modélisation des matériaux adoucissants (Ben Ftima, 2013). En comparaison avec un élément tétraédrique, cet élément est aussi plus adapté à notre modèle orthotrope de béton. Les matrices de transformation pour passer d'un système de coordonnées locales à un système global sont très simples. Il en résulte donc un léger gain de temps de calcul.



**Figure 4.2 - Éléments disponibles dans *ABAQUS/Explicit* (d'après**

[http://www.si.ens-cachan.fr/accueil\\_V2.php?page=affiche\\_ressource&id=184](http://www.si.ens-cachan.fr/accueil_V2.php?page=affiche_ressource&id=184))

#### 4.3.1.2 Intégration de Gauss, exacte ou réduite

Pour accéder à la matrice de rigidité (ou aux forces internes), il faut mettre en place une procédure d'intégration sur le volume de l'élément. Le choix de l'intégration de la matrice de rigidité peut avoir des conséquences sur le temps de calcul et sur la précision. Il existe une multitude de méthodes mises au point par les mathématiciens comme la méthode des trapèzes ou la méthode de Simpson. Mais la méthode la plus efficace, et donc la plus utilisée dans les logiciels par éléments finis, est la méthode de la quadrature de Gauss (ou méthode d'intégration de Gauss). Le principe est assez simple : on vient transformer l'intégration d'une fonction par une somme pondérée des valeurs que prend cette même fonction. Ces valeurs sont calculées en des points stratégiques de l'élément appelés points d'intégration de Gauss.

En règle générale dans les logiciels on utilise des éléments isoparamétriques. Cela consiste à transformer l'intégrale de la matrice de rigidité sur une géométrie quelconque en une intégrale sur une géométrie simple avec des bornes variant entre  $[-1, 1]$  :

$$[K_n] = [A][K_n]^e \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } [K_n]^e &= \int_{V^e} [B]^T [C_n] [B] dV^e \\ &= \iiint_{\min}^{\max} [B(x, y, z)]^T [C_n] [B(x, y, z)] dx dy dz \\ &= \iiint_{-1}^1 [B(r, s, t)]^T [C_n] [B(r, s, t)] |J(r, s, t)| dr ds dt \end{aligned} \quad (4.16)$$

où  $[A]$  représente la matrice d'assemblage,  $[K_n]^e$  est la matrice de rigidité d'un élément,  $V^e$  est le volume de l'élément,  $[B]$  est la matrice qui lie les déformations au vecteur des déplacements nodaux ( $\{\varepsilon_n\} = [B]\{u_n\}$ ) et  $[C_n]$  est la matrice constitutive du matériau ( $\{\sigma_n\} = [C_n]\{\varepsilon_n\}$ ). Dans notre cas  $[C_n]$  est mise à jour à chaque pas de temps, d'où la notation indicielle, et est calculée à partir du modèle *EPM3D*.  $|J(r, s, t)|$  est le jacobien (déterminant de la matrice jacobienne) qui permet d'effectuer le changement de variable entre les coordonnées globales  $(x, y, z)$  et les coordonnées isoparamétriques  $(r, s, t)$  de l'élément :

$$dx dy dz = |J(r, s, t)| dr ds dt \quad (4.17)$$

On peut donc appliquer l'intégration de Gauss. Cela consiste à transformer l'expression sous forme intégrale de la matrice  $[K_n]^e$  en une somme pondérée :

$$\begin{aligned} [K_n]^e &= \iiint_{-1}^1 ([B]^T [C_n] [B] |J|)(r, s, t) dr ds dt \\ &\approx \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{n_s} \sum_{k=1}^{n_t} w_i w_j w_k ([B]^T [C_n] [B] |J|)(r_i, s_j, t_k) \end{aligned} \quad (4.18)$$

où  $w_i, w_j, w_k$  sont les poids associés aux points de coordonnées  $(r_i, s_j, t_k)$ . Il y a respectivement  $n_r, n_s$  et  $n_t$  points de Gauss sur les directions  $r, s$  et  $t$ . Très souvent pour avoir la même précision de

calcul dans les trois axes, on a  $n_r = n_s = n_t$ . Dans un élément hexaédrique, on va avoir 1, 8, 27, etc. points de Gauss.

L'intégration de Gauss est dite **exacte** quand le nombre de points de Gauss sur chaque axe est suffisant pour obtenir la valeur exacte de l'intégrale. Un nombre  $n_G$  de points permet d'intégrer exactement un polynôme de degré  $2n_G - 1$ .

On appelle élément à intégration **réduite** un élément qui dispose d'un nombre de points de Gauss inférieur à celui nécessaire pour une intégration exacte. Avec l'élément hexaédrique à 8 nœuds d'ABAQUS/Explicit, l'intégration réduite est disponible. Il y a un seul point d'intégration ce qui signifie que le calcul de la matrice de rigidité et du vecteur des forces internes est effectué en évaluant la fonction  $[B]^T [C_n] [B] |J|$  en un seul point au centre de l'élément. L'expression de  $[K_n]^e$  est donc excessivement simple :

$$[K_n]^e = 8 ([B]^T [C_n] [B] |J|)(0, 0, 0) \quad (4.19)$$

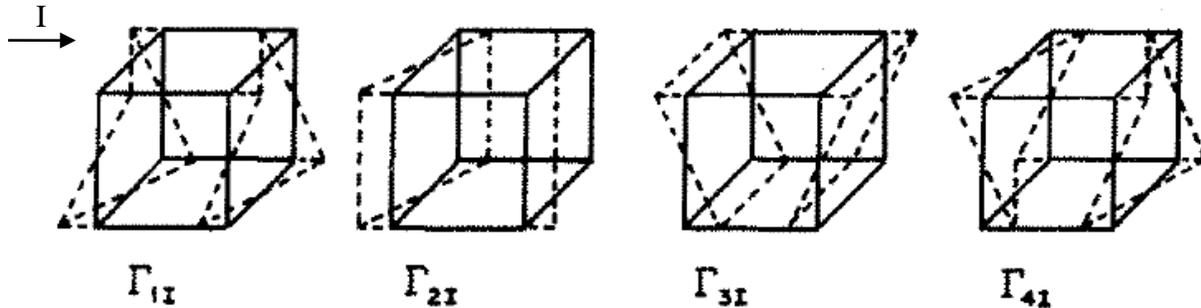
car pour un seul point d'intégration sur chaque axe le calcul se fait au centre de l'élément au point  $(r, s, t) = (0, 0, 0)$  et  $w_i = w_j = w_k = 2$ .

Les avantages que présentent l'intégration réduite sont principalement le gain en terme d'opérations de calcul, donc un temps d'analyse largement réduit, et la flexibilité de la matrice de rigidité, supprimant ainsi les problèmes de verrouillage en cisaillement qui peuvent survenir lors d'une intégration exacte. Toutes les modélisations faites avec *EPM3D* ici à l'École Polytechnique de Montréal sont réalisées avec une intégration réduite. En effet lorsque l'on veut modéliser à l'échelle de la structure, on se retrouve très vite avec des analyses comportant un très grand nombre d'éléments. La rapidité de calcul avec l'intégration réduite est donc plus qu'appréciable, elle est nécessaire.

#### 4.3.1.3 Choix d'un schéma de contrôle des modes de déformation nulle

L'un des inconvénients majeurs de l'intégration réduite, par contre, est l'absence de prise en compte des modes de déformations à énergie nulle. En effet avec un seul point d'intégration et de surcroît situé au centre de l'élément, nous ne sommes pas en mesure de détecter certains modes de déformations illustrés à la Figure 4.3 ci-dessous. Ces modes, appelés aussi modes parasites ou

modes de sablier (*Hourglass modes*), sont au nombre de 12 (4 dans chaque axe principal) pour l'élément C3D8R.



**Figure 4.3 - Modes de déformations nulles pour l'élément C3D8 selon l'axe I (d'après Flanagan et Belytschko, 1981)**

On peut voir que les déplacements aux nœuds imposent une déformation nulle au point d'intégration situé au centre du cube. Ainsi l'élément se déforme mais l'incrément de déformation au point d'intégration est nul donc il n'y a pas de variation de contrainte. Il en découle une déformation excessive de l'élément qui n'est pas du tout pris en compte dans le calcul du champ de contrainte. Cela fausse alors tous les résultats. On pourrait vulgariser en disant que l'utilisation de l'intégration réduite dans ce cas conduit à un surplus de flexibilité du maillage. Il faut donc mettre en place des algorithmes de contrôle pour empêcher la formation de ces modes. Ces schémas de contrôle sont appelés « *Hourglass controls* » dans la littérature.

*ABAQUS* propose plusieurs schémas de contrôle appelés : *Enhanced*, *Relax Stiffness*, *Viscous*, *Stiffness* et *Combined Viscous/Stiffness*. Nous ne présenterons pas le détail de ces procédés très complexes car cela dépasse le cadre de ce mémoire. Nous invitons le lecteur à lire le chapitre 8.7 du livre de Belytschko, Liu et Moran (2000) ou Flanagan et Belytschko (1981) ou encore le manuel *ABAQUS/Analysis* pour de plus amples informations. Selon les travaux des élèves précédents, les procédés *Enhanced* et *Relax Stiffness* sont ceux qui conviennent le mieux pour la modélisation d'un matériau adoucissant. Cependant nous ne pouvons l'expliquer de façon théorique.

Ces procédés ajoutent artificiellement une certaine raideur ou viscosité au système afin d'empêcher la formation des modes « *Hourglass* ». Il faut donc surveiller que l'énergie consommée par le procédé ne soit pas trop grande. Ben Ftima (2013), à l'image du critère sur le ratio d'énergie

cinétique par l'énergie interne, a fixé le ratio d'énergie consommée par le procédé par l'énergie interne, noté  $E_H/E_i$ , à 5%. Nous nous sommes aperçus que ce critère n'était pas assez sévère dans notre cas. Nous l'avons fixé à 1%.

Malgré tout, avec toutes les analyses de validation que nous avons effectuées lors des différentes modifications du modèle *EPM3D*, nous ne sommes pas encore arrivés à la conclusion qu'un schéma est meilleur qu'un autre.

### 4.3.2 Type d'élément pour l'acier et interaction avec les éléments de béton

Les armatures d'acier longitudinales comme transversales sont toutes représentées par des éléments treillis. On ne tient pas compte d'une éventuelle perte de résistance par flambement des armatures longitudinales. De même on ne tient pas compte de l'effet goujon des armatures transversales sur le cœur de béton. *ABAQUS* a aussi été choisi pour sa facilité à modéliser les armatures avec la fonction contrainte « *Embedded region* ». Cette fonction permet de diffuser les éléments d'acier dans le béton, c'est-à-dire qu'il n'est pas nécessaire d'y avoir une coïncidence entre les nœuds des éléments d'acier et de béton. Les DDL aux nœuds des éléments d'acier sont directement liés aux DDL de l'élément de béton par interpolation. Ainsi on peut modéliser les armatures à part et les positionner ensuite au sein du volume de béton. Il est conseillé de donner une longueur caractéristique aux éléments d'acier égale ou inférieure à la longueur caractéristique des éléments de béton de façon à ce que chaque élément de béton traversé par un élément d'acier comporte au moins un nœud de cet élément. En d'autres termes, la discrétisation des armatures doit toujours être plus fine que celle de la masse de béton ( $h_{\text{béton}} > h_{\text{acier}}$ ). Enfin nous tenons à préciser qu'en utilisant cette fonction, nous supposons implicitement une adhérence parfaite entre l'armature et le béton.

## 4.4 Validation du modèle

Toutes les analyses de validation que nous avons effectuées sont réalisées avec le critère de rupture de Hsieh et al. (1982) suite aux remarques faites au chapitre 3.

### 4.4.1 Compression uniaxiale

Dans un premier temps on ne va pas considérer l'effet du confinement, le but étant de montrer qu'avec l'intégration explicite et l'élément C3D8R, on est capable d'avoir une analyse stable et quasi-indépendante de la taille du maillage pour modéliser l'adoucissement. De plus nous rappelons que les effets du frottement aux extrémités (ou conditions de chargement ou encore influence des techniques de chargement) n'est pas pris en compte directement dans le modèle. Nous faisons l'hypothèse que les contraintes latérales dues au frottement ne sont qu'un cas particulier de confinement passif des zones d'extrémités. Par conséquent, nous ne procéderons pas ici à la validation du comportement en fonction des différentes conditions limites. Nous ne faisons donc que la validation de l'effet de la longueur et on vérifie la dépendance vis-à-vis du maillage.

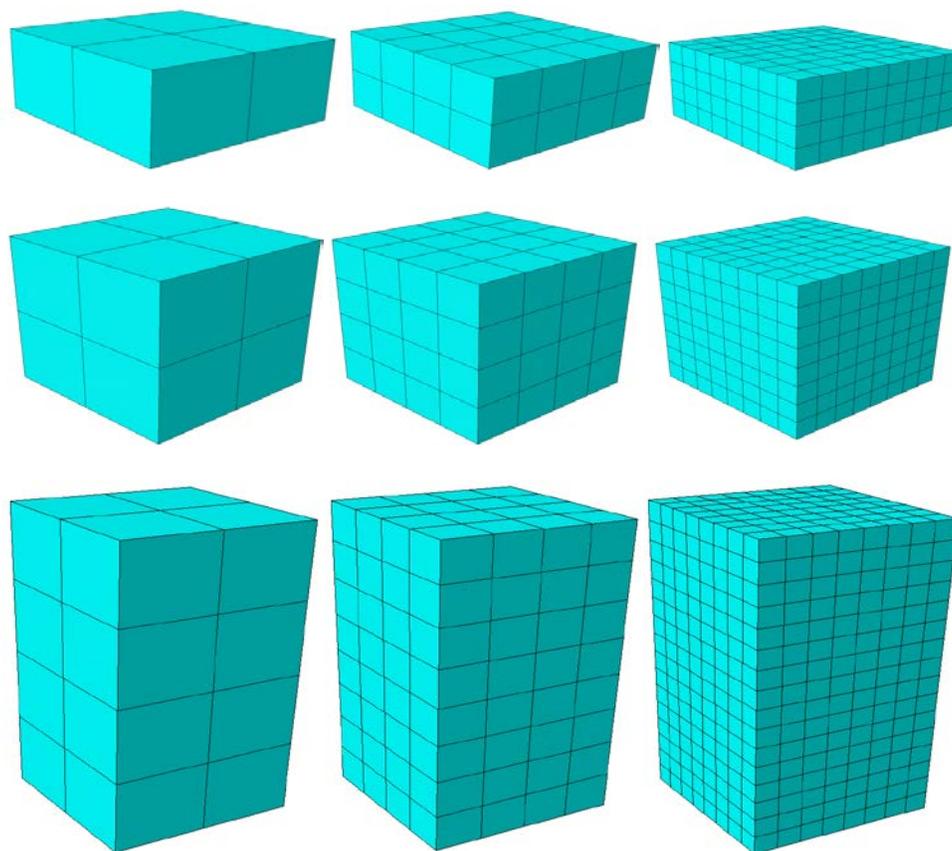
#### 4.4.1.1 Effet de la longueur ou localisation des déformations

Nous procédons à la modélisation des essais de Van Mier (1986). Le béton a une résistance de 45 MPa. La section des spécimens est carrée et mesure 100x100 mm<sup>2</sup>. Il y a 3 ratios d'élanement de 0.5, 1 et 2. Nous ferons varier la taille du maillage avec 3 valeurs différentes pour  $h$  à savoir 50 mm, 25 mm et 12.5 mm ce qui correspond à discrétiser le côté de la section par 2, 4 et 8 éléments. Cela représente donc  $3 \times 3 = 9$  configurations différentes (Figure 4.4).

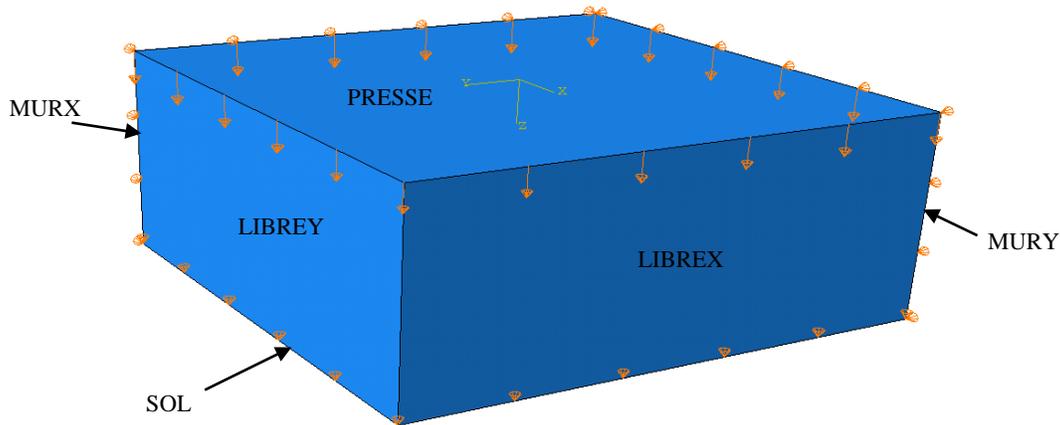
Les conditions limites appliquées (Figure 4.5) constituent un des aspects les plus importants vis-à-vis de la stabilité de nos analyses. En effet au vu des nombreux types d'instabilités qui peuvent survenir lors d'une modélisation 3D en mécanique non linéaire et de surcroît lorsqu'on modélise un matériau adoucissant, il est primordial de rendre l'analyse la plus robuste possible. Pour cela il ne faut pas hésiter à bloquer le plus de mouvements possibles, tant que cela ne vient pas obstruer le comportement que l'on veut observer.

Nous avons donc considéré que nos spécimens étaient placés dans un « coin », c'est-à-dire que nous avons bloqué le déplacement normal sur 3 faces (ex : sur une face de normale  $\vec{x}$  nous avons bloqué seulement le déplacement selon  $\vec{x}$ ). Ces trois faces sont nommées SOL (de normale  $\vec{z}$ ), MURX (de normale  $\vec{x}$ ) et MURY (de normale  $\vec{y}$ ). Nous imposons un déplacement de 1 mm sur la deuxième face de normale  $\vec{z}$  nommée PRESSE. Ce déplacement est imposé avec une amplitude lisse (*smooth step*) et une durée totale de 1 seconde. Nous avons laissé libres les deux

dernières faces, identifiées par LIBREX et LIBREY. Ainsi la déformation longitudinale selon  $\vec{z}$  et les déformations transversales selon  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  dues aux effets de Poisson sont toujours permises.



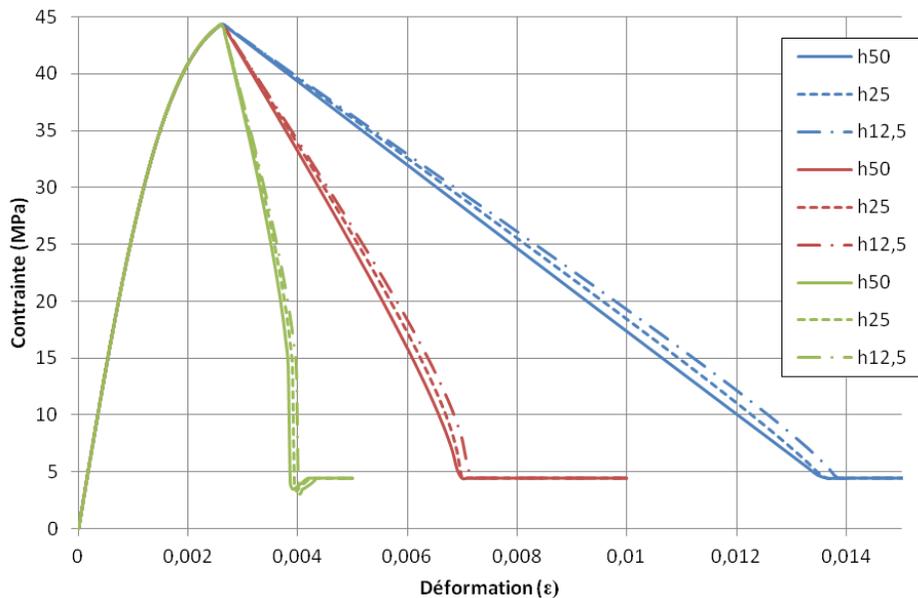
**Figure 4.4 - Configurations pour la validation de l'effet de la longueur et de la sensibilité au maillage**



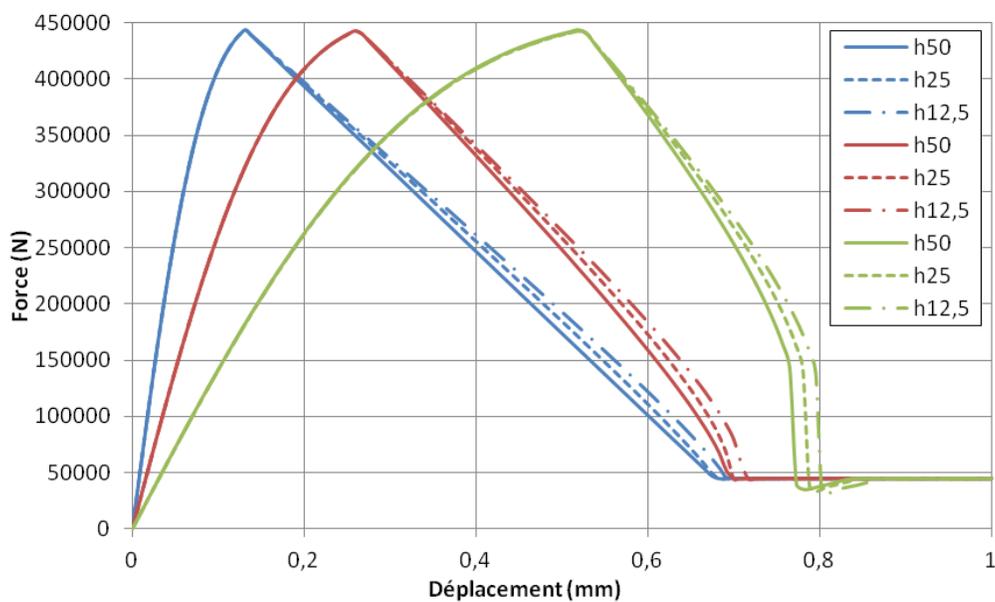
**Figure 4.5 - Conditions limites appliquées et désignation des surfaces du spécimen de ratio d'élanement de 0.5**

Les valeurs de  $\delta$  et de  $\gamma_u$  sont respectivement 0.714 mm (valeur par défaut définie à partir des essais de Van Mier au chapitre 3) et 0.1. Les autres paramètres du matériau sont les suivants : module tangent à l'origine  $E_0 = 29170$  MPa, résistance  $f_c' = 45$  MPa, déformation au pic  $\varepsilon_c = 0.0026$ , coefficient de Poisson à l'origine  $\nu_0 = 0.2$ , et masse volumique  $\rho = 2450$  kg/m<sup>3</sup>. Ici pour les essais de validation, on néglige l'effet du poids propre mais la masse volumique doit tout de même être spécifiée pour établir la matrice de masse.

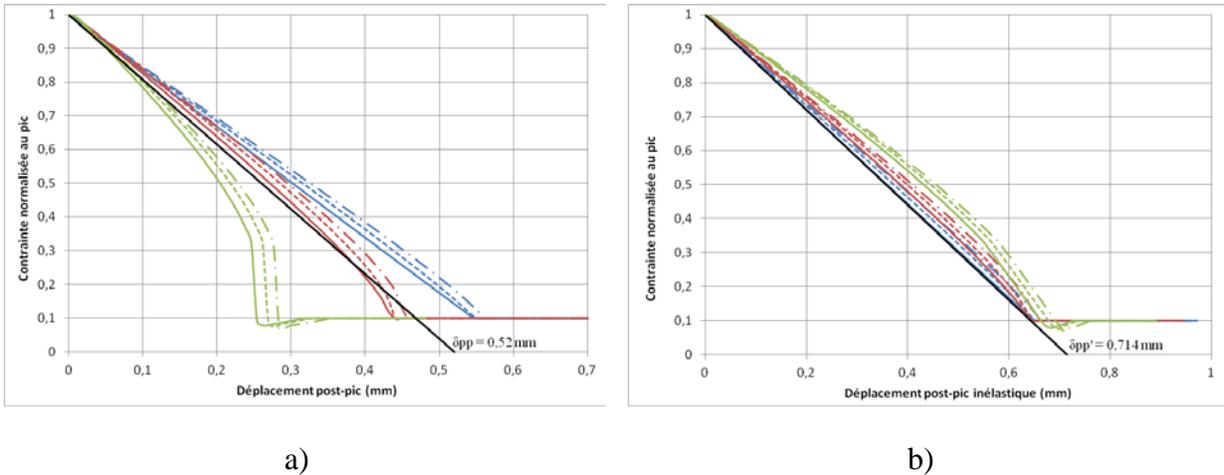
On représente les courbes contrainte-déformation obtenues sur un même graphique (Figure 4.6). La contrainte est obtenue en sommant les forces selon  $\vec{z}$  agissant sur les nœuds de la face SOL et en la divisant par l'aire totale de la section 100x100 mm<sup>2</sup>. La déformation moyenne est calculée en divisant la moyenne des déplacements selon  $\vec{z}$  de tous les nœuds de la face PRESSE par la hauteur totale du spécimen. Ainsi les courbes  $\sigma$ - $\varepsilon$  représentent le comportement global des spécimens. On représente ensuite ces mêmes courbes en termes de force-déplacement sur un second graphique (Figure 4.7). Enfin sur la Figure 4.8, on trace les courbes de la contrainte normalisée au pic ( $\sigma/\sigma_{max}$ ) en fonction du déplacement post-pic avec et sans prise en compte du déchargement élastique.



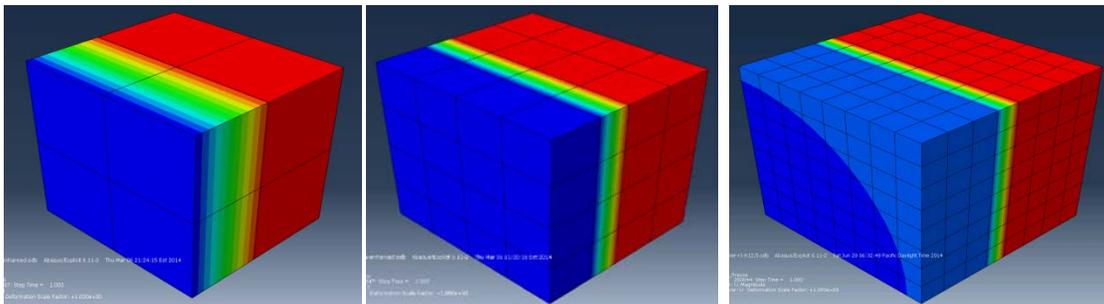
**Figure 4.6 - Courbes contrainte-déformation pour les 9 configurations :  $h/d = 0.5$  (en bleu), 1 (en rouge) et 2 (en vert)**



**Figure 4.7 - Courbes force-déplacement pour les 9 configurations :  $h/d = 0.5$  (en bleu), 1 (en rouge) et 2 (en vert)**



**Figure 4.8 – Courbes contraintes normalisées vs déplacement post-pic : a) sans et b) avec prise en compte du déchargement élastique**



**Figure 4.9 - Localisation des déformations dans une rangée d'éléments pour le spécimen de ratio 1 et pour les trois maillages différents**

On s'aperçoit donc que l'effet de la longueur est plutôt bien représenté. Les courbes tracées en fonction des déformations sont confondues jusqu'au pic puis la pente post-pic devient de plus en plus forte pour les spécimens de ratio d'élancement de plus en plus grand. Si maintenant on regarde les courbes en fonction du déplacement post-pic, elles sont bien plus proches. Et bien sûr lorsque l'on tient compte du déchargement élastique (déchargement linéaire avec un module de déchargement  $E_{déch.} = \frac{2}{3} E_0$ ), elles sont quasiment confondues.

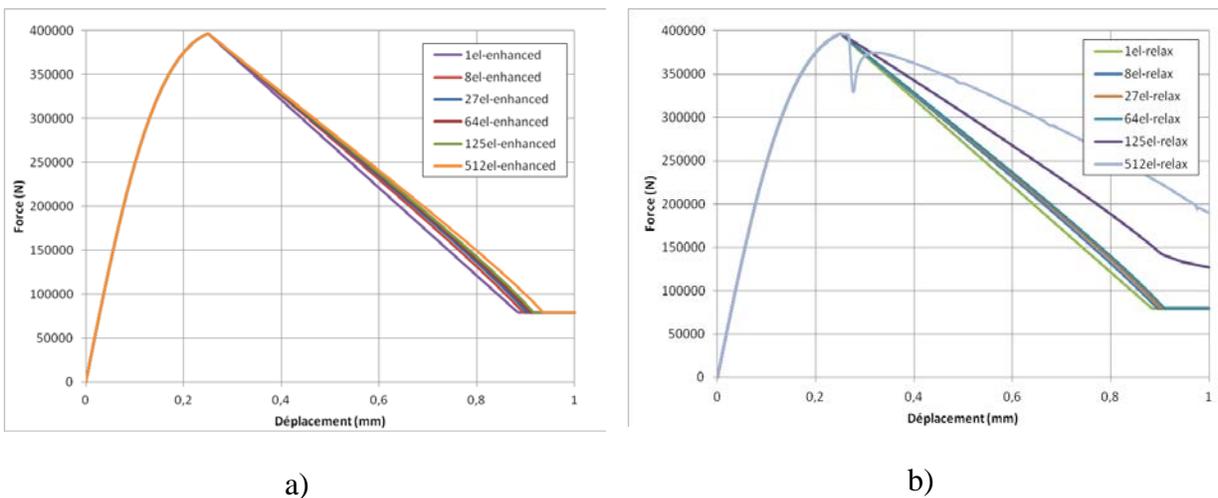
Le fait que les courbes soient « quasiment confondues » et non « parfaitement confondues » explique pourquoi on parle de limiteur de localisation basé sur la conservation de l'énergie de rupture et non de suppressor de localisation. Il reste donc une légère dépendance au maillage. On

remarque d'ailleurs que plus il y a d'éléments « empilés » les uns sur les autres dans la direction de la compression plus les courbes s'écartent de la droite idéale du modèle (Figure 4.8b).

Enfin sur la Figure 4.9, on représente le champ de déplacement selon  $z$  au sein du spécimen. Les parties bleues et rouges sont les parties qui se déchargent élastiquement et où le déplacement est uniformément réparti. Le déplacement est positif dans la partie bleu et négatif dans la partie rouge. La rangée d'éléments où se produit la localisation des déformations est celle en « arc-en-ciel » qui représente la variation rapide du champ de déplacement. Cette variation est d'autant plus brusque que la taille du maillage est petite.

#### 4.4.1.2 Note sur l'effet du schéma de contrôle des modes de déformation à énergie nulle

Ces analyses ont été réalisées avec l'élément C3D8R (hexaèdre à 8 nœuds avec intégration réduite) et les deux types d' « *Hourglass control* » : *Enhanced* et *Relax Stiffness*. Pour le spécimen avec  $h/d = 1$ , nous avons fait quelques analyses de plus avec d'autres tailles de maillage.



**Figure 4.10 - Vérification de l'indépendance du maillage avec deux types d'*Hourglass control* : a) *Enhanced* et b) *Relax Stiffness***

Comme on peut le constater sur la Figure 4.10, pour les analyses effectuées avec le schéma de contrôle *Enhanced* la superposition des courbes est correcte mais pour le schéma *Relax Stiffness* on voit que l'analyse ne se comporte plus de manière stable pour des maillages avec un grand nombre d'éléments (125 éléments et 512 éléments). Ces analyses ont été réalisées avec le même

temps d'application de la charge (1 sec) et le calcul du pas de temps est le même. Pour obtenir des analyses plus stables avec le schéma *Relax Stiffness*, il faut augmenter considérablement le temps d'application de la charge ou venir diminuer le pas de temps de l'analyse. Cela conduit à des temps d'analyses plus long, surtout lorsque le nombre d'éléments est élevé. De plus il y a des cas où cela ne suffit pas et l'utilisation de *Relax Stiffness* ne conduit jamais à une réponse stable. C'est pourquoi nous n'utiliserons plus le schéma *Relax Stiffness*. Toutes les analyses de validation suivantes sont effectuées avec le schéma *Enhanced*.

## 4.4.2 Validation de la compression avec confinement actif

### 4.4.2.1 Vérification de la calibration du paramètre $\kappa$

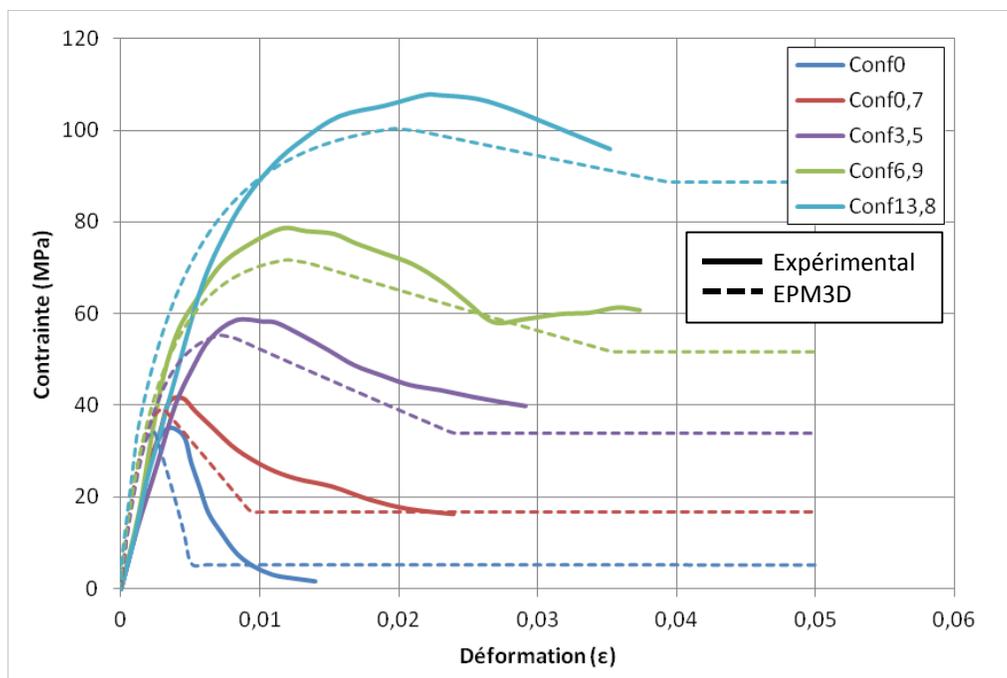
Ici nous présentons des modélisations d'essais de compression avec confinement actif sur des éprouvettes de béton. Nous avons voulu valider notre modèle avec les trois types de bétons provenant de la littérature avec trois niveaux de résistance différents avec lesquels on a calibré le paramètre  $\kappa$ . Les courbes provenant de l'article de Smith et al. (1989) pour un béton de 35 MPa et les courbes provenant de l'article de Xie et al. (1995) pour deux bétons de 63 et 92 MPa servent ici de références. Ces essais ont été réalisés sur des spécimens de ratio d'élanement de 2. Pour Smith et al., la hauteur des spécimens est de 108 mm et pour les essais de Xie et al. de 110 mm. Nous avons donc fait nos analyses avec ces mêmes dimensions de façon à pouvoir superposer nos résultats directement sur les courbes contraintes-déformations données dans ces articles. Nous avons entré des valeurs différentes de  $\delta$  pour chaque béton de façon à représenter le mieux possible le comportement post-pic en compression uniaxiale. Pour le béton de 35 MPa,  $\delta = 0.725$  mm. Pour le béton de 63 MPa,  $\delta = 0.660$  mm. Enfin pour le béton de 92 MPa,  $\delta = 0.623$  mm. On voit que la valeur de  $\delta$  diminue en fonction de  $f_c'$ . La pente post-pic est donc plus grande pour un béton de meilleure résistance. Pour les trois bétons, on a  $\gamma_u = 0.15$ .

Les conditions limites appliquées sont les mêmes que pour la validation du comportement en compression uniaxiale. Les faces LIBREX et LIBREY subissent toutefois maintenant une contrainte appliquée sous forme de pression uniforme. Dans un premier temps, on applique le confinement en 0.1 sec. On vient ensuite appliquer le déplacement de la presse en 1 sec. Le confinement et le déplacement de la presse sont appliqués avec une amplitude lisse.

Nous tenons à remarquer que la distinction des phases de confinement et de déplacement de la presse n'est possible que pour des ratios de confinement faibles (inférieurs à 0.5). Pour des ratios de confinement élevé, le fait d'appliquer une contrainte biaxiale proche de  $f_c'$  apporte trop d'instabilité au modèle. Si on veut modéliser le comportement d'un béton fortement confiné, il faut appliquer le déplacement de la presse et le confinement simultanément. Pour cette raison nous ne présentons ici que des courbes pour des ratios de confinement inférieur à 0.5. Le but ici est de valider l'expression proposée pour le paramètre  $\kappa$ . Nous présenterons plus loin des courbes exhibant le point de transition fragile/ductile dans le cas du confinement passif.

Nous avons fait toutes nos analyses avec un paramètre de maillage égal à la moitié de la hauteur ( $h = 54$  mm pour Smith et al. et 55 mm pour Xie et al.). De cette façon, nous n'avions que deux éléments et les analyses étaient très rapides. Nous présentons plus loin des courbes pour mettre en évidence la sensibilité de nos analyses vis-à-vis du maillage en présence de confinement.

Sur les figures Figure 4.11, Figure 4.12 et Figure 4.13, les courbes expérimentales sont en trait plein et les courbes du modèle sont en pointillés. Chaque paire de courbe de la même couleur correspond à un niveau de confinement donné en MPa dans la légende.



**Figure 4.11 - Smith et al. (1989), béton de 35 MPa**

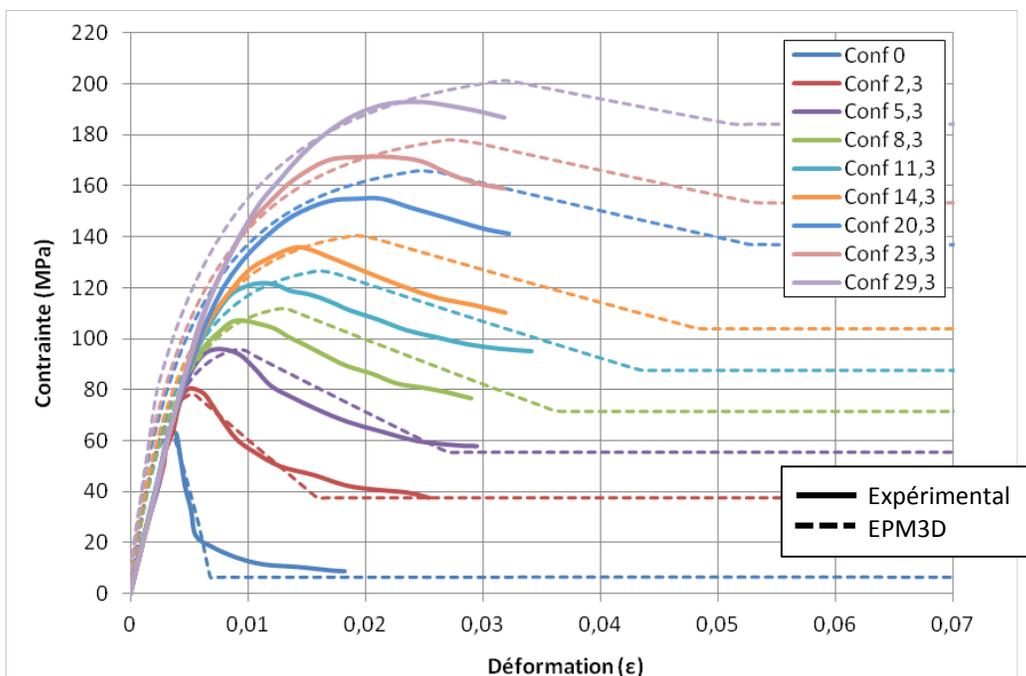


Figure 4.12 - Xie et al. (1995), béton de 63 MPa

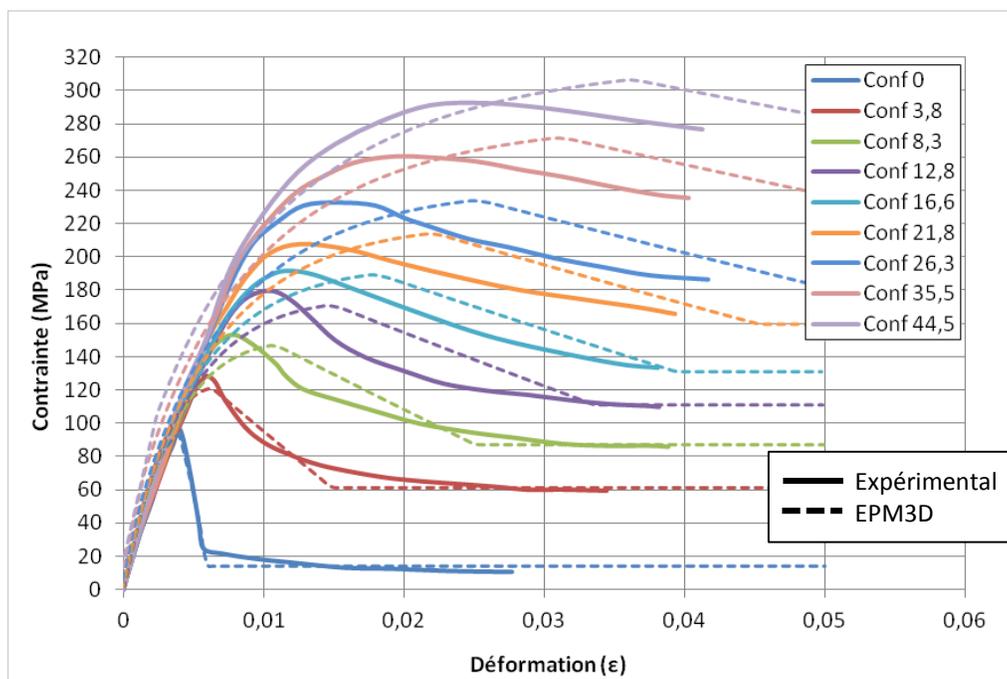


Figure 4.13 - Xie et al. (1995), béton de 92 MPa

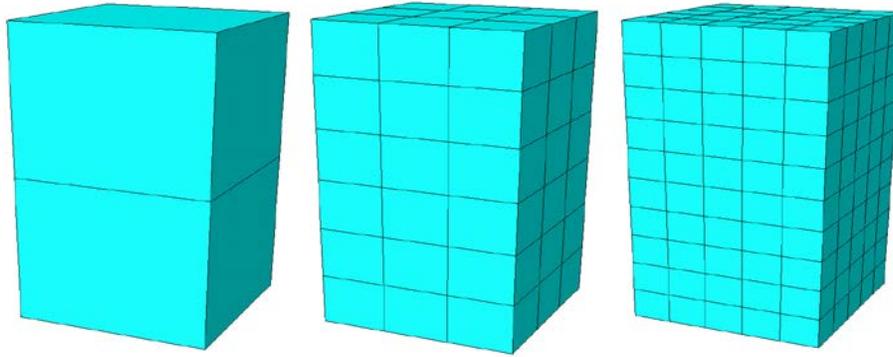
Tout d'abord il convient de ne pas porter une trop grande attention à l'exactitude des courbes prédites. Les déformations sont surestimées dans l'ensemble et comme notre modélisation post-pic est basée essentiellement sur les valeurs au pic, on ne peut pas obtenir une bonne corrélation. La

surestimation de la déformation au pic est due à l'approche hypoélastique et du calcul par déformation équivalente qui n'est pas vraiment adaptée au fait que nous appliquons le confinement et le déplacement de la presse en deux étapes distinctes. Pour ce qui est de la légère surestimation des contraintes au pic notamment pour les spécimens avec des valeurs de confinement élevées, cela pourrait être évité en utilisant un critère de rupture plus « récent » comme celui de Pramono et Willam (1989). En effet le critère de Hsieh et al. (1982), ou encore le critère de Willam-Warnke sont, selon nous, obsolètes. Ceci constitue un des prochains axes de travail pour l'amélioration d'*EPM3D*.

Par ailleurs nous désirons attirer davantage l'attention du lecteur sur la bonne représentation du comportement post-pic. En effet, si on se concentre sur la pente d'adoucissement et la contrainte résiduelle, on voit que l'on obtient de bonnes valeurs. La pente diminue très vite pour un ratio de confinement faible. La diminution est alors plus lente avec des ratios de confinement plus élevés. La définition de  $\kappa$  indépendamment de la résistance du béton considéré est satisfaisante, car les valeurs de la pente post-pic sont correctes pour les trois bétons. La contrainte résiduelle est elle aussi bien évaluée. Cependant nous tenons à apporter un bémol sur ce point puisque certaines courbes expérimentales s'arrêtent avant d'atteindre le plateau de contrainte résiduelle et il est donc impossible de juger de sa bonne estimation.

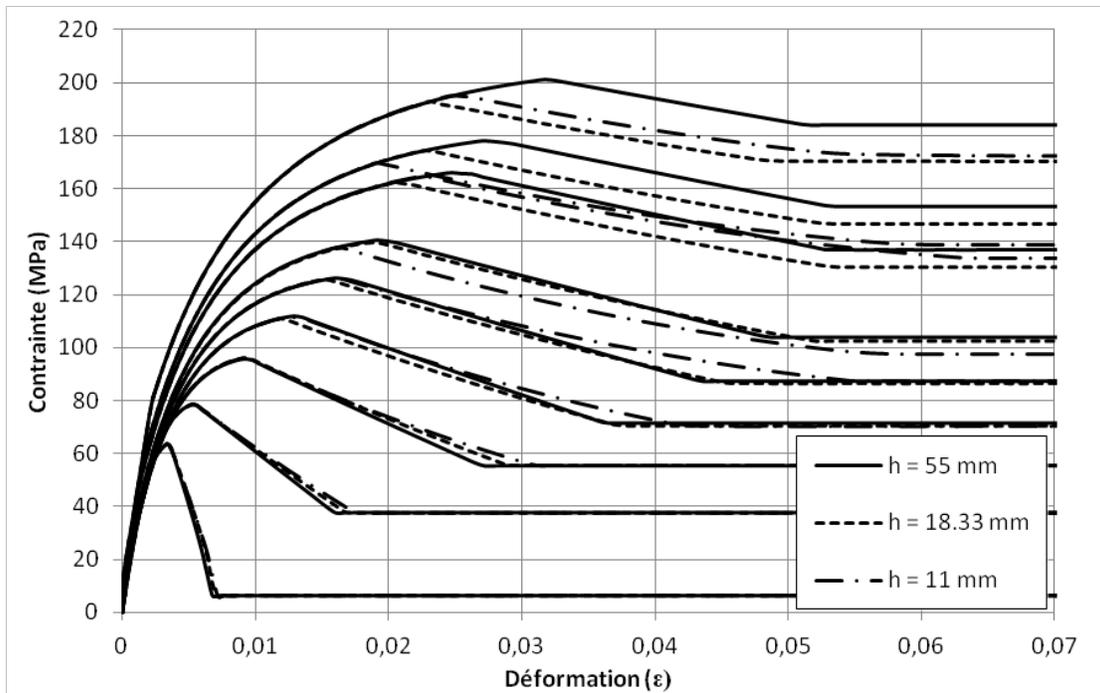
#### **4.4.2.2 Sensibilité vis-à-vis du maillage en présence de confinement actif**

Il faut maintenant examiner la dépendance vis-à-vis du maillage en présence de confinement. Nous présentons exactement les mêmes analyses qu'à la Figure 4.12 (béton de 60 MPa testé par Xie et al.) mais cette fois-ci en faisant varier la taille du maillage. Nous avons effectué des analyses supplémentaires afin de présenter ces mêmes courbes mais avec 3 tailles de maillages  $h$  différentes ( $h = 55$  mm, 18.33 mm et 11 mm) pour chaque niveau de confinement (Figure 4.14).



**Figure 4.14 - Trois maillages différents pour l'étude de l'indépendance vis-à-vis du maillage en présence de confinement actif**

Notons que plus le confinement augmente et plus le nombre d'éléments est grand, plus l'analyse éprouvait de difficultés à rester stable. Notamment les ratios d'énergie artificielle consommée par le schéma de contrôle d' « *hourglass* » et d'énergie cinétique sur l'énergie interne dépassaient régulièrement les critères que nous nous étions fixés (à savoir 1% et 5% resp.). Il a fallu augmenter considérablement le temps d'application de la charge ou diminuer le pas de temps de calcul pour obtenir de bons résultats. Ainsi le temps de calcul augmente très rapidement lorsque l'on réduit la taille du maillage et que l'on augmente le confinement.



**Figure 4.15 - Effets de la taille du maillage en présence de confinement actif sur les essais de Xie et al. (1995) avec le béton de 63 MPa**

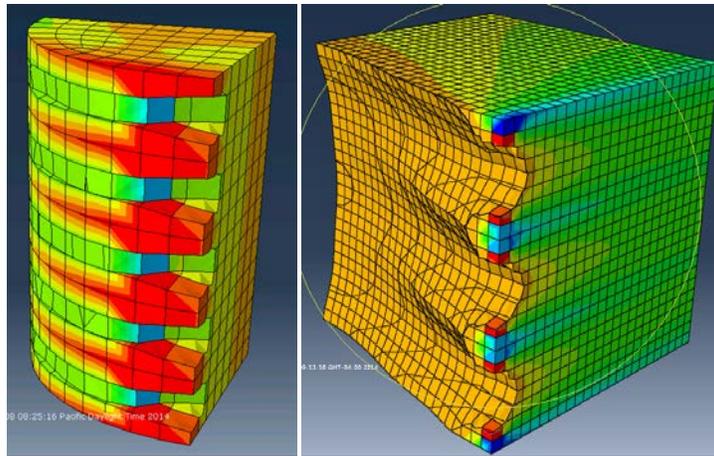
On peut se rendre compte que la dispersion des courbes vis-à-vis du maillage augmente en fonction du niveau de confinement mais cette dispersion est surtout due à la différence du calcul du pic par la modélisation pré-pic. En effet on peut voir pour les courbes avec du fort confinement que le calcul de la déformation au pic dépend du maillage. Cette anomalie devra être réglée par des travaux futurs sur la modélisation pré-pic. Si on se concentre uniquement sur la phase post-pic, la pente ainsi que la contrainte résiduelle sont quelque peu dépendantes du maillage mais cela reste très correct. Pour les niveaux de confinement faibles correspondant à ceux que l'on rencontre habituellement dans un poteau en béton armé, la dispersion est très faible ce qui est très encourageant.

#### 4.4.3 Validation de la compression avec confinement passif

Les modélisations que nous présentons ici ont été réalisées sur des quarts de poteaux cylindriques. Le fait de considérer un poteau cylindrique nous permet d'avoir une meilleure répartition de la contrainte de confinement au sein du volume. On obtient ainsi plus facilement de

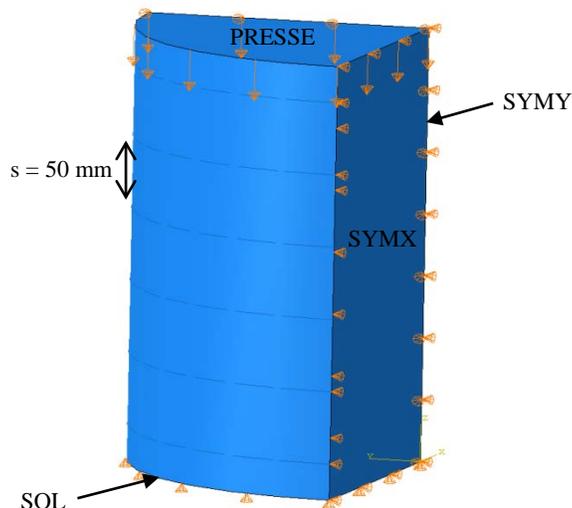
bons résultats qu'avec un poteau de section carrée. En effet pour cette dernière, des concentrations de contraintes ont lieu dans les coins aux niveaux des armatures. La pente post-pic étant principalement due à la contrainte au pic atteinte dans le premier élément du poteau qui fissure, si l'état de contrainte au sein du poteau n'est pas bien représenté alors son comportement post-pic ne le sera pas également.

On représente sur la Figure 4.16 le champ de contraintes normales de confinement selon l'axe  $x$  ( $\sigma_{11}$ ) dans un poteau en béton armé de section circulaire et de section carrée. Ce sont des captures d'écran du logiciel *ABAQUS* où on peut représenter à l'aide de la fonction « isosurface » l'enveloppe des zones effectivement confinées que l'on rencontre souvent dans la littérature.



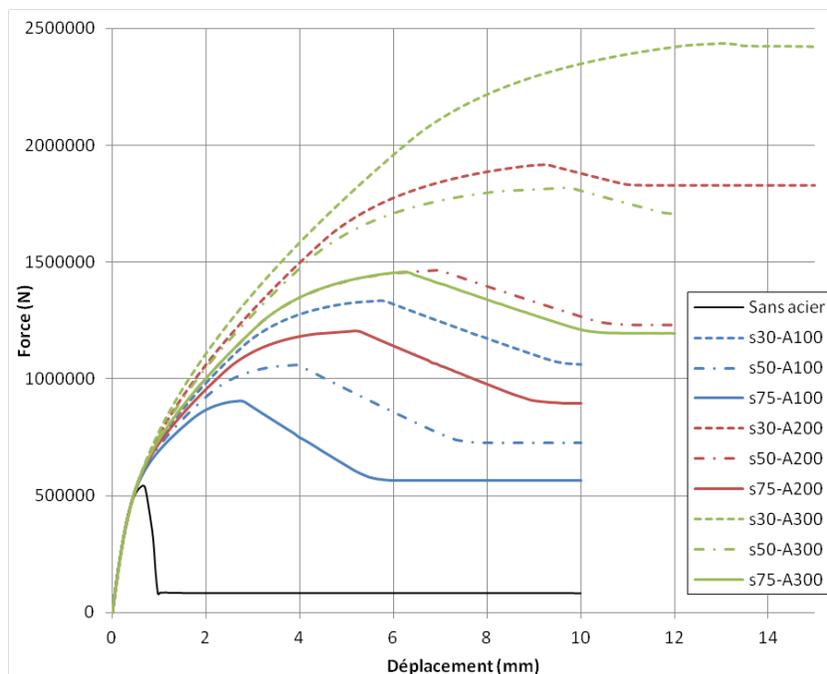
**Figure 4.16 - Répartition de la contrainte normale de confinement sur l'axe  $x$  ( $\sigma_{11}$ ) dans un poteau circulaire et carré**

On considère donc ici un poteau cylindrique dont on ne représente qu'un quart afin d'avoir un temps de calcul relativement court. Pour respecter la symétrie, on bloque les déplacements normaux sur les faces SYMX et SYMY. On définit toujours une face SOL et une face PRESSE (Figure 4.17). Les paramètres pour le béton sont :  $f_c' = 31$  MPa,  $E_c = 25470$  MPa,  $\nu = 0.2$ ,  $\delta = 0.714$  mm et  $\gamma_u = 0.15$ .



**Figure 4.17 - Modélisation d'un poteau circulaire en béton armé (ici avec un espacement entre les étriers de 50 mm)**

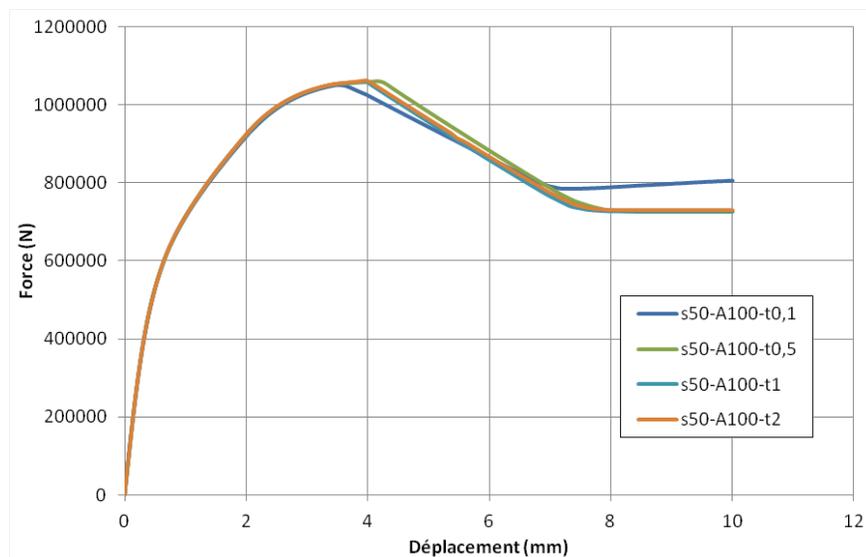
Dans un premier temps, on fixe la taille du maillage du béton et de l'acier pour toutes nos analyses à  $h_{\text{béton}} = 50 \text{ mm}$  et  $h_{\text{acier}} = 20 \text{ mm}$ . Nous effectuerons une analyse de sensibilité au maillage plus loin. On fait varier la quantité d'armature de confinement en prenant trois espacements ( $s = 75, 50, \text{ et } 30 \text{ mm}$ ) et trois sections d'étriers ( $A = 100, 200 \text{ et } 300 \text{ mm}^2$ ). Pour le moment, on considère qu'il n'y a pas de béton d'enrobage et donc que les étriers sont disposés sur la périphérie de la section. De toute façon, la contribution du béton d'enrobage pour le comportement post-pic est nulle. Le poteau a un diamètre de 300 mm et une hauteur de 300 mm ( $h/d = 1$ ). Le déplacement appliqué est de 10 mm et plus et il est effectué avec  $T = 1 \text{ s}$  et plus, afin de respecter les critères sur les ratios d'énergie. Sur la Figure 4.18, on trace les courbes force-déplacement des différentes configurations. La force est toujours obtenue en faisant la somme des forces aux nœuds de la surface SOL. Pour avoir la force correspondant au poteau complet il faut multiplier les résultats par 4.



**Figure 4.18 - Courbes force-déplacement avec confinement passif : en bleu, les spécimens avec une section d'étrier de 100 mm<sup>2</sup>, en rouge 200 mm<sup>2</sup> et en vert 300 mm<sup>2</sup>**

L'effet du confinement passif est donc bien pris en compte. Quand le pourcentage d'armature transversale augmente, on observe bien une diminution de la pente post-pic et une augmentation de la contrainte résiduelle. De plus on peut voir que pour le spécimen avec  $s = 30$  mm et  $A = 300$  mm<sup>2</sup>, on atteint quasiment le point de transition de rupture fragile/ductile. Dans le modèle, une fois arrivé au pic, les coefficients de Poisson sont fixés à zéro, c'est-à-dire que le spécimen ne subit plus de déformation transversale supplémentaire dans la phase post-pic. Même si cela ne représente pas bien la réalité, cela nous permet d'avoir une contrainte de confinement fixe en post-pic. On se ramène finalement au cas théorique du confinement actif.

Pour chaque analyse, on a dû procéder à une étude de sensibilité par rapport à la taille du maillage de béton et au temps d'application de la charge. Par exemple pour le spécimen avec des étriers espacés de 50 mm et de section 100 mm<sup>2</sup>, nous présentons sur la Figure 4.19 l'effet du temps d'application de la charge. On a fait varier  $T$  de 0.1 à 2 secondes. Au-delà d'une seconde, les résultats convergent. Les courbes  $T = 1$  sec et  $T = 2$  sec sont confondues.



**Figure 4.19 - Influence du temps d'application de la charge**

Pour le spécimen avec des étriers espacés de 30 mm et de section 100 mm<sup>2</sup>, nous montrons sur la Figure 4.20 que la taille du maillage a un léger effet sur le calcul de la contrainte et de la déformation au pic et donc sur la phase post-pic. Le temps d'application de la charge est fixé à  $T = 1$  s. Quatre tailles de maillage différentes ont été adoptées pour le béton :  $h_{\text{béton}} = 50, 40, 30$  et 20 mm avec  $h_{\text{acier}} = 20, 15, 10$  et 5 mm respectivement. On voit que le modèle est quasi-indépendant du maillage en confinement passif. Cependant on voit aussi que pour un maillage plus fin ( $h_{\text{béton}} = 20$  mm, courbe violette), les résultats diffèrent en post-pic. Il faudra donc augmenter le temps d'application de la charge de façon à obtenir une meilleure superposition avec les autres courbes. De manière générale, plus on raffine le maillage, plus le temps d'application  $T$  de la charge doit être augmenté. Le temps de calcul réel augmente alors de manière exponentielle. Il faut donc trouver un équilibre entre la précision que l'on désire et le temps de calcul nécessaire pour l'obtenir.

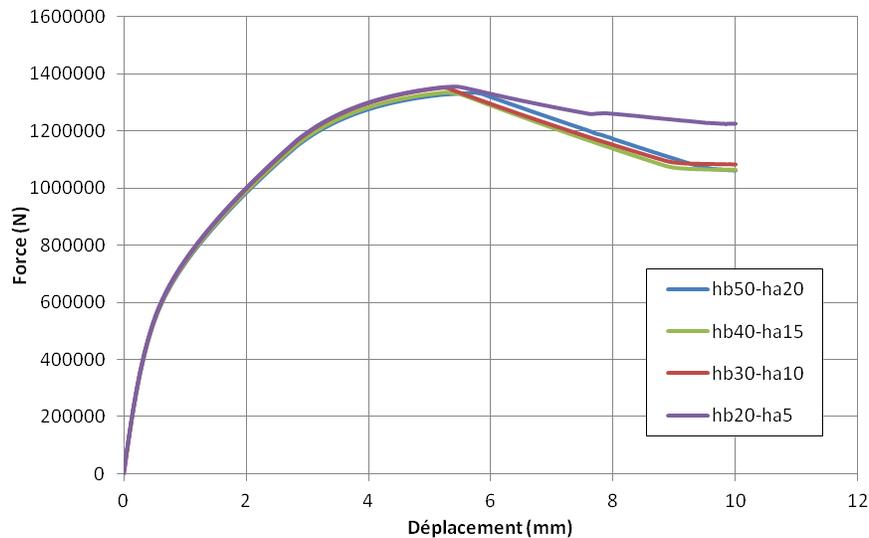


Figure 4.20 - Influence de la taille du maillage pour un temps d'application de charge fixe

## 4.5 Conseils pour la modélisation de poteaux en béton armé

### 4.5.1 Paramètres requis pour l'analyse avec *EPM3D* et *ABAQUS/Explicit*

Quand on veut réaliser une analyse d'un poteau en béton armé et que l'on veut avoir une idée de son comportement lors d'une rupture en compression, on a vu qu'une multitude de paramètres peuvent avoir une influence sur la courbe post-pic. Ils peuvent être classés en plusieurs catégories :

- paramètres liés au modèle constitutif *EPM3D* :  $f_c'$ ,  $\delta$ ,  $\gamma_u$ , choix de l'enveloppe de rupture;
- paramètres liés à l'intégration numérique explicite des équations quasi-statiques :  $\Delta t_{stable}$ , temps d'application et forme d'application du déplacement de la presse (amplitude lisse);
- paramètres liés au choix des éléments : taille du maillage, du type d'éléments et du nombre de nœuds par éléments, intégration numérique exacte ou réduite (nombre de points de Gauss), type de schéma d'*Hourglass control* dans le cas d'une intégration réduite;

- paramètres liés au phénomène physique que l'on cherche à modéliser : disposition des armatures de confinement (en spirales ou avec des cadres), épaisseur d'enrobage et dimension du cœur de béton effectivement confiné, pourcentage d'armature de confinement (espacement vertical des couches d'étriers, section des étriers), aire de l'armature longitudinale.

Ces paramètres sont donc très nombreux et leur interaction rend le problème très complexe. On peut vite se perdre surtout lorsque l'on veut faire des études de sensibilité par rapport à tel ou tel paramètre. Il convient d'adopter une démarche pour s'assurer d'avoir le résultat le plus précis possible. Nous en proposons une au paragraphe suivant accompagnée de quelques conseils. Ceci constitue aussi la conclusion de ce chapitre.

#### 4.5.2 Récapitulatif et démarche pour la modélisation avec *EPM3D*

En résumé, nous conseillons pour toutes les analyses où une rupture en compression peut survenir d'utiliser pour le béton l'élément C3D8R (hexaèdre à 8 nœuds et intégration réduite) avec le schéma de contrôle *Enhanced*. Pour les poteaux en béton armé, l'acier d'armature peut être modélisé par des éléments treillis ancrés dans les éléments de béton avec la fonction *Embedded*. Le chargement doit toujours être contrôlé en déplacement avec une amplitude lisse (*smooth step*). De plus les ratios d'énergie cinétique et d'énergie consommée par le procédé de contrôle d'*Hourglass* sur l'énergie interne totale ( $E_c/E_i$  et  $E_w/E_i$ ) doivent être contrôlés plus sévèrement que pour le cas d'une rupture en traction. Ces ratios ne doivent pas dépasser 5% et 1% respectivement. Dans certains cas on peut tout de même avoir à abaisser encore ces limites. Pour la modélisation d'une colonne quelconque, nous proposons la démarche suivante :

- 1 Utiliser les axes de symétrie de la section de la colonne afin de réduire la taille du modèle (ex : pour un poteau circulaire, ne représenter qu'un quart). De plus les conditions limites de symétrie apportent une robustesse très bénéfique à l'analyse.
- 2 Garder la hauteur totale du poteau pour tenir compte de l'effet de localisation des déformations. À ce propos, lorsque l'on cherche à retrouver les résultats d'un essai sur une colonne réelle, une attention particulière doit être portée sur la localisation des points de

mesure pour les déformations et la longueur de jauge afin de superposer les courbes du modèle avec les données expérimentales.

- 3 Fixer dans un premier temps la taille du maillage du béton égale à l'espacement vertical des étriers ( $h_{\text{béton}} = s$ ).
- 4 Fixer la taille du maillage de l'acier entre 0.3 et 0.4 fois la taille du maillage du béton ( $h_{\text{acier}} = 0.3$  ou  $0.4h_{\text{béton}}$ ). La longueur caractéristique des éléments treillis pour les armatures doit toujours être plus petite que celle du béton. De cette façon, chaque élément de béton traversé par un élément treillis d'acier comporte au moins un nœud de cet élément. La fonction *Embedded* sera alors plus efficace.
- 5 Nous conseillons de fixer les valeurs  $\delta$  et  $\gamma_u$  à l'aide de la courbe de compression uniaxiale si elle est disponible. Sinon à défaut d'avoir d'autres informations, nous conseillons de garder les valeurs par défaut  $\delta = 0.714$  mm et  $\gamma_u = 0.15$  pour un béton normal de 45 MPa (Van Mier, 1986). Pour un béton de 35 MPa,  $\delta = 0.726$  mm (Smith et al., 1989). Pour un béton de 92 MPa,  $\delta = 0.623$  mm (Xie et al., 1995). Ces valeurs sont importantes pour des poteaux faiblement armés mais deviennent beaucoup moins importantes en cas de grand confinement à cause de la formulation du paramètre  $\kappa$  et du paramètre  $\gamma$ .
- 6 Nous conseillons pour le moment de ne pas représenter le béton d'enrobage si on veut modéliser le comportement post-pic global de la colonne. Le cadre dans lequel nous effectuons nos analyses (*EPM3D* + *ABAQUS/Explicit* + Éléments avec contrôle d'*Hourglass*) semble comporter une certaine limite qui devra faire l'objet d'une amélioration dans le futur. De toute façon l'influence du béton d'enrobage est négligeable en phase post-pic. Le diamètre de la colonne doit être égal au diamètre du béton de cœur soit égal à la distance centre à centre des étriers. Les étriers doivent être positionnés en périphérie du béton de cœur. Toutefois si on tient à représenter le comportement du poteau avec le béton d'enrobage en phase pré-pic, il faut alors modéliser le poteau en deux parties distinctes (béton de cœur et béton d'enrobage). Cependant, dans l'état actuel du modèle *EPM3D*, il est difficile d'obtenir une analyse stable lorsque que l'on représente le béton d'enrobage. En effet celui-ci étant non confiné il atteint sa résistance maximale bien avant le béton de cœur. Les éléments situés dans l'enrobage passent en post-pic bien avant ceux situés dans le cœur ce qui est difficile à gérer car le champ de contrainte varie alors très fortement à l'interface entre le béton de cœur et d'enrobage.

- 7 Pour un maillage donné et pour une géométrie de colonne donnée (section, quantité d'armature, etc.), il faut dans un premier temps faire une analyse de sensibilité des résultats selon le temps d'application de la charge car la technique de résolution explicite nécessite dans notre cas que le problème reste quasi-statique. Si l'on rencontre des problèmes de stabilité de l'analyse due aux effets cinétiques ( $E_c/E_i$  trop grand), on doit aussi augmenter le temps d'application de la charge  $T$ . On peut aussi diminuer le pas de temps  $\Delta t_{stable}$  si cela est nécessaire.
- 8 Enfin, une fois que l'on a réglé le problème de sensibilité dû à la technique de résolution explicite des équations, on doit procéder à une analyse de sensibilité vis-à-vis du maillage en diminuant et en augmentant la taille du maillage tout en gardant un ratio entre 0.3 et 0.4 pour les éléments d'acier. En d'autres termes pour obtenir une bonne estimation du niveau de ductilité qu'apporte la présence d'étriers, il faut d'abord s'affranchir des imprécisions dues aux paramètres liés au maillage et à la méthode d'intégration numérique.

On peut aussi être tenté de réduire systématiquement la taille du maillage pour avoir une meilleure approximation du champ de contrainte de confinement ce qui nous permettrait d'obtenir de façon plus précise la contrainte de confinement au pic  $\sigma_r$  et donc un meilleur comportement post-pic. Cependant un maillage trop fin rencontre certaines limites. Non seulement cela entraîne une augmentation drastique du temps de calcul mais de plus cela devient de plus en plus difficile de contrôler la formation des modes à énergie nulle. En effet contrairement à ce que le manuel d'ABAQUS préconise, dans notre cas le critère sur le ratio  $E_h/E_i$  devient impossible à respecter même pour un temps d'application de la charge très grand lorsque l'on augmente le nombre d'éléments. Normalement le fait d'augmenter le nombre d'éléments fait en sorte de limiter la formation de modes à énergie nulle. Ce point reste donc encore à éclaircir.

## CHAPITRE 5 CARACTÉRISATION DU COMPORTEMENT POST-PIC EN COMPRESSION D'UN BRFP

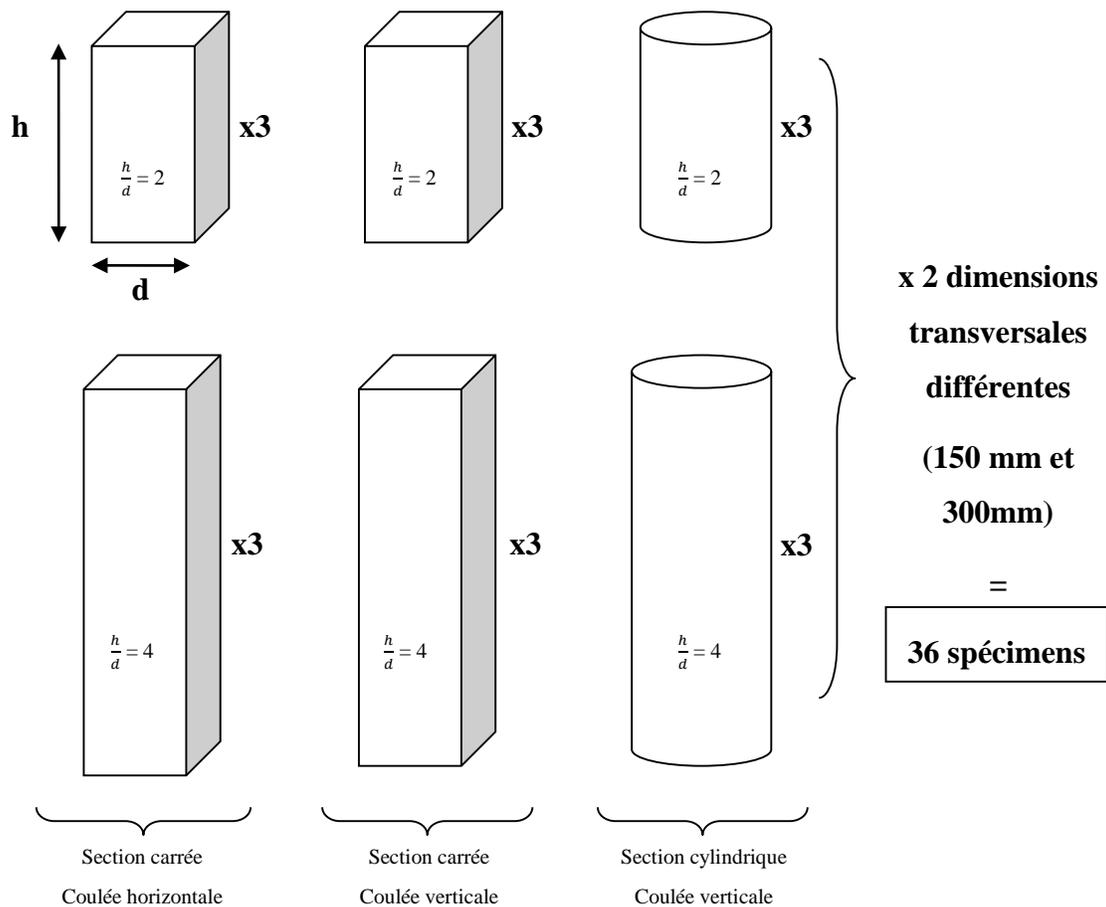
### 5.1 Présentation et définition du cadre expérimental

Ce programme expérimental a pour but de fournir les caractéristiques complètes en compression d'un mélange de béton fibré très utilisé dans les essais expérimentaux à l'École Polytechnique. Ce mélange a été utilisé par exemple dans les travaux de De Broucker (2013) pour l'étude de poutres précontraintes en béton fibré. L'intérêt de ce programme expérimental ne réside pas tant dans l'étude de l'influence des fibres ou des différents constituants du mélange sur le comportement en compression mais plutôt de fournir une fiche caractéristique en compression de ce mélange en particulier. Nous tenons à préciser que l'étendue de ce programme de recherche était déjà assez vaste et que nous nous sommes concentrés sur une seule composition de béton. Comme nous n'utilisons qu'un seul type de fibres nous ne pourrions pas non plus discuter de l'influence de la taille ou de la forme de celles-ci. Le but final est d'utiliser les données collectées pour des analyses d'éléments structuraux à l'aide d'*ABAQUS* et du modèle *EPM3D*. Nous présenterons au chapitre 6 un exemple d'application portant sur l'analyse d'un poteau en béton armé et fibré.

Ici nous avons plutôt mis l'accent sur l'influence de la géométrie en faisant varier le rapport d'élanement (2 et 4) et la forme de la section de spécimens (circulaires ou carrés). On a effectué nos essais avec deux tailles caractéristiques pour la dimension transversale (150 mm et 300 mm) afin de mettre en évidence un éventuel effet d'échelle. Enfin, le dernier paramètre que nous avons fait varier est le sens de coulée, horizontal et vertical, des spécimens de section carrée. Les spécimens cylindriques ont tous été coulés verticalement. Nous savons aujourd'hui que nous pouvons orienter les fibres de façon préférentielle avec le sens de coulée. Ainsi nous espérons observer l'influence de l'orientation des fibres sur le comportement en compression post-pic. Dans un ouvrage en béton fibré, il est assez difficile d'obtenir une orientation parfaite des fibres dans le sens désiré. Ainsi en coulant nos spécimens verticalement et horizontalement, nous avons voulu nous placer dans deux cas « limites » qui peuvent survenir lors de la fabrication d'éléments structuraux en béton fibré. Les spécimens coulés horizontalement auront des fibres orientées de manière générale dans le sens longitudinal donc parallèlement à la direction de la charge tandis que

ceux coulés verticalement auront des fibres orientées de manière générale perpendiculairement à la charge.

Afin de s'affranchir du caractère aléatoire (dispersion statistique) du comportement du béton, nous avons réalisé trois essais par type de spécimen ce qui porte le nombre d'échantillons à 36. Sur la Figure 5.1 ci-dessous, nous présentons un récapitulatif du nombre de spécimens et des différents paramètres que nous avons pris en compte.



**Figure 5.1 - Récapitulatif du nombre de spécimens et des différents paramètres**

Un des aspects importants de ce programme expérimental réside dans la possibilité de réaliser des tests sur des spécimens de grande section. Habituellement la taille standard des échantillons se situe autour de 100 mm de diamètre et 200 mm de longueur. Ainsi dans la littérature, peu d'essais de compression de béton ont été réalisés avec de telles sections et encore moins pour

l'obtention de la courbe post-pic. Ceci a donc été possible car le laboratoire de Structures de l'École Polytechnique possède une presse universelle MTS de 12 MN pilotable en déplacement. En effet le mélange de béton ayant une résistance autour de 80 MPa, les spécimens de section carrée 300x300 mm<sup>2</sup> nécessitaient une force d'environ 7.2 MN pour arriver à la rupture.

Enfin nous tenons à préciser que nous avons essayé au maximum de remplir toutes les conditions données par l'article de Van Mier et al. (2000) pour l'obtention de la courbe d'adoucissement. Malheureusement certains facteurs, du notamment à la taille de nos spécimens et aux capacités du laboratoire, nous ont obligé à prendre nos propres initiatives. Toutes les modifications de la procédure proposée par Van Mier et al. (2000) sont justifiables par la volonté de garder des conditions identiques de chargement pour la totalité de nos spécimens afin de pouvoir comparer au mieux les résultats.

## 5.2 Élaboration du mélange

Dans le cadre de la recherche sur le développement de nouvelles méthodes de construction de ponts avec des bétons innovants, une formulation de béton renforcé de fibres métalliques à haute performance et autoplaçant a été élaborée au cours des dernières années notamment grâce aux travaux de Cédric Androuët et al. (2013) au laboratoire de Structures de l'École Polytechnique de Montréal. Une multitude de projets de recherche se sont succédés apportant à chaque fois leurs améliorations : Lacroix-Sauvageau et al. (2010), Voisin et al. (2011), de Montaignac (2011), Tordjman et al. (2012), De Broucker et al. (2013).

Le mélange de béton utilisé dans ce programme expérimental visait une résistance en compression uniaxiale de 80 MPa à 28 jours. Le rapport  $E/C$  était fixé à 0.28. Le ciment utilisé est un ciment binaire à fumée de silice de type GUB-SF et a été fourni par Lafarge Canada. On a utilisé un superplastifiant, le Plastol 6400 fourni par Euclid Canada, pour assurer une bonne maniabilité compte tenu du faible rapport  $E/C$ . La quantité de superplastifiant est de 0.54%<sub>secL</sub>. Les fibres utilisées sont des fibres à simples crochets *Dramix*® 65-35 (longueur 35 mm) fournies par l'entreprise Bekaert. Ces fibres étant des fibres longues, on ne s'attend pas à ce que le comportement pré-pic soit modifié. Car nous rappelons que des fibres d'une telle longueur n'agissent que sur les macrofissures, c'est-à-dire lors d'une ouverture de fissure de l'ordre du

millimètre visible uniquement en post-pic. Le pourcentage volumique de fibres est 1%<sub>vol</sub>. Le Tableau 5.1 ci-dessous récapitule les différents constituants présents dans le mélange et leurs quantités en masses volumiques.

**Tableau 5.1 – Formulation du BRF 80 MPa (d’après Androuët et al., 2013)**

<i>Constituant</i>	<i>Désignation</i>	<i>Quantité (en kg par m<sup>3</sup> de béton)</i>
Ciment	GUb-SF (Lafarge Canada)	685.0
Eau	-	185.7
Superplastifiant	Plastol 6400 (Euclid Canada)	9.8
Sable	St-Félix (BPDL)	854.8
Pierre	5-10 St-Donat (BPDL)	629.9
Fibres	Dramix 65-35 (Bekaert)	80.0

### 5.3 Fabrication des spécimens

Les coffrages ont été réalisés par nos soins à l’atelier de bois du laboratoire de Structures. Pour les spécimens de sections carrées coulés verticalement, on a pu regrouper les spécimens par trois en réalisant un coffrage avec trois compartiments. Pour les spécimens cylindriques on a utilisé des tubes de cartons de type *Sonotube*®. Pour les autres spécimens de sections carrées coulés horizontalement nous étions obligés de créer un coffrage pour chaque spécimen (Figure 5.2). Les coffrages sont composés de plaques de bois contre-plaqué avec une face de finition et de madriers de 2"x4" pour les raidisseurs. Ils ont volontairement été surdimensionnés de façon à être réutilisables pour un éventuel futur projet. Ils sont facilement démontables grâce à l’utilisation de tiges filetées. Les spécimens ont été fabriqués directement avec les dimensions requises pour l’essai. Van Mier et al. (2000) conseille plutôt d’obtenir les spécimens en les sciant à partir d’un grand bloc de béton afin de s’affranchir des effets de bords causés par la coulée et d’obtenir des

spécimens les plus homogènes possibles. Cependant vu la taille de nos plus grands spécimens ( $L = 1200$  mm et  $d = 300$  mm), nous n'avons pas la possibilité de procéder ainsi au laboratoire.



**Figure 5.2 - Photos des coffrages pour les spécimens de sections carrées coulée horizontalement**

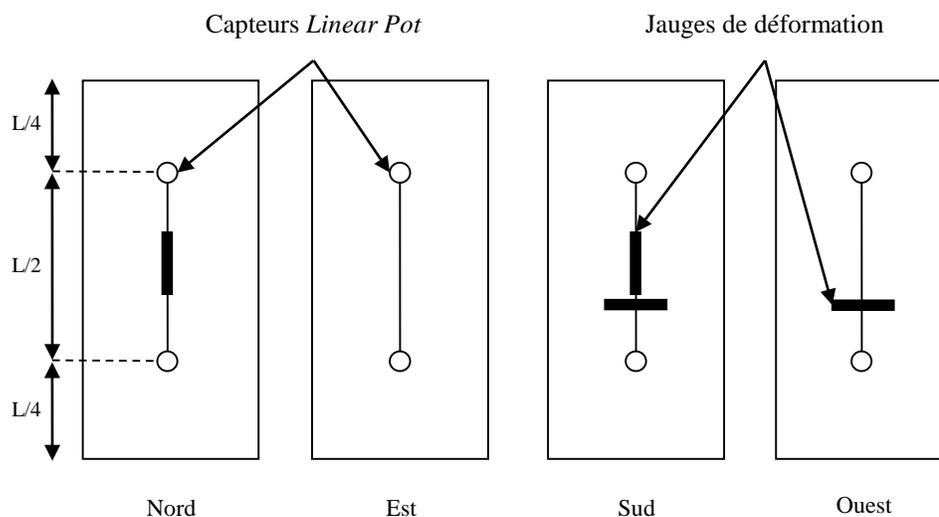
Par ailleurs, le volume total de béton nécessaire à la fabrication était de plus de  $1 \text{ m}^3$ . Ayant la volonté d'avoir exactement le même béton pour tous nos spécimens et donc de couler les spécimens en une seule gâchée, les capacités du laboratoire de béton de l'École Polytechnique n'étaient pas suffisantes. Nous avons été obligés de faire appel aux entreprises Béton Central, filiale de Béton Provincial, et Béton Préfabriqué Du Lac (BPD L) pour réaliser la coulée. Ces deux entreprises voisines sont situées à Saint-Eugène de Grantham, Qc. De plus le fait de travailler directement avec une entreprise spécialisée nous a permis de tester la capacité de notre mélange dans des conditions de fabrication industrielle.

Les coffrages ont donc été emmenés par camion à l'usine BPD L. Le mélange de béton sans fibres a été livré par camion par l'entreprise Béton Central. Nous avons nous-mêmes ajouté les fibres au dernier moment directement dans le camion toupie. Des essais de vérifications (cône d'Abraham, *L-box*) de la maniabilité, de la ségrégation et de la stabilité du mélange ont été effectués avant de commencer à couler. Quelques ajustements sur le dosage en superplastifiant furent nécessaires de façon à gommer l'effet d'échelle dû à la différence entre le volume des gâchées d'élaboration effectuées dans le malaxeur du laboratoire et le volume du camion toupie. La coulée a ensuite été effectuée directement avec la gouttière du camion pour les gros volumes coulés verticalement et avec des seaux pour les petits volumes et les gros volumes coulés horizontalement. Pour les spécimens coulés horizontalement, on a favorisé l'orientation des fibres dans le sens longitudinal en faisant un mouvement de balancier de droite à gauche avec le seau. Ce simple geste suffit à obtenir une orientation globale des fibres dans le sens désiré. Enfin la finition des surfaces a été effectuée à la truelle d'acier.

La cure du béton a été effectuée en deux étapes. Tout d'abord les échantillons sont restés dans les coffrages et sous film plastique à la température de l'usine. Le béton était arrosé par les employés de BPDFL tous les jours. Comme c'est une usine de béton préfabriqué, la température à l'intérieur du hangar est toujours maintenue aux environs de 20°C ce qui était idéal. Au bout d'une semaine les spécimens ont été décoffrés et stockés dans le hangar de l'usine pendant environ deux mois toujours à 20°C. Enfin les spécimens ont été rapatriés à l'École Polytechnique sur des palettes afin de commencer l'instrumentation.

## 5.4 Instrumentation des spécimens

L'instrumentation des spécimens a été l'étape la plus longue du processus. En effet chaque spécimen était équipé de 4 capteurs de déplacement appelés *Linear Pot* (LP) et de 4 jauges de déformations. Deux jauges de déformations (sur les faces Nord et Sud) ainsi que les 4 capteurs LP mesuraient les déformations longitudinales, c'est-à-dire les déformations dans le sens de la charge, alors que les deux autres jauges mesuraient la déformation latérale (sur les faces Sud et Ouest). Les jauges de déformations fournissent de meilleures mesures mais de façon très locale alors que les *Linear Pot* fournissent une mesure moins exacte mais leur plage de mesure est très modulable. Ils permettent d'obtenir des mesures sur une plage très grande. Pour nos plus grands spécimens ( $L=1200$  mm), la longueur de jauge étant de  $L/2$  pour tous nos spécimens, la plage de mesure des LP était de 600 mm. La longueur de jauge était centrée sur la hauteur de la colonne. Les jauges de déformation longitudinale étaient placées à mi-hauteur et les jauges de déformation transversale juste en dessous. Le détail de l'instrumentation des échantillons pour chaque face est présenté à la Figure 5.3 ci-dessous.



**Figure 5.3 – Détail de l’instrumentation des spécimens**

L’alignement des spécimens était très difficile à réaliser en pratique surtout pour les spécimens de très grandes tailles (grande section et grande longueur). Nous verrons au paragraphe suivant que l’installation des spécimens dans la presse était rendue difficile pour plusieurs raisons. Les 4 capteurs de déplacement et plus particulièrement les deux jauges de déformations longitudinales avaient donc en phase élastique le rôle de contrôler l’alignement du spécimen avec la presse. Ils mesuraient la déformation longitudinale sur les 4 faces. Par exemple si l’écart était trop grand entre la déformation Sud et Nord, nous pouvions en conclure que le spécimen était mal centré et qu’un moment parasite était créé en tête de colonne. Si tel était le cas il fallait décharger le spécimen et le repositionner. Les jauges de déformations étant plus exactes, elles avaient pour rôle de confirmer les valeurs données par les LP en phase pré-pic. En toute rigueur il aurait fallu disposer deux jauges de plus pour mesurer les déformations longitudinales sur les faces Est et Ouest mais cela aurait été trop coûteux à cause du nombre de spécimens. Par contre pour les mesures dans la phase post-pic, seuls les capteurs LP ont pu être utilisés. En effet, dès lors qu’une macrofissure se crée, les mesures des jauges de déformation ne sont plus exploitables.

Chaque capteur de déplacement LP nécessite la pose au préalable de deux plots avec un pas de vis pour venir fixer les deux extrémités du capteur. Les plots ainsi que les jauges de déformation ont été collés directement à la surface des échantillons à l’aide d’une colle extra forte particulièrement adaptée au béton. Au préalable nous avons procédé à un ponçage localisé afin de

supprimer la couche de laitance pour gagner en adhérence et obtenir des mesures fiables. Le choix de coller les plots plutôt que de percer des trous dans le béton de façon à les ancrer plus solidement se justifie par le fait que nous ne voulions en aucun cas altérer les échantillons et créer de trop grandes zones de faiblesse.

Pour compléter les mesures des capteurs, nous disposions aussi des capteurs de la presse. Nous avons accès au déplacement du plateau de la presse et à la mesure de la force effectuée par la cellule de charge à  $\pm 10$  kN.

Enfin les spécimens ont été recouverts de peinture blanche pour une meilleure observation de la fissuration.

## **5.5 Système de chargement et installation**

Comme nous l'avons dit précédemment une presse MTS de 12 MN a été utilisée pour les spécimens de grande section avec une force maximale évaluée à 7200 kN. Les petites sections (150x150 mm<sup>2</sup>) nécessitaient une force 4 fois moindre d'environ 1800 kN. Les équipements du laboratoire étant utilisés par beaucoup d'étudiants, il n'était pas possible d'effectuer tous les essais sur la même presse. La presse Instron avec une capacité de 4 MN a été utilisée pour les essais de petite section.

Pour ce type d'essai, le montage est sommaire. En effet nous n'avons pas eu besoin de modifier beaucoup les presses. Nous avons seulement installé des plaques d'acier sur les plateaux haut et bas des deux presses utilisées. Comme nous l'avons signalé plus tôt, la principale difficulté réside dans l'alignement des spécimens avec l'axe de la presse. La position de l'axe de la presse a été déterminée à l'aide d'un niveau laser. Cependant nous étions très limités par la taille des spécimens, leur qualité de surface et leur parallélisme.

Pour les échantillons coulés horizontalement comme les deux faces aux extrémités étaient des faces de coffrages, nous n'avons pas eu besoin de les rectifier. Les coffrages ont été assez bien réalisés assurant un parallélisme suffisant. Pour les spécimens coulés verticalement nous avons été obligés de rectifier les surfaces laissées à l'air libre car la finition du béton que nous avons effectuée était loin d'être parfaite. Pour les petites sections nous avons pu utiliser la machine-rectifieuse du laboratoire. Nous avons appliqué une rectification sur les deux extrémités de façon à obtenir un

meilleur parallélisme. Par contre pour les spécimens de grande section, la dimension transversale étant de 300 mm nous empêchait de nous servir de la rectifieuse. Ici la rectification des surfaces a été faite manuellement à l'aide d'une scie à béton. Le résultat fut certes bien moins précis qu'avec la machine, mais les mesures des jauges de déformation lors des essais ont montré que le parallélisme était suffisant.

Chaque spécimen était donc posé sur une couche de *Drystone*® directement au centre de la presse. C'est un plâtre à ultra haute résistance très utilisé au laboratoire de l'École Polytechnique. Il permet de rattraper tous les petits défauts de surface en comblant les trous ou les aspérités. Nous avons pu tester sa résistance lors de tests de validation pour le choix du plâtre. Pour cela nous avons réalisé des petites « galettes » de 10 mm d'épaisseur que nous avons placé entre deux cylindres en acier dans la presse. La contrainte pouvait s'élever au-delà de 120 MPa sans observer de rupture du *Drystone*®.

Enfin on coulait une autre couche de *Drystone*® sur la surface supérieure du spécimen et on venait appliquer directement le plateau de la presse pour évacuer le surplus et assurer un contact surfacique parfait. Sur la Figure 5.4, on peut voir le montage final d'un spécimen cylindrique sur la presse Instron. Le coefficient de frottement entre le *Drystone*® sec et les plaques d'acier n'a pas été évalué avec précision, mais nous pensons qu'il est proche de celui du béton avec l'acier.



**Figure 5.4 - Photo du montage d'un spécimen cylindrique de 150 mm de diamètre et de rapport d'élancement 2 sur la presse Instron**

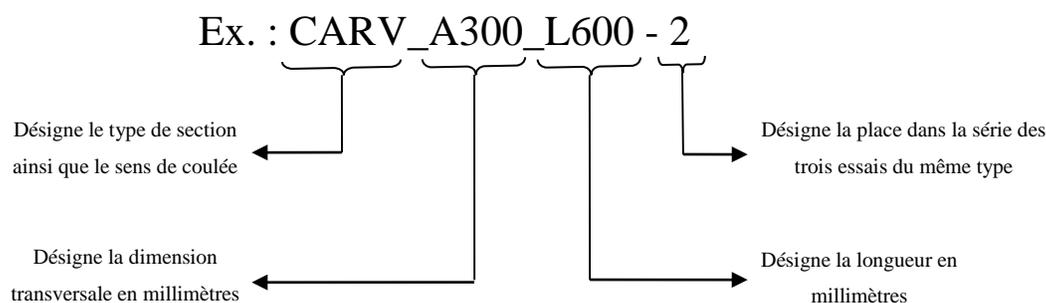
## 5.6 Déroulement des essais

Les essais ont bien entendu été réalisés en déplacement contrôlé. Nous avons appliqué une vitesse de déplacement calculée de façon à ce que chaque spécimen subisse le même taux de chargement en phase pré-pic environ 125 kPa/s, ce qui donne des vitesses de chargement différentes en fonction de la longueur : 2  $\mu\text{m/s}$  pour les spécimens de longueur 300 mm, 4  $\mu\text{m/s}$  pour une longueur de 600 mm et 8  $\mu\text{m/s}$  pour une longueur de 1200 mm. La norme ASTM C469 pour le calcul du module d'Young stipule un taux de chargement de 250 kPa/s pour des échantillons standardisés avec un ratio d'élanement égal à 2. Ce taux de chargement a été divisé par deux afin de tenir compte de nos spécimens de ratio égal à 4, dont l'énergie élastique augmente deux fois plus vite que les spécimens de ratio égal à 2, et afin de contrôler plus facilement l'approche du pic. En arrivant proche du pic (aux alentours de 70 MPa) la vitesse de chargement était réduite de moitié.

## 5.7 Résultats

### 5.7.1 Désignation et spécimens rejetés

Dans cette section nous allons présenter les résultats des essais de compression. Pour repérer les 36 essais, nous avons établi un code dont voici l'explication :



**Figure 5.5 - Désignation des spécimens**

Si on prend cet exemple, c'est donc un spécimen de section carrée, coulé verticalement, de côté  $a = 300$  mm et de longueur  $L = 600$  mm. C'est le deuxième de la série de trois spécimens de

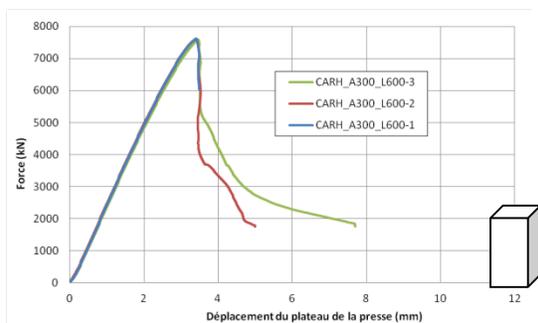
ce même type. Les spécimens cylindriques commencent par CYL et les spécimens de sections carrées coulés horizontalement par CARH. Nous allons commencer par présenter les courbes force-déplacement tracées avec les données des capteurs de la presse et les différents types de rupture que l'on a observés. Ensuite nous présenterons les courbes tracées à l'aide des différentes mesures effectuées par les capteurs que nous avons mis en place sur les spécimens. Enfin en conclusion nous commenterons l'influence des paramètres que nous avons fait varier.

Notons cependant que les résultats de seulement 2 spécimens sur les 36 testés ont dû être écartés. Le spécimen CYL\_D300\_L600-1 était notre premier test et l'alignement avec l'axe de la presse n'était pas optimal. Nous avons observé des écarts de déformations trop grands entre les faces Nord et Sud. Nous avons donc changé notre procédure d'installation après ce premier essai. Ceci fut concluant et nous avons gardé cette même procédure pour tous les autres. Le deuxième spécimen écarté est CYL\_D150\_L600-1. La coulée de ce spécimen a été très mal réalisée et un joint froid s'est créé. Le module d'Young et la contrainte maximale de ce spécimen étaient bien plus faibles que ceux des autres spécimens confirmant ainsi sa mauvaise qualité. Les résultats de ce dernier n'ont donc pas été utilisés.

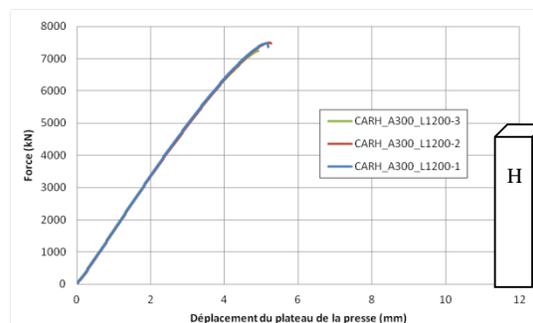
## 5.7.2 Courbes force-déplacement de la presse et premières remarques

Dans un premier temps nous présentons les résultats bruts issus de la presse. Sur la Figure 5.6, Figure 5.7 et Figure 5.8 sont représentées les courbes force-déplacement pour les spécimens de grande section, c'est-à-dire avec  $d = 300$  mm. On a regroupé les courbes par type de spécimen. La Figure 5.6 correspond aux spécimens de section carrée coulés horizontalement, la Figure 5.7 aux spécimens de section carrée coulés verticalement et la Figure 5.8 aux spécimens de section circulaire coulés verticalement. Les courbes à gauche correspondent aux spécimens de rapport d'élanement égal à 2 et à droite égal à 4. Une petite figure à côté des courbes rappelle la forme de l'échantillon et son sens de coulée.

La logique est la même avec la présentation des courbes force-déplacement des spécimens de petite section, c'est-à-dire  $d = 150$  mm, testés sur la presse Instron (Figure 5.9, Figure 5.10 et Figure 5.11).

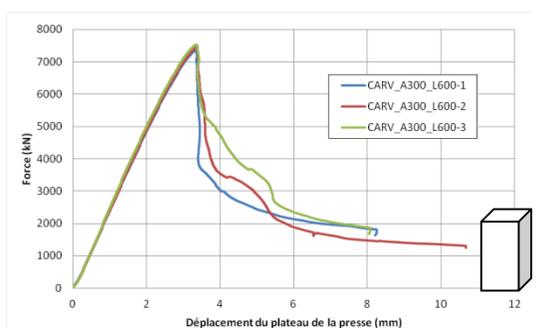


$L = 600 \text{ mm}$

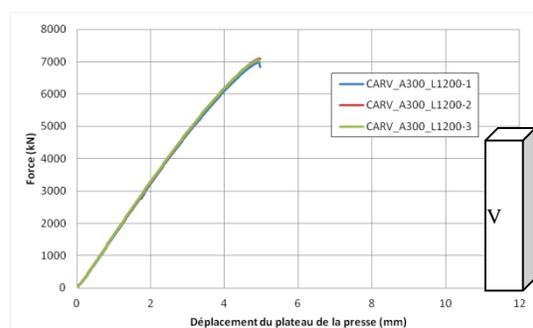


$L = 1200 \text{ mm}$

**Figure 5.6 - Courbes force-déplacement de la presse des spécimens de section carrée coulés horizontalement avec  $a = 300 \text{ mm}$**

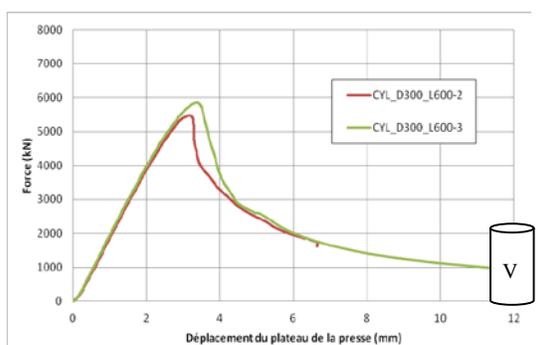


$L = 600 \text{ mm}$

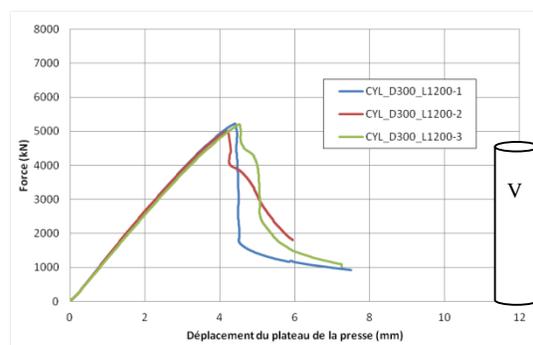


$L = 1200 \text{ mm}$

**Figure 5.7 - Courbes force-déplacement de la presse des spécimens de section carrée coulés verticalement avec  $a = 300 \text{ mm}$**

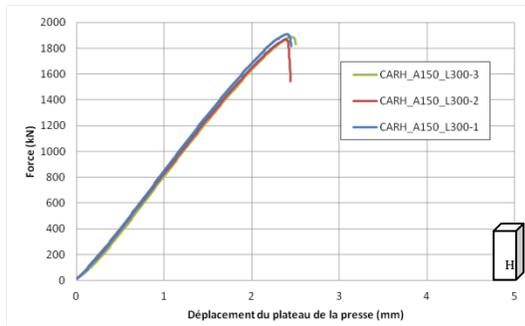


$L = 600 \text{ mm}$

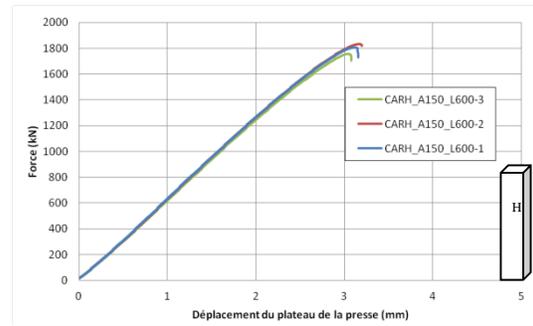


$L = 1200 \text{ mm}$

**Figure 5.8 - Courbes force-déplacement de la presse des spécimens de section circulaire coulés verticalement avec  $d = 300 \text{ mm}$**

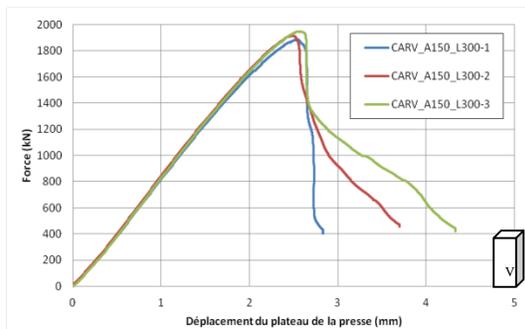


$L = 300 \text{ mm}$

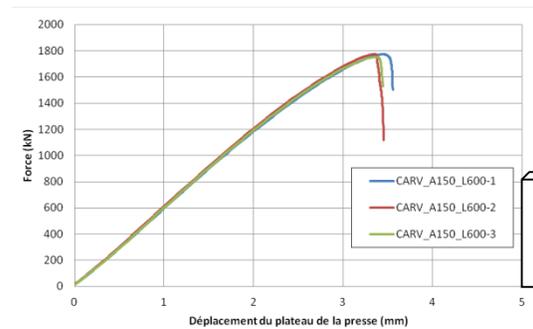


$L = 600 \text{ mm}$

**Figure 5.9 - Courbes force-déplacement de la presse des spécimens de section carrée coulés horizontalement avec  $a = 150 \text{ mm}$**

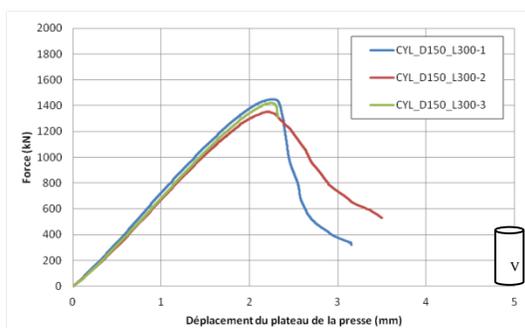


$L = 300 \text{ mm}$

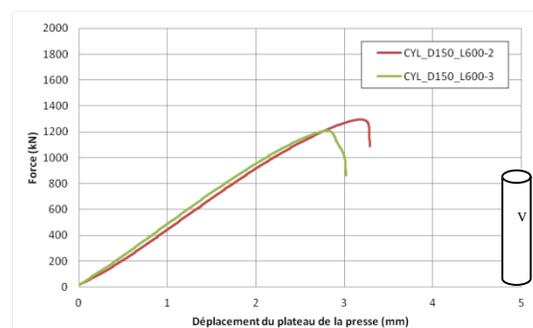


$L = 600 \text{ mm}$

**Figure 5.10 - Courbes force-déplacement de la presse des spécimens de section carrée coulés verticalement avec  $a = 150 \text{ mm}$**



$L = 300 \text{ mm}$



$L = 600 \text{ mm}$

**Figure 5.11 - Courbes force-déplacement de la presse des spécimens de section circulaire coulés verticalement avec  $d = 150 \text{ mm}$**

Comme on peut le voir, la phase pré-pic ne subit quasiment pas de dispersion pour les spécimens de section carrée. Pour les spécimens de section circulaire, la dispersion est un peu plus visible mais cela reste tout de même acceptable. Cela prouve la bonne réalisation de l'alignement des spécimens avec l'axe de la presse. Cela illustre aussi que l'on a été capable de réaliser un mélange parfaitement homogène dans des conditions de fabrication industrielle (camion toupie) ce qui est très encourageant pour son utilisation future. Nous rappelons que les coffrages des spécimens cylindriques ont été fabriqués avec des cylindres en carton de type *Sonotube*®. Ils étaient de moins bonne qualité ce qui peut expliquer en partie la présence d'une plus grande dispersion.

À l'inverse, pour ce qui est de la phase post-pic, les essais ont montré une grande dispersion allant de l'absence totale de comportement adoucissant (rupture extrêmement fragile) à un comportement très adoucissant avec un bon maintien de la contrainte résiduelle. Comme on peut le voir, les spécimens élancés (rapport d'élancement égal à 4) ont connu en règle générale des ruptures fragiles, c'est-à-dire que la courbe s'arrête nette au pic. Seuls les spécimens cylindriques CYL\_D300\_L1200 ont présenté une certaine « ductilité » : la charge ne tombe pas immédiatement à zéro (présence d'une contrainte résiduelle). On peut voir aussi que même pour certains spécimens courts, on peut observer des ruptures assez fragiles, notamment pour les spécimens coulés horizontalement comme le spécimen CARH\_D300\_L600-1 (Figure 5.6 à gauche) ou les spécimens CARH\_D150\_L300 (Figure 5.9 à gauche). Il est alors très difficile de tirer des conclusions claires et nettes sur le comportement post-pic de notre mélange.

Toutefois, nous pouvons dès maintenant avancer quelques explications quant à cette dispersion. Tout d'abord il ne faut pas oublier que ce béton est à haute performance, c'est pourquoi il faut prévoir que la pente post-pic sera très abrupte. De plus la présence des fibres et leur orientation ne semble pas avoir apporté la même ductilité pour les spécimens de différents rapports d'élancement. Ces fibres sont assez longues (35 mm) et agissent sur les macrofissures or le développement des macrofissures en bande de cisaillement est très sensible à la quantité d'énergie à dissiper. L'absence totale de comportement post-pic observée lors des essais de rapport d'élancement égal à 4 peut justement s'expliquer par une trop grande quantité d'énergie de déformation à dissiper. Si de plus on tient compte du fait que la presse emmagasine elle aussi une grande quantité d'énergie élastique, on obtient un système beaucoup trop instable. Si on reste dans le cas linéaire, pour deux spécimens de même section mais de longueur simple au double, on

applique la même force donc le déplacement  $\delta$  est double et donc l'énergie élastique est aussi doublée :

$$E_{\text{élastique}} = \frac{1}{2}k\delta^2 \quad (5.1)$$

Avec la raideur  $k = \frac{EA}{L}$ , où  $E$  est le module d'Young et  $A$  est l'aire. Ces deux valeurs sont communes aux deux spécimens.  $L$  est la longueur. S'il n'y a que la longueur qui diffère entre les deux spécimens avec  $L_2 = 2L_1$  alors  $k_2 = \frac{k_1}{2}$  et  $\delta_2 = 2\delta_1$  donc  $E_{\text{él. 2}} = 2E_{\text{él. 1}}$ . La rupture devient alors beaucoup plus fragile et l'action des fibres est réduite à zéro car elles n'ont pas le temps de se mettre à l'œuvre. La courbe contrainte-déformation est alors semblable à celle du verre ou de la céramique, c'est-à-dire que la courbe s'arrête nette au pic de contrainte. Ces résultats sont assez décevants puisque nous n'avons pas la possibilité de juger du post-pic pour la plupart des spécimens longs. Ceci montre aussi que l'obtention du comportement post-pic pour des spécimens élancés ne doit pas être effectuée de la même manière que pour les spécimens plus courts malgré la présence de fibres.

Nous sommes conscients que ceci aurait pu être évité en changeant nos conditions de chargement. Par exemple on aurait pu diminuer encore d'avantage la vitesse de chargement à l'approche du pic. Ou encore on aurait pu mettre en place un contrôle sur une combinaison du déplacement et de la force comme proposé par Jansen et Shah (1997). À l'avenir, cela nous permettrait éventuellement d'observer la présence de « *snap-back* », ce qui était impossible avec les paramètres de chargement que nous avons choisis. Cependant nous tenions à tout prix à garder les mêmes conditions de chargement sur l'ensemble du programme expérimental et comme nous avons commencé notre programme par les spécimens de rapport d'élancement de 2 sur la presse MTS de 12 MN (courbes de gauche des Figure 5.6, Figure 5.7 et Figure 5.8), sans le vouloir nous avons commencé par les essais qui ont présenté le comportement le plus ductile. Il était alors difficile de changer les conditions de chargement après les 9 premiers échantillons. De plus nous pensions que les fibres allaient apporter plus de ductilité et modifier de façon plus significative le comportement post-pic de notre mélange par rapport à un BHF standard, ce qui n'a malheureusement pas été le cas.

Cependant les spécimens longs cylindriques CYL\_D300\_L1200 ont tout de même présenté un comportement « ductile ». Ils constitueront un bon point de comparaison entre les spécimens courts et longs pour le comportement post-pic. On pourra ainsi mettre en évidence une éventuelle localisation de la fissuration comme l'avait fait Van Mier (1984) (Figure 2.10).

Nous définissons plus loin un comportement pseudo-fragile. Il s'agit des spécimens qui ont présenté des signes avant-coureurs de rupture. En effet, contrairement aux spécimens fragiles, on a observé et entendu le début de la fissuration avant la perte totale de la charge. On a pu tracer quelques points après le passage du pic sur la courbe force-déplacement de la presse. Nous pensons que pour ces spécimens une simple diminution de la vitesse de chargement aurait pu être bénéfique de façon à laisser le temps au front de fissure d'avancer et de dissiper toute l'énergie élastique emmagasinée. Ainsi on aurait pu obtenir une plus grande partie de la courbe post-pic.

Enfin ces courbes issues de la presse ne sont là que pour confirmer les modes de ruptures que nous allons présenter au paragraphe suivant. Elles ne peuvent pas être prises pour tracer la courbe contrainte-déformation intrinsèque du matériau puisque le capteur de déplacement de la presse mesure plus que la déformation du spécimen. Il englobe aussi une partie de la déformation élastique des éléments de la presse, notamment la cellule de charge qui peut s'apparenter à un ressort très rigide. Ceci apporte une souplesse supplémentaire au système presse/échantillon qui est difficile à estimer et qui vient quelque peu fausser les mesures de déformation du matériau. Pour un tracé précis des courbes contrainte-déformation nous avons utilisé la moyenne des jauges de déformation longitudinale Nord et Sud pour la phase pré-pic. Ensuite pour les spécimens qui ont présenté une phase post-pic, nous avons utilisé les mesures fournies par certains capteurs LP bien choisis. Nous expliquerons ce choix au paragraphe 5.7.4.

### **5.7.3 Types de rupture observés**

Nous présentons ici un tableau récapitulatif qui classe les spécimens en fonction du type de rupture observé (Tableau 5.2). Nous définissons trois grands types de rupture à savoir fragile, pseudo-fragile et ductile. Ils sont définis respectivement par l'absence totale, la présence partielle et la présence complète d'une courbe post-pic. La différence entre une rupture fragile et une rupture pseudo-fragile peut aussi être définie par la présence de signes prédisant la rupture. En effet, pour les ruptures fragiles, aucun signe avant-coureur de la rupture n'a pu être observé. Elle se produit

très brutalement sans apparition de microfissures au préalable. Pour les ruptures pseudo-fragiles, on a pu observer ou entendre l'apparition de fissures. Le pic est dépassé et la rupture survient après l'obtention de quelques points post-pic. Une rupture ductile est caractérisée par la présence d'une contrainte résiduelle après de grandes déformations.

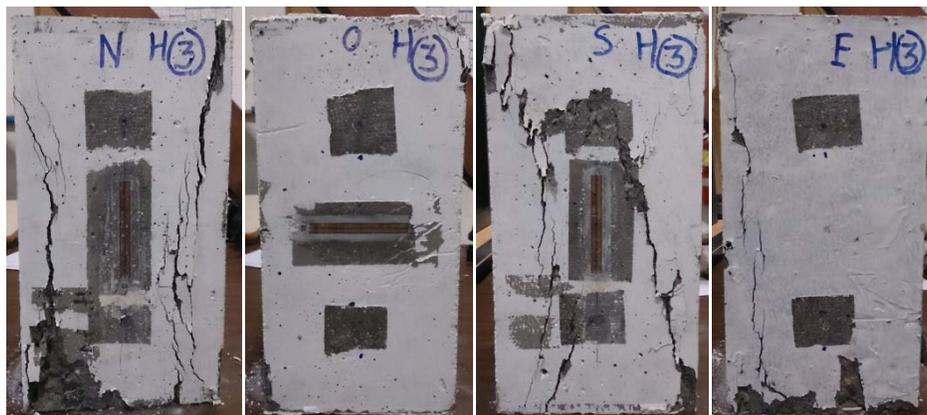
Nous classons aussi les spécimens en fonction de la fissuration observée. En effet pour les ruptures fragiles, par exemple, nous avons observé en règle générale des ruptures très nettes en bande de cisaillement. Cependant pour les spécimens CARH\_D150\_L300-1 et 2, des ruptures plus proches du fendage avec plusieurs fissures quasiment verticales ont pu être observées. Pour les deux autres modes de rupture, pseudo-fragile et ductile, nous séparons les spécimens en fonction de la localisation plus ou moins précise de la fissuration. Certains spécimens ont présenté une macrofissure unique en bande de cisaillement alors que d'autres ont présenté une macrofissuration moins précise, avec plusieurs fronts de fissures et de manière plus tortueuse. Ceci nous mène alors à identifier 6 modes de ruptures différents. La Figure 5.12 à la Figure 5.17 présentent des photos (dans l'ordre Nord, Ouest, Sud et Est) de spécimens correspondant à chaque mode de rupture.

**Tableau 5.2 - Récapitulatif des modes de ruptures**

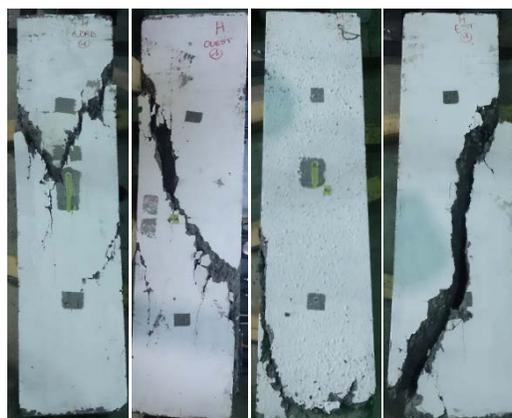
	Types de ruptures					
	Fragile		Pseudo-fragile		Ductile	
	Proche du fendage	En bande de cisaillement	Macrofissure localisée	Plusieurs macrofissures	Macrofissure localisée	Plusieurs macrofissures
Sections carrées coulées horizontalement	CARH_A150_L300-1 CARH_A150_L300-3	CARH_A150_L600-1 CARH_A150_L600-2 CARH_A150_L600-3 CARH_A300_L1200-1 CARH_A300_L1200-2 CARH_A300_L1200-3	CARH_A150_L300-2	CARH_A300_L600-1		CARH_A300_L600-2 CARH_A300_L600-3
Sections carrées coulées verticalement		CARV_A300_L1200-1 CARV_A300_L1200-2 CARV_A300_L1200-3	CARV_A150_L600-1 CARV_A150_L600-3	CARV_A150_L600-2	CARV_A150_L300-2 CARV_A150_L300-3	CARV_A150_L300-1 CARV_A300_L600-1 CARV_A300_L600-2 CARV_A300_L600-3
Sections cylindriques coulées verticalement		CYL_D150_L300-3	CYL_D150_L600-2 CYL_D150_L600-3			CYL_D150_L300-1 CYL_D150_L300-2 CYL_D300_L600-2 CYL_D300_L600-3 CYL_D300_L1200-1 CYL_D300_L1200-2 CYL_D300_L1200-3

Si on jette un coup d'œil rapide à ce tableau, on peut voir se dégager une tendance qui voudrait que pour les spécimens coulés verticalement, on obtient plus facilement une rupture ductile que pour les spécimens coulés horizontalement, et ce d'autant plus quand la section est circulaire. Seuls deux spécimens coulés horizontalement se sont comportés de manière ductile. L'influence du sens de coulée semble être aussi plus importante pour les spécimens de petites

sections que pour les spécimens de grandes sections. Si on retourne à nos courbes force-déplacement de la presse et que l'on compare la Figure 5.6 à la Figure 5.7 et la Figure 5.9 à la Figure 5.10, on s'aperçoit qu'il existe un effet d'échelle pour les modes de ruptures. Cela peut s'expliquer par le fait qu'il est plus difficile d'obtenir une orientation préférentielle des fibres dans des gros volumes. Il y aura plus de fibres susceptibles d'être orientées dans le bon sens dans les spécimens CARH\_A300\_L600 que dans les CARH\_A150\_L300. C'est pourquoi pour un même rapport d'élanement on a pu observer une grande différence de ductilité.



**Figure 5.12 – Rupture fragile proche du fendage. Vues de CARH\_A150\_L300-3**



**Figure 5.13 – Rupture fragile en bande de cisaillement. Vues de CARH\_A300\_L1200-1**



**Figure 5.14 - Rupture pseudo-fragile avec une seule macrofissure. Vues de  
CARV\_A150\_L600-1**



**Figure 5.15 - Rupture pseudo-fragile avec plusieurs macrofissures. Vues de CARV\_A150\_L600-2**



**Figure 5.16 - Rupture ductile avec une seule macrofissure. Vues de CARV\_A150\_L300-3**



**Figure 5.17 - Rupture ductile avec plusieurs macrofissures : Vues de CYL\_D300\_L600-3**

### 5.7.4 Courbes contrainte normalisée-déplacement post-pic

Comme nous l'avons dit un peu plus tôt, pour une meilleure représentation du comportement post-pic, il faut regarder les courbes issues des capteurs linéaires LP. Tout d'abord dans la partie pré-pic, les capteurs et les jauges de déformations ont donné des mesures très proches en termes de déformations. Notons au passage que les jauges donnent des valeurs en microdéformation et les capteurs LP fournissent des déplacements en millimètres, nous avons donc divisé les mesures des capteurs LP par leur longueur de jauge pour pouvoir comparer les valeurs des deux dispositifs. Les jauges fournissant des mesures plus exactes, ceci nous a permis d'avoir un contrôle sur les données des capteurs LP et donc de s'assurer que les mesures étaient bonnes jusqu'au pic. Ceci nous a permis de constater qu'en phase pré-pic le champ de déformation est homogène sur toute la hauteur des spécimens et donc qu'il n'y a quasiment pas eu d'effet de « *barreling* »<sup>7</sup>. D'autre part, certains capteurs LP donnaient des valeurs décalées par rapport aux jauges mais avec un décalage qui restait constant le long de la courbe pré-pic. Cela peut s'expliquer par le fait que certains capteurs peuvent se bloquer au début de l'essai (par arc-boutement par exemple). Le comportement du capteur est donc correct mais les valeurs demandaient à être quelque peu corrigées. Au pic, ou peu après le pic, nous perdions les mesures des jauges et seuls les capteurs LP nous fournissaient des données.

Pour établir les courbes post-pic, nous avons pris en compte uniquement les données provenant des capteurs LP dont la plage de mesure chevauchait la macrofissuration (voir Figure 5.18 ci-dessous). Sur cette figure, on voit le cas où il n'y a qu'une seule fissure mais le principe reste le même quand il y en a plusieurs, c'est le déplacement des blocs formés par macrofissuration par rapport aux autres qui nous intéresse. Les autres capteurs LP ont été rejetés car tantôt ils

---

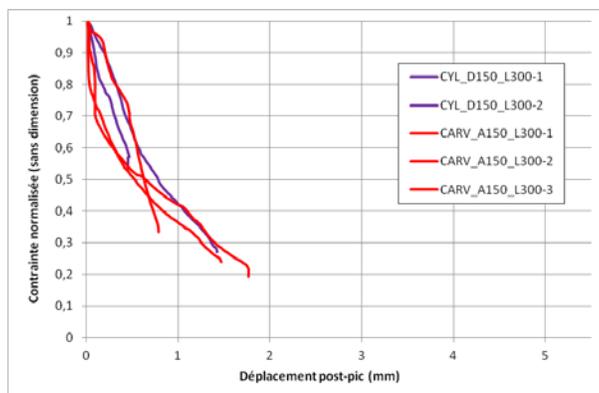
<sup>7</sup> L'effet de « *barreling* » est comme son nom l'indique une déformation globale du spécimen en forme de tonneau (*barrel* en anglais). En présence d'un tel effet les jauges de déformations placées à mi-hauteur du spécimen et mesurant une déformation très locale donneraient des déformations plus petites que les capteurs LP, qui eux donnent une déformation moyenne sur toute leur longueur de jauge ( $L/2$  dans notre cas). Cet effet se produit principalement à l'approche du pic quand le coefficient de Poisson du matériau augmente très fortement et pour des conditions de chargement avec beaucoup de frottement. C'est pourquoi au centre du spécimen la déformation latérale est plus grande qu'aux extrémités. Ainsi cela prouve aussi que les forces de frottement entre nos spécimens et les plaques de chargement n'étaient pas très élevées.

fournissaient des mesures du retour élastique, quand la jauge ne rencontrait aucune fissure, tantôt ils se décollaient à cause du passage de la fissure sous le plot de mesure.

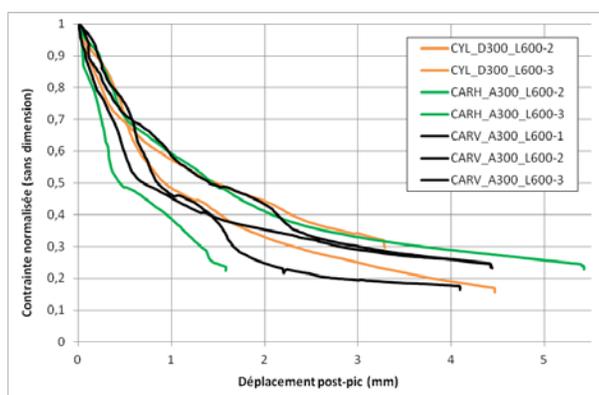


**Figure 5.18 - Prise en compte des données fournies par les capteurs LP en phase post-pic sur la face Nord du spécimen CARV\_A300\_L600-1**

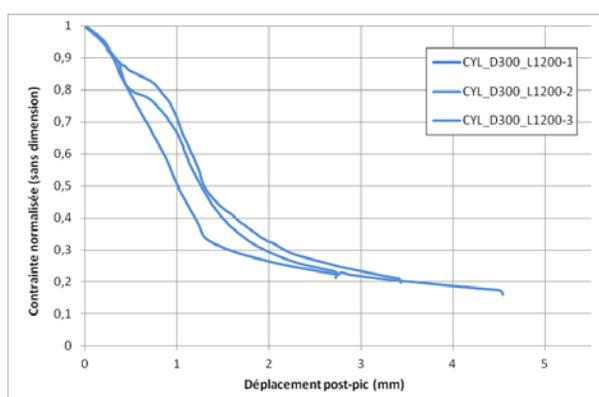
Malgré le fait que nous ayons du rejeter beaucoup de données, nous avons pu tracer les courbes contrainte normalisée ( $\frac{\sigma}{\sigma_0}$ ) vs déplacement post-pic ( $\delta_{total}-\delta_0$ ) en faisant la moyenne des déplacements enregistrés avec minimum deux capteurs LP par spécimen.  $\sigma_0$  et  $\delta_0$  sont la contrainte et le déplacement au pic pour chaque spécimen. Nous présentons donc sur les figures 5.19, 5.20 et 5.21 les courbes post-pic pour les 15 spécimens adoucissants. Nous les avons regroupées par longueur dans un premier temps dans un souci de clarté.



**Figure 5.19 - Courbes contrainte normalisée-déplacement post-pic pour les spécimens de longueur 300 mm**



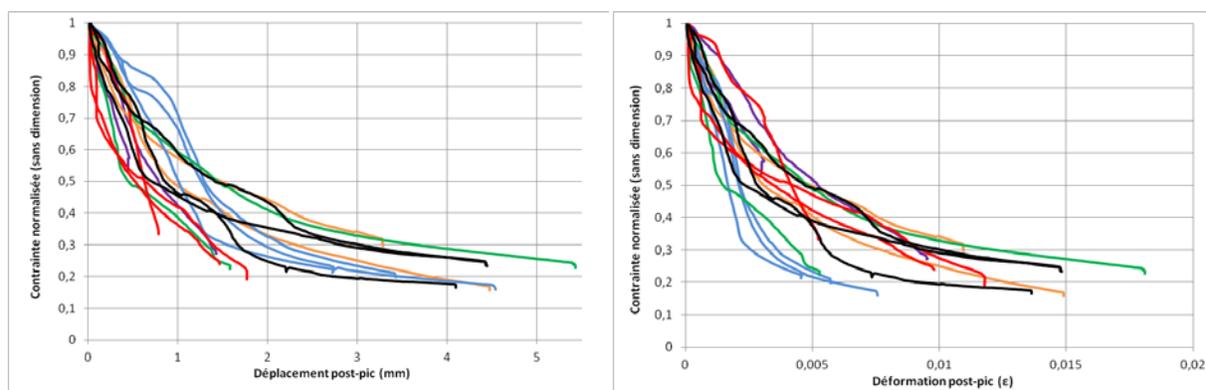
**Figure 5.20 - Courbes contrainte normalisée-déplacement post-pic pour les spécimens de longueur 600 mm**



**Figure 5.21 - Courbes contrainte normalisée-déplacement post-pic pour les spécimens de longueur 1200 mm**

Nous constatons que le caractère aléatoire est encore bien présent. Si une de nos conclusions à la suite du Tableau 5.2 pourrait être que les spécimens coulés horizontalement sont plus sensibles à une rupture fragile que les spécimens coulés verticalement, il est assez paradoxal de voir que le spécimen qui a présenté les plus grandes déformations en maintenant une bonne contrainte est le spécimen CARH\_A300\_L600-3.

À la Figure 5.22, nous présentons toutes les courbes sur un même graphique. À gauche les courbes sont tracées avec le déplacement post-pic en ordonnées et à droite avec les déformations post-pic. La Figure 5.22 nous permet de juger de la localisation ou non des déformations. En effet si la localisation était aussi précise que dans les travaux de Van Mier (1984) (Figure 2.10), on verrait une très nette amélioration de la superposition des courbes lorsque l'on passe en déplacement post-pic. Or comme on peut le voir ici, ce n'est pas tout à fait le cas. L'introduction des fibres semble modifier quelque peu les préceptes établis pour les bétons conventionnels. Comme nous l'avons vu au Tableau 5.2, la quasi-totalité des spécimens avec une phase adoucissante ont présenté plusieurs macrofissures. Cela peut donc expliquer pourquoi nous n'observons pas une très bonne superposition. On se retrouve plus dans le cas du modèle de Markeset et Hillerborg (1995) où il faut attribuer une certaine quantité de déformation à la macrofissuration localisée et une autre quantité à une fissuration diffuse s'effectuant sur une bande de matériau.



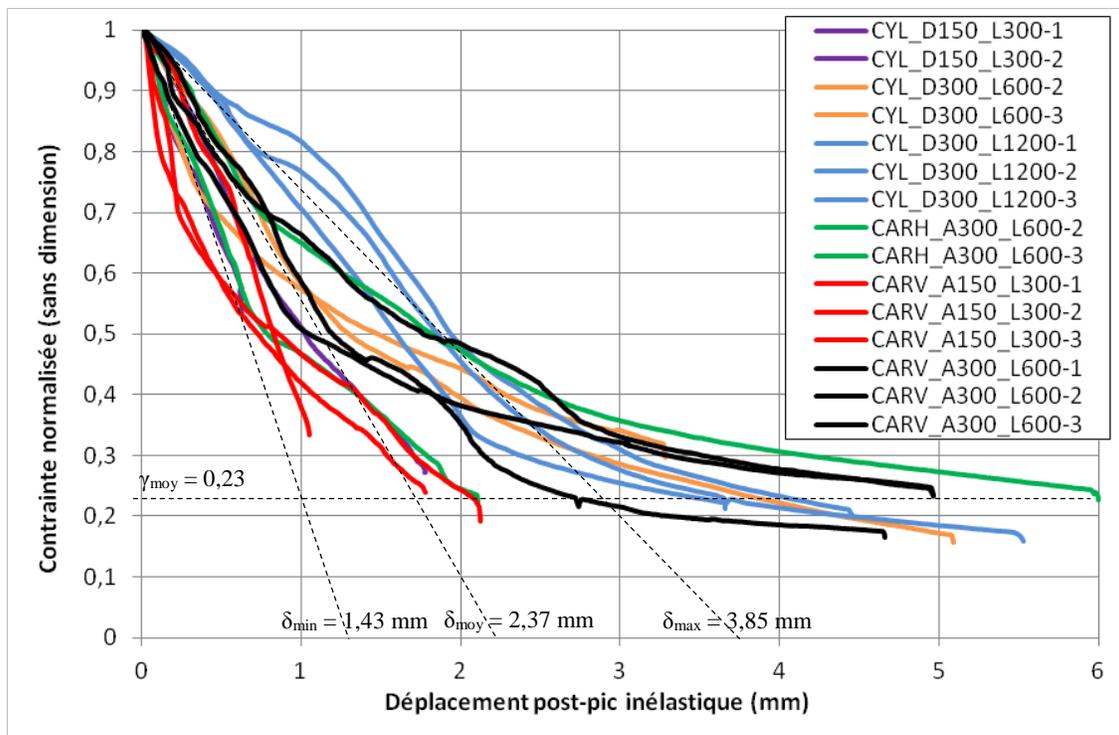
**Figure 5.22 - Comparaison de la superposition des courbes quand on utilise le déplacement post-pic ou la déformation post-pic en ordonnée**

Cependant nous désirons tout de même tirer de notre programme expérimental les valeurs  $\delta$  et  $\gamma$  définis au chapitre 3, dont nous nous servons pour la modélisation d'éléments structuraux élaborés avec notre mélange. C'est pourquoi nous procédons à une dernière modification des

courbes post-pic en prenant en compte la composante due au déchargement élastique comme expliqué au paragraphe 3.2.1. Sur la Figure 5.23, nous définissons donc trois valeurs pour  $\delta$  :  $\delta_{min}$ ,  $\delta_{moy}$  et  $\delta_{max}$ . Nous avons calculé les pentes entre le pic et les valeurs des déplacements à  $0.5 f_c'$ . Pour la valeur  $\gamma_{moy}$ , nous n'avons seulement pris en compte que les spécimens de dimension transversale 300 mm. En effet comme on peut le voir sur la Figure 5.19, les spécimens de petites sections n'ont pas présenté de contrainte résiduelle.

Nous sommes conscients que ces valeurs ne sont pas très représentatives et que de plus amples investigations devraient être menées. Quelques réserves doivent être émises, notamment en ce qui concerne tous les spécimens fragiles ou pseudo-fragiles. Nous pensons que si nous reproduisons notre programme expérimental en appliquant des vitesses de chargement plus faibles ou contrôlées différemment (voir recommandations paragraphe 7.2), nous serions en mesure d'évaluer  $\delta$  pour les spécimens manquants et ainsi dégager des conclusions supplémentaires sur l'orientation des fibres et la localisation des déformations.

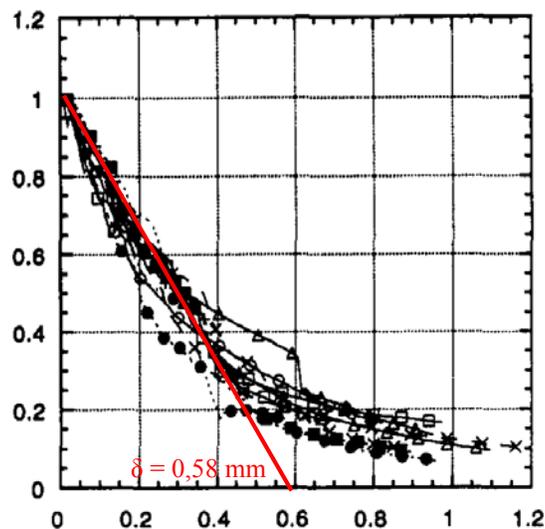
Il faut donc garder à l'esprit que la valeur  $\delta_{moy}$  que nous définissons correspond bien plus aux spécimens CARV\_A300\_L600 et CYL\_D300\_L600 avec des caractéristiques idéales, c'est-à-dire avec un rapport d'élanement proche de 2, une longueur de 600 mm et une orientation favorable des fibres.



**Figure 5.23 – Définition des paramètres  $\delta$  et  $\gamma$  pour le modèle EPM3D**

Sur la Figure 5.24, nous présentons les courbes post-pic de l'article de Jansen et Shah (1997). Le programme expérimental de cet article est très proche du nôtre car les essais sont effectués sur des spécimens élancés ( $h/d$  variant de 2 à 4) et le mélange utilisé est un BHP à 90 MPa. Jansen et Shah effectuent la même modification que nous pour obtenir les déplacements post-pic inélastiques. Cela constitue donc un excellent point de comparaison pour évaluer nos résultats par rapport à un béton non fibré. Ainsi quand on regarde par exemple nos spécimens qui se sont rendus jusqu'à un plateau de contrainte résiduelle, on se rend compte que l'on peut maintenir entre 20 et 30% de la charge maximale ce qui n'est pas le cas dans les essais de Jansen et Shah où la contrainte résiduelle est plus aux alentours de 10% de  $f_c'$ . Pour ce qui est de la localisation, on se rend compte que nos valeurs sont bien plus dispersées et donc que la définition d'un paramètre  $\delta$  pour le béton fibré est moins évidente. On peut noter que  $\delta_{min} = 1.43$  mm pour notre BRF 80 MPa est tout de même bien plus grand que celui du BHF 90 MPa qui vaut environ 0.58 mm.

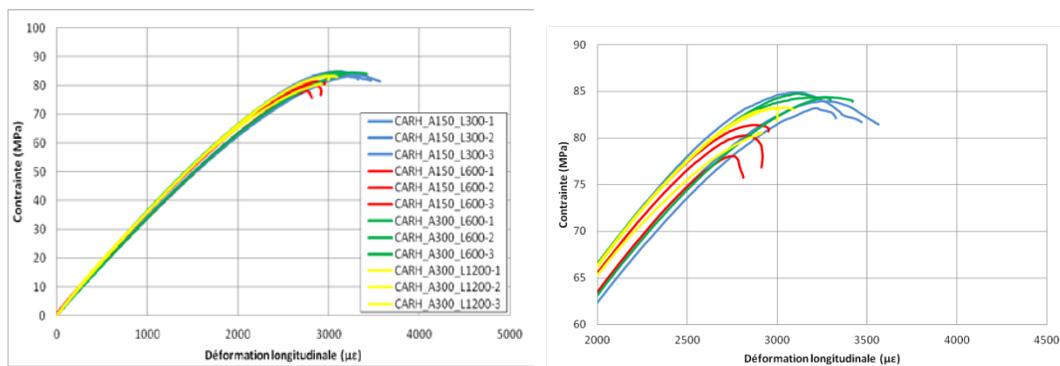
Cependant nous ne pouvons pas conclure avec certitude que l'introduction des fibres apporte un tel niveau de ductilité car nos résultats restent basés seulement sur les spécimens qui ont effectivement présentés une phase adoucissante. Il serait intéressant de constater si les spécimens coulés horizontalement fournissent des valeurs plus proches d'un béton non fibré.



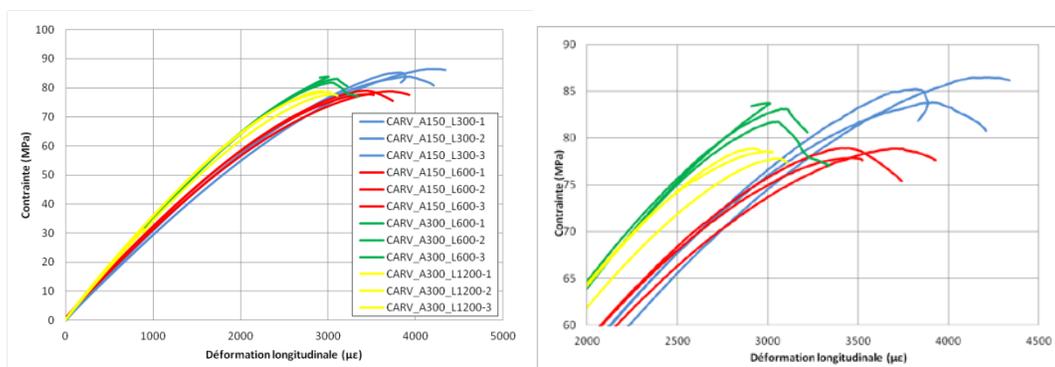
**Figure 5.24 - Courbes contrainte normalisée-déplacement post-pic inélastique pour des spécimens de rapports d'élançement de 2 à 4 avec un BHF de 90 MPa (Jansen et Shah, 1997)**

### 5.7.5 Effet notable sur la phase pré-pic

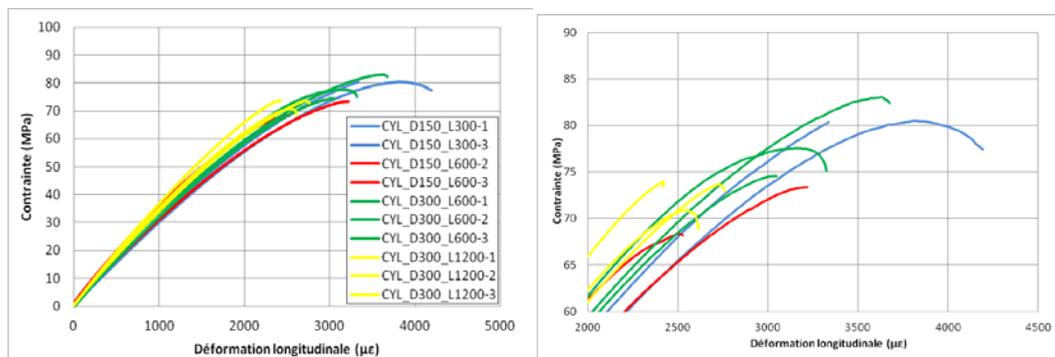
Les courbes contrainte-déformation pré-pic mesurées à l'aide des jauges de déformation sont présentées ci-dessous sur la Figure 5.25, la Figure 5.26 et la Figure 5.27. On les a regroupées par type de spécimen. Le graphique de droite est juste un zoom de celui de gauche au niveau du pic. Les échelles et les bornes sont toutes les mêmes ce qui permet une comparaison facile. On peut se rendre compte que pour les spécimens coulés verticalement (section carrée et cylindrique) la dispersion au niveau du pic est plus grande que pour les spécimens coulés horizontalement. De plus il semblerait que l'effet d'échelle soit plus prononcé. Cependant nous n'effectuerons par plus de commentaires sur ces courbes car nous n'avons pas trouvé d'explications. Nous les présentons juste à titre indicatif.



**Figure 5.25 - Courbes contraintes-déformations pré-pic pour les spécimens de section carrée coulés horizontalement**



**Figure 5.26 - Courbes contraintes-déformations pré-pic pour les spécimens de section carrée coulés verticalement**



**Figure 5.27 - Courbes contraintes-déformations pré-pic pour les spécimens de section cylindrique coulés verticalement**

## CHAPITRE 6 CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS

### 6.1 Recommandations sur l'évolution possible du modèle *EPM3D* en compression post-pic

On a vu que le modèle était capable de tenir compte de manière satisfaisante de l'effet du confinement, actif ou passif et de l'effet de localisation des déformations. De plus le limiteur de localisation basé sur la modification du module d'adoucissement en fonction de la taille du maillage permet d'obtenir une quasi-indépendance du maillage que ce soit en compression uniaxiale ou en compression multiaxiale.

Cependant d'importantes simplifications ont du être mises en œuvre. Tout d'abord nous considérons que le coefficient de la pente post-pic est entièrement dû à la propagation d'une microfissure en cisaillement. C'est ce qui nous permet de définir une énergie de rupture en compression en intégrant la courbe contrainte- ouverture de fissure en compression. Nous faisons un parallèle direct avec ce qui peut se faire en traction. Cependant on a vu notamment avec le modèle de Markeset et Hillerborg (1995) qu'une partie de la courbe post-pic est en réalité due à la propagation des fissures de fendages. Ces fissures sont réparties sur un volume donné de l'échantillon et donc au sein de ce volume la loi post-pic doit encore être exprimée en fonction des déformations. Si l'on veut prendre en compte la participation des fissures de fendages sur le comportement post-pic dans une analyse par éléments finis, nous sommes dans l'obligation de changer de limiteur de localisation et sûrement d'adopter l'un des limiteurs de la deuxième ou troisième catégorie définies au paragraphe 2.4.3. Ceci nécessite alors de modifier non seulement le modèle mais aussi de sortir du cadre standard de la théorie locale de la mécanique des milieux continus. Ibrahimbegovic (2006) affirme que les limiteurs de localisation qui « enrichissent » le cadre de la théorie locale comme ceux proposés dans les articles de Simo et al. (1993) ou de Ortiz et al. (1987) sont aujourd'hui les plus utilisés. Il serait alors intéressant à l'avenir d'essayer de les mettre en place.

Cependant le but premier de ce mémoire étant de rendre plus adéquate la modélisation de poteaux en béton armé, l'aspect de la compression uniaxiale ou avec faible confinement (dans le cas de poteaux faiblement armés) est passé au second plan.

De même dans un futur proche, on pourrait adopter complètement le modèle de compression post-pic proposé par Samani et Attard (2012). Ce modèle comprend l'influence de tous les paramètres que nous avons pu présenter au chapitre 2 et notamment prend en considération la présence des fissures de fendage. Ce sera alors à nous de le rendre complètement exploitable dans une analyse par éléments finis avec un nouveau limiteur de localisation. De plus, notre définition de la courbe post-pic à l'aide d'une fonction linéaire et d'un plateau constant de contrainte résiduelle est pratique car elle simplifie grandement les équations et a le mérite d'être très facilement compréhensible, mais elle reste cependant très primaire et loin de la forme réelle de la courbe. Ainsi avec l'adoption d'une fonction puissance (Samani et Attard, 2012) ou une fonction exponentielle (Binici, 2005), on aurait une forme de courbe plus esthétique et plus fidèle à la réalité.

De plus on a vu que la définition du paramètre  $\delta$ , correspondant à la définition de l'énergie de compression uniaxiale, était sujet à débat. On pourrait alors constituer une base de données des différents essais de compression uniaxiale de la littérature afin de mettre au point une relation tenant compte non seulement du matériau (quantités des composants du mélange, résistance en compression, diamètre du plus gros granulat, etc.) au même titre que les relations existantes en traction, mais aussi des conditions limites (frottement avec les plaques de chargement, présence de rotule de chargement, etc.). Ce travail a été amorcé dans l'article de Samani et Attard (2012). De même, les essais où l'on applique des déplacements suffisamment grands pour obtenir la contrainte résiduelle sont trop peu nombreux et il faudra attendre de voir les résultats publiés dans les années futures pour savoir si l'on doit adopter une relation pour  $\gamma_u$  et/ou modifier la relation de  $\gamma$  en présence de confinement.

Pour certains la contrainte résiduelle n'existe pas même en cas de confinement. Il est vrai que notre modèle de contrainte résiduelle constante non nulle, même pour une déformation qui tend vers l'infini, est très théorique. En réalité on sait bien que la contrainte va continuer à diminuer lentement jusqu'à devenir nulle si on va très loin en déformation. Il faudrait donc peut-être soit définir une déformation maximale dans notre modèle constitutif, soit utiliser une fonction linéaire avec un faible coefficient qui décroît lentement vers 0 pour la partie contrainte résiduelle plutôt qu'un plateau.

## **6.2 Conclusions sur le programme expérimental**

Ce programme expérimental nous a permis tout d'abord de réaliser la fabrication de nos spécimens dans des conditions industrielles. À la vue des résultats pour la partie pré-pic, nous pouvons conclure que la composition de béton élaborée grâce aux travaux d'Androuët (2013) a rempli sa mission, à savoir obtenir un mélange stable et homogène peu importe le volume et la forme des échantillons. La résistance visée était de 80 MPa ce qui a été confirmé par les résultats avec une faible dispersion ( $\pm 5$  MPa maximum).

En ce qui concerne le déroulement des essais de compression, nous avons pu mettre en évidence des tendances sans pouvoir les quantifier réellement. Tout d'abord, il semblerait que l'influence du sens de coulée et donc de l'orientation des fibres se fasse plus sentir sur les spécimens de petites sections que sur les plus gros spécimens en ce qui concerne le mode de rupture. Il y aurait donc un effet d'échelle qui n'a pas pu être évalué.

Une analyse sur les modes de rupture nous a permis de mettre en évidence que les échantillons coulés verticalement ont un meilleur comportement en règle générale que ceux coulés horizontalement. Ces derniers ont rompu de manière très fragile et leur comportement se rapprocherait plus d'un béton non fibré à haute performance. La forme de la section, circulaire ou carrée, a peu d'influence sur les valeurs des déplacements post-pic. Cependant une section circulaire semble favoriser la rupture ductile. Enfin la principale observation que l'on peut retenir est le caractère très aléatoire des courbes post-pic et la remise en question d'une localisation des déformations pour un béton fibré.

## **6.3 Recommandations pour un éventuel futur programme expérimental de compression post-pic sur un BRF**

Malheureusement nous avons effectué plusieurs erreurs à ne pas reproduire pour obtenir les courbes post-pic pour l'ensemble des spécimens. Notamment nous avons pu tirer très peu d'informations des essais sur les spécimens de rapport d'élancement égal à 4. Certes ces erreurs auraient pu être évitées, notamment en diminuant drastiquement la vitesse de chargement aux abords du pic et en adoptant un chargement contrôlé par une combinaison de la force et du

déplacement de la presse comme utilisé par Jansen et Shah (1997). Ainsi nous aurions pu enregistrer un éventuel « *snap-back* » (retour en arrière).

Cependant nous pensions que l'effet des fibres présentes dans le mélange aurait été bien plus prononcé et nous ne nous attendions pas à observer du *snap-back* même pour les spécimens les plus élancés. À cause de la grande résistance du béton (80 MPa), il semblerait que l'énergie de rupture soit trop grande pour être dissipée par le béton et les fibres. Les efforts qui s'appliquent sont trop grands et trop brusques pour que les fibres aient le temps de les retenir. Il faudrait refaire quelques essais en diminuant la résistance de notre béton.

De plus nous pensons que les futurs essais de compression post-pic sur des mélanges de bétons fibrés doivent se faire avec la présence de confinement. En effet nos résultats nous poussent à croire que la présence de fibres se fera d'autant plus sentir en cas de confinement notamment pour la contrainte résiduelle. Ainsi l'apport de ductilité par les fibres ne sera vraiment significatif qu'en présence d'un nombre minimum d'étriers dans le spécimen. Elles pourraient alors mieux s'opposer à la propagation de la macrofissure de cisaillement.

Par conséquent nous pensons que l'équation du paramètre  $\kappa$  traduisant l'effet du confinement sur la pente post-pic sera quelque peu différente pour un BRF par rapport à un béton non fibré. Nous supposons que le paramètre tendra encore plus vite vers 0 (état de transition) et ce d'autant plus que le pourcentage de fibres dans le mélange sera élevé.

De plus nous sommes conscients que la longueur des fibres utilisées dans notre programme expérimental (35 mm) n'est pas forcément appropriée pour rendre le béton plus ductile. Ces fibres longues ont besoin d'une assez grande ouverture de fissure pour entrer pleinement en action. Dans le cas d'un BFUP avec des fibres courtes (environ 10 mm), on observerait un gain de ductilité bien plus significatif. Il faudrait peut-être adapter la composition de ce mélange en utilisant un « cocktail » de fibres de deux longueurs différentes.

## RÉFÉRENCES

ABAQUS (2011). *Abaqus v6.11 Analysis User's Manual*, SIMULIA, Dassault Systèmes.

Ahmad, et Shah, S.P. (1986). « Orthotropic model of concrete for triaxial stress. » *Journal of Engineering Structural Division*, ASCE, vol. 108, 728-742.

Androuët, C., Massicotte, B. et De Broucker, W. (2013). *Développement d'un béton renforcé de fibres métalliques*, Rapport interne EPM-GRS-BRF80-BPDL-1.1, École Polytechnique de Montréal.

ASCE TASK COMMITTEE ON CONCRETE AND MASONARY STRUCTURES (1982). *State-of-the-art report on finite element analysis of reinforced concrete*, ASCE, Special Publication.

Ashby, M.F. et Hallam, S.D. (1986). « The failure of brittle solids containing small cracks under compressive stress states. » *Acta Metallurgica*, vol. 34, n°3, 497-510.

Attard, M.M. et Setunge, S. (1996). « Stress-strain relationship of confined and unconfined concrete. » *ACI Materials Journal*, vol. 93, n°5.

Barenblatt, G.I. (1962). « The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. » *Advances in Applied Mechanics*, vol. 7, 55-129.

Bazant, Z. (1989). « Identification of strain softening constitutive relation from uniaxial tests by series coupling model for localization. » *Cement and Concrete Research*, vol. 19, 973-977.

Bazant, Z. (1993). « Size effect in tensile and compressive quasibrittle failure. » *Proceeding of International Work Shop – Size effect in structure*, éd. par Mihashi, Okamura et Bazant, E&FN Spon, Japon, 161-180.

Bazant, Z. et Bhat, P. (1976). « Endochronic theory of inelasticity and failure of concrete. » *Journal of Engineering Mechanical Division*, ASCE, vol.102, 701-722.

Bazant, Z. et Kim, S.S. (1979). « Plastic fracturing theory for concrete. » *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, vol. 109, 69-82.

Bazant, Z. et Lin, F. (1988). « Non-local yield limit degradation. » *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 26, 1805-1823.

Bazant, Z. et Oh, B. (1983). « Crack band theory for fracture of concrete. » *Materials and Structures*, RILEM, vol. 16, 155-177.

Bazant, Z. et Pijaudier-Cabot, G. (1988). « Non local continuum, localization instability and convergence », *Journal of Applied Mechanics*, ASME, vol.55, n°2, 287-293.

Bhattacharjee, S.S. (1993). *Smearred fracture analysis of concrete gravity dams for static and seismic loads*, Ph.D., École Polytechnique de Montréal.

Belytschko, T., Liu, W. K., et Moran, B. (2000). *Nonlinear finite elements for continua and structures*, Chichester, John Wiley & Sons.

Ben Ftima, M. et Massicotte, B. (2004). *Introduction du modèle de Bouzaiene et Massicotte (1995) dans ABAQUS (Version 6.4.1 Standard et Explicit)*. Rapport interne, École Polytechnique de Montréal.

Ben Ftima, M. (2005). *Comparaison des trois logiciels d'éléments finis : Ansys, Adina, et Abaqus*, Rapport interne, École Polytechnique de Montréal.

Ben Ftima, M. (2013). *Utilisation de la méthode des éléments finis non-linéaire pour la conception des structures en béton armé : Applications aux structures massives*, Ph.D., École Polytechnique de Montréal.

Binici, B. (2005). « An analytical model for stress-strain behaviour of confined concrete. » *Engineering Structures*, vol. 27, n°7, 1040-1051.

Bouzaiene, A. (1995). *Caractérisation et modélisation du comportement non linéaire d'éléments en béton armé et non armé sous sollicitations multiaxiales*. Ph.D., Département des génies civil, géologique et des mines, École Polytechnique de Montréal, Rapport n° EPM/GCS-1995-13.

Bouzaiene, A et Massicotte, B. (1997). « Hypoelastic tridimensional model for non proportional loading of plain concrete. » *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, vol. 123, n°11, 1111-1120.

CEB-FIP. *Model Code 2010-first complete draft*. Fédération Internationale du Béton fib/International Federation for Structural Concrete, 2010.

Craveur, J.-C. et Jetteur, P. (2010). *Introduction à la mécanique non linéaire : Calcul des structures par éléments finis*, Dunod, Paris.

Crisfield, M.A. (1984). « Difficulties with current numerical models for reinforced concrete and some tentative solutions. » *Computer aided analysis and design of concrete structure*, éd. par Damjanic et al., Pineridge Press, Swansea, UK, 331-358.

Cusson, D., De Larrard, F., Boulay, C. et Paultre, P. (1996). « Strain localization in confined high-strength concrete columns. » *Journal of Structural Engineering*, vol. 122, 1055-1061.

Cusson, D. et Paultre, P. (1994). « High-strength concrete columns confined by rectangular ties. » *Journal of Structural Engineering*, vol. 120, n°3, 783-804.

Cusson, D. et Paultre, P. (1995). « Stress-strain model for confined high-strength concrete. » *Journal of Structural Engineering*, vol. 121, n°3, 468-477.

Dahlblom, O. et Ottosen, N. (1990). « Smeared crack analysis using generalized fictitious crack model. » *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, vol. 116, 55-76.

Darwin, D. et Pecknold, D. (1977). « Nonlinear biaxial stress-strain law for concrete. » *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, vol. 103, 229-241.

De Borst, R. (1987). « Computation of post-bifurcation and post-failure behaviour of strain-softening solids. » *Computer & Structures*, vol. 25, n°2, 211-224.

De Broucker, W. (2013). *Étude du comportement en flexion et à l'effort tranchant de poutres précontraintes en BRF*, M.Sc.A., École Polytechnique de Montréal.

de Larrard, F. et Rossi, P. (1988). « Le flambement à deux échelles dans la rupture du béton en compression. » *Bulletin de Liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, n°154.

de Montaignac, R. (2011). *Analyse du comportement d'éléments fléchis en béton renforcé de fibres métalliques : du matériau à la structure*, Ph.D., École Polytechnique de Montréal.

Dugdale, D.S. (1960). « Yielding of steel sheets containing slits. » *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 8, 100-108.

Dupray, F., Malecot, Y., Daudeville, L. et Buzaud, E. (2009). « A mesoscopic model for the behaviour of concrete under high confinement. » *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 33, 1407-1423.

Elwi, A. et Murray, D. (1979). « A 3D hypoelastic concrete constitutive relationship. » *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, vol. 106, 1383-1403.

Flanagan, D. et Belytschko, T. (1981). « A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control. » *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 17, 679-706.

Gobbi, M.E. et Ferrara, G. (1995). « Strain-softening of concrete under compression. » *Report to RILEM Technical Committee 148-SSC, ENEL-CRIS Milano*.

Griffith, A.A. (1921). « The phenomena of rupture and flow in solids. » *Philosophical transactions of the royal society of London : Series A, containing papers of a mathematical or physical character*, 163-198.

Han, D.J. et Chen, W.F. (1985). « A nonuniform hardening plasticity model for concrete materials. » *Mechanics of Materials*, vol. 4, 283-302.

Hibbitt, H.D.; Karlson, B.I.; Sorensen, E.P. (2011), ABAQUS version 6.11, finite element program. Hibbitt, Karlson and Sorensen, Providence, R.I., USA.

Hillerborg, A. (1989). « Size dependency of stress-strain curve in compression. » *Analysis of concrete structures by fracture mechanics*, RILEM, Proceeding 6, éd. par Elfgren and Shah, 171-178.

Hillerborg, A., Modeér, M. et Peterson, P.-E. (1976). « Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. » *Cement and Concrete Research*, vol. 6, 773-782.

Horii, H. et Nemat Nasser, S. (1985). « Compression-induced microcrack growth in brittle solids : Axial splitting and shear failure. » *Journal of Geophysical Research*, vol. 90, 3105-3125.

Horii, H. et Nemat Nasser, S. (1986). « Brittle failure in compression : Splitting, faulting and brittle-ductile transition. » *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences*, vol. 319, n°1549, 337-374.

Hulburt, B. (1985). *Experimental and computational strain-softening investigation of concrete*, M.Sc.A., Civil Engineering Department, University of Colorado, Boulder.

Hsieh, S., Ting, E. et Chen, W. (1982). « A plasticity-fracture model for concrete. » *International Journal of Solids and Structures*, vol. 18, 181-197.

Ibrahimbegovic, A. (2006). *Mécanique non linéaire des solides déformables : formulation théorique et résolution numérique par éléments finis*. Hermès Sciences Publications, Lavoisier, Paris.

Irwin, G.R. (1957). « Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. » *Journal of Applied Mechanics*, vol. 24, 361-364.

Jansen, D.C. et Shah, S.P. (1997). « Effect of length on compressive strain-softening of concrete. » *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, vol. 124, n°1, 25-35.

Kotsovos, M. D. (1980). « A mathematical model of the deformational behavior of concrete under generalised stress based on fundamental material properties. » *Materials and Structures*, vol. 13, n°4, 289-298.

Kotsovos, M.D. (1983). « Effects of testing techniques on the post-ultimate behaviour of concrete in compression. » *Materials and Structures*, vol. 16, 3-12.

Lacroix-Sauvageau, M., Androuët, C. et Charron, J.-P. (2010). *Vérifications d'une technique de formulation des bétons renforcés de fibres métalliques*, Rapport interne, École Polytechnique de Montréal.

Mander, J. B., Priestley, M. J., & Park, R. (1988). « Theoretical stress-strain model for confined concrete. » *Journal of structural engineering*, vol. 114, n°8, 1804-1826.

Markeset, G. et Hillerborg, A. (1995). « Softening of concrete in compression – Localization and size effects. » *Cement and Concrete Research*, vol. 25, 702-708.

Massicotte, B. (2013). *Calcul des structures en béton armé – Concepts de base*, Éditions da Vinci, Laval (Québec) Canada.

Massicotte, B., Nour, A., Ben Ftima, M., Yildiz, E. et Conciatori, D. (2012). *EPM3D-v3.1 – A user-supplied constitutive model for the nonlinear finite element analysis of reinforced concrete structures*, Rapport de recherche SR12-03, École Polytechnique de Montréal.

Murray, D. et al. (1979). « A concrete plasticity theory for biaxial stress analysis. » *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, vol. 105, 989-1006.

Needleman, A. (1988). « Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. » *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 67, 69-85.

Nour, A., Ben Ftima, M. et Massicotte, B. (2005). *A user-supplied constitutive model for the nonlinear finite element analysis of reinforced concrete structures. Part I : Theoretical background*, Rapport interne, École Polytechnique de Montréal.

Ortiz, M., Leroy, Y. et Needleman, A. (1987). « A finite element method for localized failure analysis. » *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 61, 189-214.

Paultre, P. (2005). *Dynamique des structures : applications aux ouvrages de génie civil*, Hermès Sciences Publications, Lavoisier, Paris.

Pijaudier-Cabot, G. et Bazant, Z. (1987). « Nonlocal damage theory. » *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 113, n°10, 1512-1533.

Pramono, E. et Willam, K. (1989). « Fracture energy-based plasticity formulation of plain concrete », *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, vol. 115, 1183-1204.

Prior, A. (1994). « Applications of implicit and explicit finite element techniques to metal forming. » *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 45, n°4, 649-656.

Rashid, Y.R. (1968). « Analysis of prestressed concrete pressure vessels. » *Nuclear Engineering and design*, vol. 7, n°4, 334-344.

Rebelo, N., Nagtegaal, J., Taylor, L., et Passman, R. (1992). « Comparison of implicit and explicit finite element methods in the simulation of metal forming processes. » *Proceedings of the 4th*

*International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes - NUMIFORM '92*, Valbonne, France.

Richart, F., Brandtzaeg, A. et Brown, R. (1928). *A study of the failure of concrete under combined compressive stresses*, Engineering Experiment Station, University of Illinois, bulletin n° 185.

Rokugo, K. et Koyanagi, W. (1992). « Role of compressive fracture energy of concrete on the failure behaviour of reinforced concrete beam. » *Application of fracture mechanics to reinforced concrete*, éd. par Carpenteri, Elsevier applied Science, 437-464.

Rots, J.G. (1988). *Computational modeling of concrete failure*, Ph.D., Delft University of Technology, Delft, Pays-Bas.

Saatcioglu, M. et Razvi, S. (1992). « Strength and ductility of confined concrete. » *Journal of Structural Engineering*, vol. 118, 1590-1607.

Samani, A.K. et Attard, M.M. (2012). « A stress-strain model for uniaxial and confined concrete under compression. » *Engineering Structures*, vol. 41, 335-349.

Schlangen, E. et Van Mier, J.G.M. (1992). « Simple lattice model for numerical simulation of fracture of concrete materials and structures. » *Materials and Structures*, vol. 25, n°9, 534-542.

Sheikh, S.A. et Uzumeri, S.M. (1980). « Strength and ductility of tied concrete columns. » *Journal of the Structural Division*, ASCE 15388 Proceeding, vol. 106, 1079-1102.

Simo, J., Oliver, J. et Armero, F. (1993). « An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids. » *Computational Mechanics*, vol. 12, 277-296.

Smith, S.S., Willam, K.J., Gerstle, K.H. et Sture, S. (1989). « Concrete over the top, or : Is there life after peak ? » *ACI Journal*, vol. 86, 491-497.

Timoshenko, S. et Goodier, J. (1969). *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, New York, 3<sup>ème</sup> édition.  
Tordjman, F. (2012). *Caractérisation mécanique en traction des BRF*, Rapport de maîtrise, École Polytechnique de Montréal.

UNI, EN. (2005). « 14651 : Test method for metallic fiber concrete - Measuring the flexural tensile strength (limit of proportionally (LOP), residual). » *European Committee for Standardization*, vol. 18.

Van Geel, H. (1998). *Concrete behaviour in multiaxial compression*. Ph.D., Eindhoven University of Technology.

Van Mier, J.G.M. (1986). « Multiaxial strain-softening of concrete, Part I : Fracture. » *Materials and Structures*, RILEM, vol. 19, 179-190.

Van Mier, J.G.M. (1998). « Failure of concrete under uniaxial compression : an overview. » *Fracture Mechanics of Concrete Structures : Proceedings FraMCoS-3*, éd. par H. Mihashi et K. Rokugo, Freiburg : AEDIFICATIO, 1169-1182.

Van Mier, J.G.M. (2009). « Mode II fracture localization in concrete loaded in compression. » *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 135, n°1, 1-8.

Van Mier, J.G.M. (2013). *Concrete Fracture : A Multiscale Approach*. CRC Press, Taylor & Francis Group.

Van Mier, J.G.M., Shah, S.P. et al. (1997). « Strain-softening of concrete under uniaxial compression. » *Materials and Structures*, RILEM, vol. 30, n°4, 195-209.

Van Mier, J.G.M., Shah, S.P. et al. (2000). « Test method for measurement of the strain- softening behaviour of concrete under uniaxial compression : Recommendations. » *Materials and Structures*, RILEM, vol. 33, n°230, 347-351.

Van Vliet, M.R.A. et Van Mier, J.G.M. (1996). « Experimental investigation of concrete fracture under uniaxial compression. » *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, vol. 1, n°1, 115-127.

Vonk, R.A. (1992). *Softening of concrete loaded in compression*, Ph.D., Eindhoven University of Technology.

Voisin, O., Androuët, C., Charron, J.-P. et Massicotte, B. (2011). *Développement de deux bétons renforcés de fibres métalliques*, Rapport interne, École Polytechnique de Montréal.

Willam, K., Hurlbut, B. et Sture, S. (1986). « Experimental and constitutive aspects of concrete failure. » *Finite element analysis of reinforced concrete structures*, ASCE Publication, éd. par Meyer and Okamura, 226-254.

Willam, K. et Warnke, E. (1975). « Constitutive model for triaxial behaviour of concrete. » *Proceedings, International Association for Bridge and Structural Engineering*, ISMES, Bergamo, Italie, vol. 19, p. 174.

Wittmann, F. H. (1983). « Structure and mechanical properties of concrete. » *The Architectural Reports of the Tohoku University*, vol. 22, 93-112.

Xie, J., Elwi, A.E. et MacGregor, J. (1995). « Mechanical properties of three high-strength concretes containing silica fume. » *ACI Materials Journal*, vol. 92, n°2.

Yamaguchi, E. et Chen, W. (1990). « Cracking model for finite element analysis of concrete materials » *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, vol. 116, 1242-1260.