PROBLEMAS PARA LA PREPARACIÓN DE LA FASE LOCAL NAVARRA DE LA OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA 2012-2013

"MODO DE EMPLEO"

Como este año no ha habido una sesión específica para álgebra, se recomienda previamente leer los documentos para la preparación de este tema concreto. Nos referimos a los siguientes:

- Polinomios y relaciones de Vieta-Cardano
- Progresiones
- Definición de nuevas variables
- Desigualdades (I)

Se pueden encontrar en la página de la Olimpiada Matemática Española (fase provincial), a través del enlace de Olimpiada Matemática Navarra en la página http://www1.unavarra.es/dep-matematicas.

Los problemas propuestos están divididos en sesiones. Cada sesión es similar a una de las dos pruebas (mañana y tarde) a las que los competidores se enfrentarán en la fase local, de forma que los problemas son variados en tema, y están pensados para que su orden de dificultad sea creciente, el problema 1 más fácil que el 2, y a su vez éste más fácil que el 3 (aunque eso no quiere decir que los alumnos necesariamente encuentren el problema 1 más fácil que el 3).
Para cada sesión, se recomienda elegir un rato de unas 2 horas como mínimo y 4 como máximo, y usando sólo los útiles permitidos en la pruebas (útiles de escritura y de dibujo), intentar solucionar los tres problemas. Se recomienda también escribir todo lo que se pueda ocurrir durante ese rato: observaciones, posibles métodos de ataque, posibles formas de simplificar el problema, herramientas y resultados que puedan ser útiles en su resolución, etc.

En la sesión del día 22 de diciembre, de 10 a 13 horas, se resolverán los problemas de las 4 sesiones. Para intentar obtener el máximo aprovechamiento, se comentarán, bien de forma individual, bien colectiva, todo lo que los competidores hayan realizado y quieran compartir durante esa sesión.

PROBLEMAS PARA LA PREPARACIÓN DE LA FASE LOCAL NAVARRA DE LA OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA 2012-2013

SESIÓN 1

PROBLEMA 1

Sea P una familia de puntos en el plano tales que por cada cuatro puntos de P pasa una circunferencia. ¿Se puede afirmar que necesariamente todos los puntos de P están en la misma circunferencia? Justifica la respuesta.

PROBLEMA 2

Se consideran 17 enteros positivos tales que ninguno de ellos tiene un factor primo mayor que 7. Demuestra que hay al menos una pareja de estos números cuyo producto es un cuadrado perfecto.

PROBLEMA 3

Resolver, en el conjunto de los números reales, el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} y^3-6x^2+12x-8=0 \\ z^3-6y^2+12y-8=0 \\ x^3-6z^2+12z-8=0 \end{array}\right\}$$

PROBLEMAS PARA LA PREPARACIÓN DE LA FASE LOCAL NAVARRA DE LA OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA 2012-2013

SESIÓN 2

PROBLEMA 1

Halla todas las posibles formas de escribir 2012 como suma de dos cuadrados de números enteros positivos. Halla también todas las posibles formas de escribir 2013 como suma de dos cuadrados de números enteros positivos.

PROBLEMA 2

Sea P un punto en el interior del triángulo ABC, de modo que el triángulo ABP verifica $AP=BP$. Sobre cada uno de los otros dos lados de ABC se construyen exteriormente triángulos BQC y CRA, ambos semejantes al triángulo ABP cumpliendo $BQ=QC$ y $CR=RA$. Probar que los puntos P, Q, C y R, o están alineados, o son los vértices de un paralelogramo.

PROBLEMA 3

Un club tiene 25 miembros. Cada comité está formado por 5 miembros. Dos comités cualesquiera tienen como mucho un miembro en común. Prueba que el número de comités no puede ser superior a 30.

PROBLEMAS PARA LA PREPARACIÓN DE LA FASE LOCAL NAVARRA DE LA OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA 2012-2013

SESIÓN 3

PROBLEMA 1

Tenemos un conjunto de 221 números reales cuya suma es 110721. Los disponemos formando una tabla rectangular de modo que todas las filas y la primera y última columnas son progresiones aritméticas de más de un elemento. Probar que la suma de los elementos de las cuatro esquinas vale 2004.

PROBLEMA 2

Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros. Demostrar que si existe un entero k tal que ninguno de los enteros $P(1), P(2),\ldots, P(k)$ es divisible por k, entonces $P(x)$ no tiene raíces enteras.

PROBLEMA 3

Se considera el triángulo ABC y su circunferencia circunscrita. Si D y E son los puntos sobre el lado BC tales que AD y AE son, respectivamente, paralelas a las tangentes en C y en B a la circunferencia circunscrita, demostrar que:

$$\frac{BE}{CD} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

PROBLEMAS PARA LA PREPARACIÓN DE LA FASE LOCAL NAVARRA DE LA OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA 2012-2013

SESIÓN 4

PROBLEMA 1

Una caja contiene 900 tarjetas, numeradas del 100 al 999. Se sacan al azar (sin reposición) tarjetas de la caja y se anota la suma de los dígitos de cada tarjeta extraída. ¿Cuál es la menor cantidad de tarjetas que se deben sacar, para garantizar que al menos tres de esas sumas sean iguales?

PROBLEMA 2

Demostrar que, para todo real $a \geq -3/4$, la suma

$$\sqrt[3]{\frac{a+1}{2}+\frac{a+3}{6}\sqrt{\frac{4a+3}{3}}}+\sqrt[3]{\frac{a+1}{2}-\frac{a+3}{6}\sqrt{\frac{4a+3}{3}}}$$

es independiente del valor de a, y hallar el valor de dicha suma.

PROBLEMA 3

Demostrar que si entre los infinitos términos de una progresión aritmética de números enteros positivos hay un cuadrado perfecto, entonces infinitos términos de la progresión son cuadrados perfectos.