

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Sede Amministrativa della Scuola di Dottorato di Ricerca

Posto di Dottorato attivato grazie al contributo dell'Istituto Ortopedico Rizzoli di Bologna

**XXII CICLO DELLA SCUOLA DI DOTTORATO DI RICERCA IN
INGEGNERIA CIVILE E AMBIENTALE**

INDIRIZZO: INGEGNERIA DELLE STRUTTURE

SVILUPPO, VALUTAZIONE E APPLICAZIONE DI METODI NUMERICI ALTERNATIVI AL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI IN PROBLEMI DI BIOMECCANICA ORTOPEDICA

Settore Scientifico Disciplinare ICAR/08

DOTTORANDO

ING. MARTINO PANI

RESPONSABILE DOTTORATO DI RICERCA

PROF. IGINIO MARSON

RELATORE

PROF. ENZO TONTI

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

ANNO ACCADEMICO 2008/2009

Indice

Introduzione	1
1 La creazione di modelli numerici <i>subject-specific</i> di segmenti ossei	7
1.1 Scopi e ragioni dell'analisi	7
1.2 Criteri di applicabilità	8
1.3 La definizione di un modello	9
1.3.1 La Tomografia Computerizzata (CT)	10
1.3.2 La costruzione della mesh dai dati CT	14
1.3.3 Definizione delle proprietà meccaniche	18
1.3.4 I problemi dell'approccio FEM mesh	22
2 Il Metodo delle Celle	25
2.1 Le variabili fisiche	26
2.1.1 Costanti e variabili	26
2.1.2 Classificazione in base alle entità geometriche di riferimento	27
2.1.3 La classificazione delle variabili in base al ruolo	28
2.2 L'orientazione degli elementi spaziali	30
2.2.1 Orientazione interna degli elementi spaziali	30
2.2.2 Orientazione esterna degli elementi spaziali	30
2.3 L'orientazione degli elementi temporali	33
2.3.1 Orientazione interna	33
2.3.2 Orientazione esterna	33
2.4 Attribuzione delle variabili agli elementi geometrici	35
2.5 I complessi di celle	36
2.6 Impostazione del problema con il Metodo delle Celle	39
2.6.1 Equazioni di struttura	39
2.6.2 Equazioni costitutive	41
2.6.3 I diagrammi di Tonti	42

3	Formulazione quadratica con il Metodo delle Celle	47
3.1	Problemi scalari tridimensionali	48
3.1.1	Interpolazione quadratica	48
3.1.2	Test di convergenza	56
3.2	Problemi di elasticità lineare tridimensionali	58
3.2.1	Interpolazione quadratica del campo degli spostamenti . . .	59
3.2.2	Spostamenti - deformazioni	61
3.2.3	Legame sforzi - deformazioni	64
3.2.4	Legame forze - sforzi	65
3.2.5	L'equazione fondamentale: il bilancio delle forze	66
3.2.6	Test numerico	68
4	L'approccio meshless con il Metodo delle Celle	73
4.1	La filosofia dei metodi meshless	73
4.1.1	Utilizzo di approcci meshless in ambito biomeccanico	77
4.2	Meshless a celle locali con il CM	79
4.2.1	Conduzione termica in regime stazionario	83
4.2.2	Sistemi elastici piani in regime di piccoli spostamenti	88
4.3	Interpolazione locale con funzioni polinomiali	93
4.3.1	Campo scalare stazionario	96
4.3.2	Sistemi piani deformabili	106
4.4	Interpolazione locale con funzioni di base radiale	111
4.4.1	Interpolazione RBF di campi scalari	116
4.4.2	Interpolazione RBF di campi vettoriali	123
5	Applicazione esplorativa della formulazione Meshless a celle locali con il Metodo delle Celle	131
5.1	La selezione delle metodologie meshless applicata	133
5.2	Il test esplorativo	137
5.2.1	L'esperimento di riferimento	138
5.2.2	Il dataset CT	141
5.2.3	Il modello FEM subject specific	141
5.2.4	Il modello MCM	143
5.2.5	La definizione delle proprietà materiali	144
5.2.6	Determinazione dell'accuratezza dei modelli numerici	144
5.3	Risultati	146
6	Validazione della formulazione Meshless a celle locali con il Metodo delle Celle	149
6.1	L'esperimento di riferimento	150
6.1.1	Le misure sperimentali	151

6.1.2	I modelli FEM	153
6.1.3	Acquisizione CT, registrazione spaziale e proprietà meccaniche	153
6.1.4	I modelli MCM	155
6.1.5	Definizione dell'accuratezza	155
6.2	Le criticità emerse	156
6.2.1	Attribuzione delle proprietà meccaniche nell'MCM	156
6.2.2	L'individuazione dei valori puntuali di deformazione	160
6.3	Validazione con le misure sperimentali	161
6.4	Comparazione sistematica con modello FEM di riferimento	165
Conclusioni		173
Bibliografia		179

Introduzione

La predizione del rischio di frattura nei tessuti ossei è un tema dalle molteplici ricadute nella pratica clinica sia nell'ambito dei processi di diagnosi che in quelli di prognosi e di definizione di terapie. L'accurata predizione del rischio di frattura può infatti risultare importante nel trattamento dei pazienti osteoporotici, nella pianificazione e nella gestione delle ricostruzioni scheletriche in oncologia pediatrica così come nella pianificazione preoperatoria degli interventi di chirurgia protesica articolare.

La stima del rischio di frattura avviene oggi valutando, con metodologie radiografiche bidimensionali, il contenuto minerale dell'osso in specifici siti anatomici ritenuti significativi; il rischio di frattura è ottenuto tramite inferenze statistiche rispetto al contenuto minerale, ottenendo predizioni il cui grado di attendibilità è dell'ordine del 70%. La frattura è però un evento che si sviluppa nell'osso a livello di organo e in dipendenza di fattori sia interni (quantità di osso, sua distribuzione e struttura spaziale) che esterni (i carichi). In considerazione di ciò risulta ragionevole pensare che un miglioramento delle predizioni del rischio di frattura possa provenire dall'uso di modelli numerici tridimensionali: modelli subject-specific costruiti sulle immagini medicali sono infatti di principio in grado di contemplare in maniera più completa i fattori determinanti il comportamento meccanico di ogni singolo segmento osseo studiato. Requisiti fondamentali di una metodologia di indagine numerica nella specifica prospettiva delle applicazioni cliniche sono, oltre all'accuratezza, la robustezza nei confronti degli artefatti nelle immagini diagnostiche, la generalità rispetto al sito di indagine e l'automaticità del processo.

Il Metodo degli Elementi Finiti (FEM) è a tutt'oggi uno dei metodi numerici più affermati per l'indagine e la caratterizzazione del comportamento di un sistema fisico sotto determinate e controllate ipotesi. Questo è vieppiù vero nello specifico ambito della biomeccanica ortopedica, in virtù della sua attitudine a replicare accuratamente sia la morfologia che le proprietà materiali di un segmento osseo partendo dai dati di una Computed Tomography (CT). Gli studi svolti nel

corso degli negli ultimi vent'anni hanno portato allo sviluppo di una metodologia di modellazione basata sul FEM che, partendo da immagini medicali, si è dimostrata in grado di ottenere precisioni compatibili con le applicazioni cliniche nella replicazione di misure sperimentali di deformazioni su segmenti ossei in vitro. La metodologia affinata si basa sulla precisa rappresentazione topologica della superficie dell'osso, fatto che implica un processo complesso composto da più fasi: l'individuazione della morfologia del segmento osseo mediante la definizione dei suoi contorni in ciascuna delle immagini del dataset CT (operazione, denominata "segmentazione", ad oggi ancora al più semi-automatica), la generazione di una descrizione matematica della superficie di contorno dell'osso, la generazione della mesh (attualmente condotta con un software automatico), e la mappatura delle proprietà meccaniche all'interno della mesh. Benché notevolmente progredito negli ultimi anni, questo processo accusa ancora un importante limite rappresentato dalla complessità procedurale: la generazione di un modello completo a partire dai dati delle immagini diagnostiche richiede un notevole impegno sia in termini di tempo richiesto (tipicamente alcuni giorni) che di competenze specialistiche continuativamente dedicate ad ogni singolo studio. Questo rende praticamente impossibile un'applicazione su vasta scala con tempi compatibili con quelli delle esigenze cliniche.

Nella letteratura di settore sono stati negli ultimi anni esplorati, seppur a livello coacervale, approcci alternativi nell'intento di superare i limiti costituiti da questa onerosità di modellizzazione. La presente tesi formula e analizza appunto alcune nuove ipotesi metodologiche per la costruzione di modelli numerici basati sulle immagini diagnostiche in grado superare i maggiori limiti della procedura basata sul FEM; l'intento è quello di individuare, valutandone l'applicabilità, un processo di analisi maggiormente automatico, di accuratezza compatibile con le esigenze cliniche e completabile in tempi accettabili.

Il lavoro qui esposto si colloca nel contesto dell'attività di ricerca del **Laboratorio di Tecnologia Medica dell'Istituto Ortopedico Rizzoli** di Bologna, struttura che ha finanziato il Dottorato e presso cui lo studio è stato condotto. Parte consistente dell'attività del Laboratorio è focalizzata sulla caratterizzazione dei tessuti ossei a varia scala, e sull'affinamento di procedure validate di simulazione numerica per lo studio del comportamento meccanico dei segmenti ossei, nella prospettiva del loro trasferimento alla pratica clinica ortopedica. Oggetto della ricerca è stato dunque, nello specifico, l'indagine attorno a metodi numerici innovativi alternativi al FEM relativamente agli specifici problemi di meccanica dell'osso. Il focus applicativo è uno degli elementi caratterizzanti il lavoro, guidando sia la scelta delle alternative studiate che il processo di valutazione dell'applicabilità e di accertamento dell'accuratezza.

L'elaborato esplora alcune ipotesi fondate su implementazioni numeriche innovative derivate del Metodo delle Celle. Il Metodo delle Celle (CM) è un metodo numerico basato sulla formulazione discreta diretta delle equazioni di campo. Il CM scrive le equazioni di campo direttamente nella loro forma algebrica, facendo uso di variabili globali riferite agli elementi (spaziali e temporali) di due complessi di celle tra i quali sussiste una dualità topologica. Malgrado sia di ideazione relativamente recente, il CM ha conosciuto negli ultimi anni un grande sviluppo, venendo applicato in differenti discipline tecnico-scientifiche quali l'elastostatica, l'elastodinamica, lo studio della trasmissione del calore, i problemi di elettromagnetismo e la dinamica dei fluidi.

I pregi del Metodo risiedono soprattutto nella semplicità concettuale e nella sua aderenza alla realtà fisica e sperimentale; la facilità di implementazione e alcuni significativi vantaggi di tipo computazionale rilevati in alcune specifiche applicazioni rendono fondato il considerare il CM una valida alternativa ad altri metodi numerici oggi comunemente utilizzati e nei confronti dei quali ha dimostrato di essere pari (e talvolta superiore) relativamente a precisione numerica ed ordine di convergenza.

Il Metodo delle Celle è in grado di affrontare sistemi caratterizzati da geometrie complesse e da eterogeneità nelle proprietà materiali: la formulazione finita, che costituisce il cuore del Metodo, non trova infatti ostacoli nell'affrontare sistemi in cui ogni cella abbia proprietà differenti da quelle adiacenti; l'approccio discreto non produce singolarità formali nell'applicazione di sorgenti concentrate, né sussistono condizionamenti nella forma del dominio analizzabile o vincoli nella discretizzazione. Esso si candida dunque ad essere un metodo potenzialmente utile per lo studio di sistemi biomeccanici, tipicamente caratterizzati da geometrie complesse e irregolari e da una grande variabilità distribuzione delle proprietà materiali.

L'esplorazione di alternative al FEM è stata focalizzata sul Metodo delle Celle per due ragioni: in primo luogo il CM, rifiutando a priori l'ipotesi di continuo e assumendo filosoficamente la prospettiva dell'approccio discreto, appare nei principi concorde con la struttura della fonte di informazione (i dataset di immagini diagnostiche) con cui i modelli possono venire definiti; in secondo luogo il CM ha manifestato di poter rendere accessibili alcuni strumenti (quali la formulazione quadratica con ordine di convergenza nativamente pari a 4 e un approccio meshless di semplice formulazione) tali da costituire a priori motivo di interesse e ragione di studio in un'ottica non già solamente accademica quanto piuttosto pratica e applicativa.

Dal punto di vista concettuale la tesi è strutturata in tre parti: la prima parte inquadra il problema di riferimento e presenta il metodo numerico oggetto

di studio; la seconda parte è focalizzata sullo sviluppo formale di alcune implementazioni innovative; la terza parte ha infine carattere applicativo, indagando applicabilità e accuratezza di una delle ipotesi formulate.

Il **capitolo 1** presenta il tema della definizione dei modelli numerici subject specific di segmenti ossei costruiti su dati di immagini diagnostiche; vengono descritti gli strumenti disponibili e le metodologie ad oggi più affidabili, analizzando le limitazioni e le incertezze connaturate sia ai metodi di manipolazione che alla fonte di informazione.

Nel **capitolo 2** viene presentato il Metodo delle Celle, conferendo particolare rilievo all'architettura logica e formale su cui si fonda: la filosofia della formulazione finita, cuore del Metodo delle Celle, è sinteticamente esposta con alcune digressioni di carattere tassonomico sulle possibili classificazioni delle variabili fisiche, sull'orientazione degli elementi geometrici e temporali e sui complessi di celle.

Nel **capitolo 3** viene presentata l'estensione della formulazione quadratica del Metodo delle Celle ai problemi tridimensionali: la descrizione dell'impostazione formale e implementativa relativamente ai problemi di riferimento (trasmissione del calore in regime stazionario ed elasticità lineare) è completata da alcuni test su casi di riferimento in cui la soluzione numerica viene confrontata con quella teorica disponibile in forma chiusa.

Nel **capitolo 4** vengono esplorate alcune ipotesi di approccio meshless del CM: una breve disamina di metodi meshless in ambito differenziale viene completata da una digressione sulle applicazioni nello specifico ambito della biomeccanica. I caratteri generali di un approccio meshless, reso accessibile in modo diretto dalla struttura concettuale del CM, vengono poi declinati nello specifico di tre approcci proposti: il primo basato sulla creazione di un complesso locale di celle primali, gli altri due basati su un'interpolazione della funzione incognita definita localmente su una costellazione di punti a connettività non definita. Presentata la formulazione teorica e alcune considerazioni sugli aspetti implementativi, gli approcci proposti vengono applicati a problemi di test di riferimento sia relativamente alla soluzione numerica dell'equazione di Laplace che alla soluzione di problemi di elasticità lineare nel caso, assunto come riferimento, della Trave di Timoshenko.

Nel **capitolo 5** viene presentato lo studio di applicabilità di uno degli approcci proposti: il metodo selezionato è quello basato sulla definizione di un complesso locale di celle primali e viene denominato Meshless Cell Method (MCM). La

verifica di applicabilità avviene replicando con il modello MCM una prova sperimentale di carico su un campione di femore in vitro, problema usato come riferimento per la sua valenza rispetto alla prospettiva di applicazione in ambito clinico. La valutazione viene condotta comparando le misure sperimentali di deformazione con i valori predetti dal modello numerico nei punti corrispondenti ai siti di misura sperimentale. Le predizioni di un modello FEM replicante la stessa condizione sperimentale, fornisce anche elementi di valutazione comparativa rispetto al gold standard numerico di riferimento.

Il **capitolo 6** è infine dedicato alla validazione della formulazione MCM la cui applicabilità è stata verificata nel capitolo precedente. Come riferimento viene adottata una campagna di misure sperimentali condotte su 8 differenti campioni di femore in 6 distinte configurazioni di carico; le misure sperimentali di deformazione in 15 differenti siti anatomici costituiscono l'elemento di verifica di precisione nell'identificazione della realtà sperimentale. Definita una metrica di accuratezza globale del modello, le prestazioni registrate dalle analisi MCM sono valutate anche per comparazione con i corrispondenti parametri ottenuti con i modelli FEM replicanti i medesimi esperimenti. Il confronto puntuale e sistematico con i valori di deformazione principale negli elementi di uno dei modelli FEM offrono infine uno strumento di comprensione del comportamento del modello MCM rispetto a quello del metodo numerico validato di riferimento.

Capitolo 1

La creazione di modelli numerici *subject-specific* di segmenti ossei

La conoscenza delle tensioni che si producono all'interno di un segmento osseo può risultare di grandissima importanza per una molteplicità di applicazioni sia di carattere clinico che nell'ambito della ricerca. La progettazione di una protesi, ad esempio, non può certo prescindere dalla conoscenza delle sollecitazioni a cui sarà sottoposta; così come pure la previsione gli stress sopportabili da un arto ricostruito è importante ai fini di un'appropriata programmazione dell'attività di riabilitazione, potendo controllare i rischi di frattura rispetto alle sollecitazioni attese. La predizione del rischio di frattura assume poi rilievo in ambito clinico quale strumento diagnostico, di prognosi e di cura.

1.1 Scopi e ragioni dell'analisi

La misura delle sollecitazioni meccaniche in vivo (ovvero su pazienti in vita) non è fattibile senza evitare invasivi interventi chirurgici, operazione che è peraltro comunemente ritenuta eticamente inaccettabile. Il solo modo per poter fare una previsione non invasiva degli stress meccanici in vivo è la costruzione di un modello numerico. L'estrema variabilità sia in termini di morfologia che di peculiare distribuzione spaziale delle proprietà fisiche e meccaniche dei segmenti ossei, impongono, nella prospettiva delle applicazioni cliniche, la manipolazione di modelli specificamente costruiti sul singolo caso da studiare: tali modelli sono solitamente detti modelli *subject specific*.

L'individuazione di un metodo per poter simulare con attendibilità le sollecitazioni prodotte comporta poi ovviamente tutti i vantaggi già noti per ogni settore ingegneristico: ridurre notevolmente le onerose, complesse e delicate (oltre che

in genere costose) prove sperimentali e poter studiare gli effetti di differenti condizioni di carico su un medesimo sistema.

La costruzione di un modello “subject specific” è possibile partendo dalle informazioni disponibili dalle immagini di una tomografia computerizzata (CT), tecnica di diagnostica per immagini che allo stato attuale costituisce la migliore e più attendibile fonte di informazioni circa la morfologia e le proprietà meccaniche dei segmenti scheletrici di un soggetto in vita.

I dati ottenuti con un’acquisizione CT consentono di ottenere una rappresentazione geometrica e, in prima approssimazione, delle proprietà meccaniche di un osso, cui è pensabile l’applicazione di un qualche metodo numerico per l’analisi delle sollecitazioni, fissati opportunamente carichi e condizioni di vincolo. Questa operazione è comunque tutt’altro che semplice: innanzitutto per le difficoltà che si incontrano nella costruzione di un modello geometrico; in secondo luogo per la complicata caratterizzazione del comportamento meccanico del materiale e quindi, in ultima analisi, per le difficoltà nell’individuare un modello di comportamento attendibile.

Molte sono le strade possibili e molti sono i metodi ad oggi sperimentati; l’indagine sulla validità di un metodo si basa evidentemente sul confronto con i dati sperimentali ottenuti in laboratorio su campioni espianati.

1.2 Criteri di applicabilità

In linea di principio l’analisi numerica delle sollecitazioni meccaniche in una struttura ossea è possibile con un qualsiasi metodo di calcolo. Affinché un metodo di analisi numerica possa essere utilizzabile per studi clinici, esso deve però soddisfare dei requisiti di base e dovendo risultare:

- **Automatico** (*Automation*), per ridurre il tempo di analisi: il numero delle prove da effettuare è in genere elevato e le applicazioni diagnostiche richiedono risposte in breve tempo;
- **Generale** (*Generality*), per poter rappresentare correttamente ogni segmento osseo: le ossa dello scheletro umano presentano infatti una grande varietà di forma, dimensioni e proprietà fisiche;
- **Accurato** (*Accuracy*) perché i risultati della analisi possano poter essere utilizzati in fase di diagnosi o di definizione di terapie.
- **Robusto** (*Robustness*) per riuscire a produrre un modello accurato anche da dati incompleti o affetti da rumore.

Per meglio precisare questi concetti:

Automaticità = attitudine a completare il processo di analisi con il minor numero possibile di interventi;

Generalità = attitudine a completare il processo di analisi per qualunque segmento di osso a prescindere dall'eventuale presenza di anomalie anatomiche fisiologiche o patologiche.

Robustezza = attitudine a condurre analisi anche partendo da dati incompleti affetti da rumore.

L'accuratezza di un metodo può essere valutata in vitro, ma allo stato attuale è difficilmente accertabile in vivo. Di fatto esiste la possibilità di misure in vivo di micro-motion per mezzo della *Rontgen Stereophotogrammetric Analysis*; è questa tecnica è stata usata principalmente per la valutazione di impianti micro-motion, ma la sua accuratezza è ritenuta discutibile ed si è ancora nella fase di standardizzazione del metodo.

Il metodo di calcolo attualmente più affermato è senza dubbio il Metodo degli Elementi Finiti (FEM), già ampiamente utilizzato in ambito biomedico per lo studio di problemi di campo termico, magnetico, elettrico e per l'analisi della diffusione delle radiazioni nei tessuti corporei. Un'altra applicazione è quella riguardante problemi strutturali per stabilire le deformazioni e gli stati di tensione indotti da azioni esterne sugli organi del corpo umano, ivi compreso, pertanto, l'ambito ortopedico.

Il FEM si è affermato rispetto ai metodi concorrenti (Boundary Elements Method, Finite Volume Method, ...) per la sua attitudine a studiare sistemi di elevata complessità geometrica e meccanicamente non omogenei, eventualmente caratterizzate da un comportamento non lineare.

1.3 La definizione di un modello

In letteratura vengono riportate molte metodologie per la definizione di modelli ad elementi finiti "subject specific" caratterizzate da diversi livelli di automazione: partendo dai dati CT, esse permettono la definizione di modelli che riproducono le peculiari caratteristiche morfologiche del segmento osseo studiato, e che riportano la specifica distribuzione delle proprietà meccaniche dei tessuti presenti. Non tutte queste metodologie (alcune delle quali già usate con successo in vari contesti) sembrano però rispondere a tutti i requisiti di automazione, di generalità, di esattezza e robustezza richiesti, particolarmente, da un'applicazione

clinica.

Qualunque strada si adotti, la costruzione di un modello “subject specific” deve comunque affrontare due fasi fondamentali:

1. la generazione della mesh;
2. la definizione delle proprietà dei materiali.

Entrambe queste fasi si basano sull’interpretazione e la manipolazione delle informazioni rese disponibili dalle immagini CT.

1.3.1 La Tomografia Computerizzata (CT)

La Tomografia Computerizzata (o CT, Computed Tomography) è una metodologia generale che permette di ottenere immagini tomografiche ovvero di sezioni trasversali di un oggetto. Questo è possibile con una tecnica nota come retroproiezione, con la quale, tramite un computer, si riesce a ricostruire l’immagine di una sezione sulla base dei proiezioni fatte da angoli diversi. Solitamente l’espressione *Tomografia Computerizzata* fa riferimento a immagini costruite su proiezioni prodotte dalla misura della trasmissione dei raggi di X (*X-ray Computed Tomography*). Tuttavia, il termine potrebbe anche includere le immagini ottenute con la SPECT (Single Photon Emission Computed Tomography) o con la PET (Positron Emission Tomography) e perfino alcune tecniche ad ultrasuoni basate su misure di proiezione.

Le immagini CT sono tipicamente degli array bidimensionali di 512*512 pixel. Ogni pixel (*picture element*, elemento bidimensionale di base di un’immagine digitale) riporta un valore scalare che individua uno dei 4096 possibili gradi di grigio definibili con una codifica a 12 bit. Siccome le immagini (slices) sono tra loro separate, ad ogni immagine è associato uno spessore (*thickness*) dell’oggetto scandito e dunque ad ogni pixel è associato un voxel (*volume element*).

Il vantaggio principale di una CT rispetto alle proiezioni semplici è la capacità di separare gli oggetti disposti nel senso della proiezione, evitando la confusione che si crea quando le ombre di più oggetti si sovrappongono. Questo fatto, unitamente all’alta precisione delle misure e alla produzione di immagini digitali, dà alla CT la capacità di cogliere oggetti con contrasto estremamente piccolo. Per esempio, i sistemi CT che usano dei raggi X sono in grado di distinguere facilmente oggetti per i quali la differenza relativa nel coefficiente di attenuazione è una frazione di per cento. Questo permette rappresentazioni altrimenti non ottenibili con le tradizionali proiezioni radiografiche.

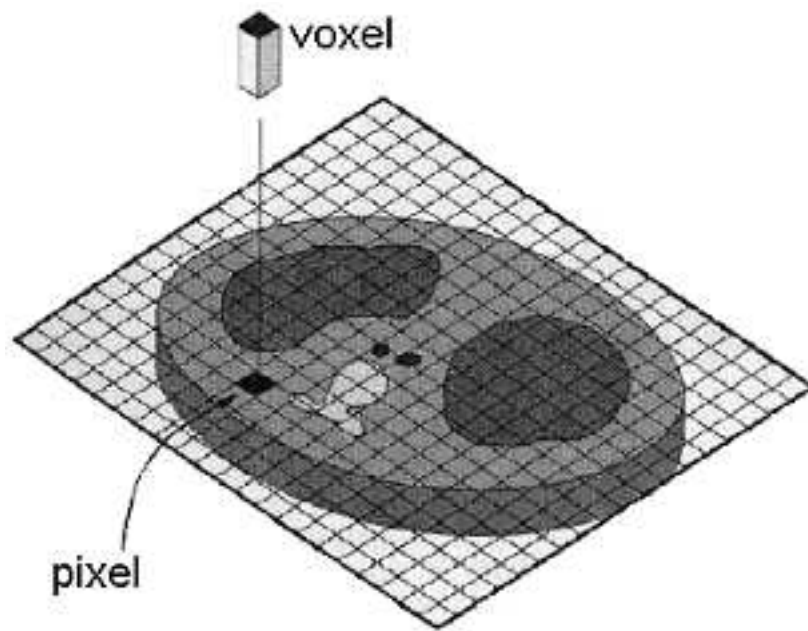


Figura 1.1. Immagine CT: pixel e voxel.

1.3.1.1 La ricostruzione dell'immagine

La ricostruzione dell'immagine è quel processo con cui, partendo dai dati grezzi per ciascuna delle giaciture di proiezione utilizzate, si ricostruisce la distribuzione spaziale dell'assorbimento subito dalla radiazione incidente nell'area spazzata dai raggi di proiezione.

Esiste una precisa relazione matematica tra la distribuzione spaziale delle proprietà fisiche in un mezzo (quali la densità, l'impedenza acustica, la magnetizzazione) e le misure di attenuazione di un segnale acustico o elettromagnetico. Il processo di ricostruzione è il percorso inverso, attraverso il quale dalle misure di attenuazione si ottiene la distribuzione spaziale delle proprietà fisiche del mezzo. Nel caso in cui si usino i raggi X, un fascio collimato passa attraverso l'oggetto in esame ed esce, dalla parte opposta, attenuato a causa dell'assorbimento apportato dai tessuti presenti.

Rilevatori registrano i segnali in uscita e li convertono in proiezioni lineari (secondo una direttrice ortogonale alla direzione del fascio) della distribuzione del coefficiente di attenuazione lineare della sezione. Noto l'insieme di profili di attenuazione lineari, utilizzando opportuni algoritmi, si riesce a risalire al profilo di attenuazione spaziale sulla sezione "spazzata" dal fascio (detta *slice*). In una

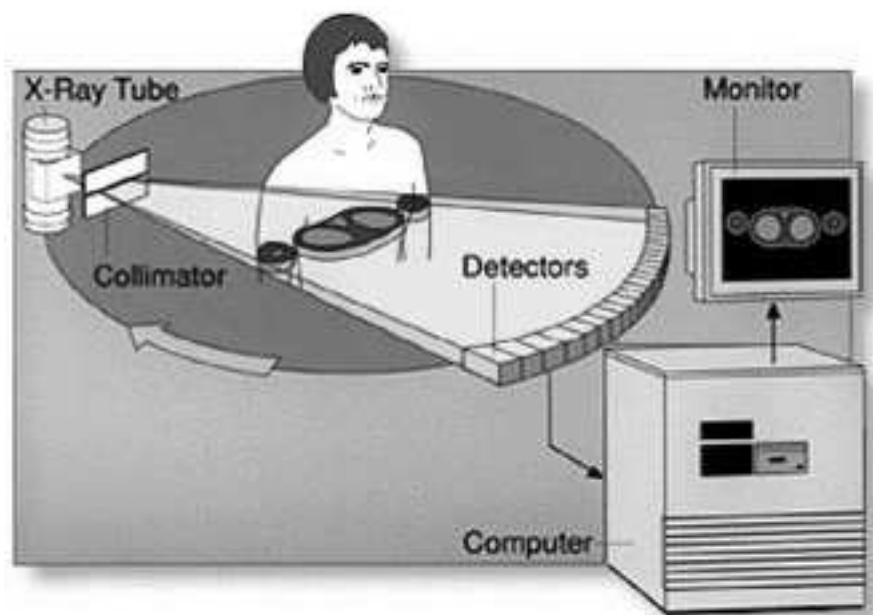


Figura 1.2. Schema di funzionamento di uno scanner TC.

situazione ideale l'intensità di un raggio che attraversa una regione a densità costante si attenua in modo esponenziale lungo il suo percorso. Il logaritmo del rapporto fra intensità incidente e intensità trasmessa corrisponde all'integrale di linea del coefficiente di attenuazione lineare lungo il percorso all'interno del mezzo. In un sistema CT ideale la ricostruzione dell'immagine è ottenibile con una semplice procedura di ricostruzione della proiezione basata su un algoritmo di convoluzione dei segnali di assorbimento misurati.

Di fatto nei sistemi CT reali sono presenti una serie di imperfezioni che devono essere corrette per minimizzare gli artefatti nella ricostruzione delle immagini: correzioni di offset e di guadagno per eliminare gli errori tra i sensori; procedure di correzione dell'indurimento del fascio¹ per minimizzare gli effetti dovuti alla dispersione dello spettro di energia del fascio di raggi X; altre tecniche di compensazione permettono di eliminare artefatti dovuti alla specifica geometria dello scanner.

Nell'immagine ricostruita le differenze di contrasto sono dovute alle differenze del coefficiente di attenuazione lineare nei tessuti attraversati dai raggi X.

¹artefatto che si produce quando è presente una brusca variazione nella densità del mezzo, caso tipico di quando nell'osso è presente un materiale metallico quale un chiodo o una protesi



Figura 1.3. Immagine CT di una sezione di cranio: i differenti livelli di grigio corrispondono a differenti valori del coefficiente di attenuazione lineare del fascio di raggi X, ossia a diversi valori di densità dei tessuti attraversati).

L'immagine prodotta è quindi la rappresentazione della distribuzione spaziale dei coefficienti di attenuazione lineare. Per i tessuti molli il coefficiente di attenuazione lineare è in prima approssimazione proporzionale alla densità: pertanto i valori riportati in un'immagine CT sono espressi talvolta anche in termini di densità.

Le immagini CT costituiscono attualmente la migliore fonte di informazione per la costruzione di un modello *subject specific* di un segmento osseo: questo perché il coefficiente di assorbimento del tessuto osseo molto più elevato di quello dei tessuti circostanti, fatto che produce elevati contrasti dell'immagine e permette dunque una più agevole delimitazione del contorno.

1.3.1.2 Le Hounfield Units (o CT numbers)

Dopo l'operazione di ricostruzione, l'immagine CT è costituita da un set di numeri *floating point*, utili per effettuare confronti ma non per la loro rappresentazione. Siccome la maggior parte dei sistemi di visualizzazione grafica lavora con valori interi, dopo la fase di ricostruzione, ma prima della visualizzazione, i dati delle immagini CT vengono normalizzati e approssimati a valori interi.

Con questa operazione i valori *floating point* $\mu(x,y)$ corrispondenti al valore del

coefficiente di assorbimento lineare nel pixel di coordinata (x,y) sono trasformati in valori interi utilizzando un'operazione di normalizzazione quale:

$$CT(x,y) = 1000 \cdot \frac{\mu(x,y) - \mu_{H_2O}}{\mu_{H_2O}} \quad (1.1)$$

dove μ_{H_2O} è il valore del coefficiente di attenuazione dell'acqua. I valori $CT(x,y)$ sono noti come **Hounsfield Unit**² (HU), e rappresentano i valori in uscita di tutto il processo di elaborazione dei segnali registrati.

1.3.2 La costruzione della mesh dai dati CT

La discretizzazione della struttura ossea individuata dai dati CT, con la creazione di una mesh tridimensionale, è una fase molto molto onerosa, in termini di tempo, nella definizione di un modello ad elementi finiti; peraltro è anche una fase molto delicata, poiché la qualità della mesh influenza la qualità dei risultati, e per poter ottenere una buona accuratezza dei risultati, la mesh deve soddisfare condizioni molto restrittive.

L'adozione di un sistema automatico per la generazione della mesh è una scelta obbligata per rendere un processo di analisi compatibile con i tempi della pratica clinica ovvero quando si voglia condurre un'analisi su un elevato numero di campioni: è del tutto evidente che una procedura manuale comporterebbe grandi sforzi e risulterebbe eccessivamente onerosa in termini di tempo.

Un generatore automatico di mesh (AMG, automatic mesh generator) può essere definito [1] come "un algoritmo automatico che può creare una mesh valida per una geometria di complessità arbitraria, con il solo controllo di parametri di programma e senza l'intervento manuale dell'utente".

Ogni AMG può essere classificato in relazione al tipo di connettività della mesh (strutturata o non strutturata [2]) e in relazione al tipo di elemento utilizzato per la discretizzazione (nella maggior parte dei casi tetraedri o esaedri). Pur essendo un tema ancora aperto, sono oggi disponibili per molte applicazioni algoritmi assai robusti per la generazione di mesh, e quasi tutti i codici FEM commerciali permettono di generare mesh di tetraedri. In particolari contesti applicativi, quale per l'appunto quello biomedico, esigenze e problemi specifici limitano di fatto l'applicabilità degli strumenti disponibili per la discretizzazione automatica. Nella specificità della rappresentazione di un segmento osseo, i maggiori ostacoli sono costituiti dalla complessità geometrica e dalla scarsa definizione con cui è descritta la superficie di contorno della struttura ossea.

La CT, oggi la fonte di informazioni più accurata per la rappresentazione di una

²Hounsfield fu l'ingegnere britannico che mise a punto la tecnologia della TAC, operazione che gli valse il premio nobel per la medicina di cui fu insignito nell'anno 1979

struttura ossea, produce una pila di immagini che raffigurano sezioni trasversali del segmento studiato. Noto il riferimento geometrico che permette di collocare le immagini nello spazio, la pila di immagini riporta i valori di un campo scalare nei punti di una griglia spaziale regolare: il campo scalare è quello dei coefficienti di attenuazione, definiti indipendentemente dai confini di separazione fra tessuti di organi differenti. La soluzione agli elementi finiti delle equazioni differenziali che descrivono un problema, richiede però che il dominio di integrazione sia chiuso e ben definito.

In questa struttura di dati (denominata dataset), la distinzione fra i tessuti non è determinabile a priori e dunque la definizione della geometria del segmento osseo, essenziale ai fini di una generazione automatica di una mesh, non può essere immediata.

Allo stato attuale sono state definite due strategie fondamentali per l'individuazione della geometria e, dunque, per poter provvedere alla generazione automatica della mesh di un segmento osseo:

1. una procedura di sogliatura generalizzata con cui si individuano i punti che potrebbero appartenere al tessuto osseo;
2. la definizione di una superficie di confine tra tessuto osseo e tessuti circostanti attraverso un processo denominato "segmentazione".

1.3.2.1 Il processo di sogliatura automatica: l'approccio *voxel mesh*

Si tratta di una procedura completamente automatizzata che permette direttamente la creazione di una mesh cartesiana appoggiata sulla struttura del data set CT. La disposizione regolare di punti in cui sono noti i valori di assorbimento della radiazione offre una naturale discretizzazione basata sui parallelepipedi costituiti dai *voxel*. Esistono dei sofisticati algoritmi basati sul valore locale del gradiente del campo scalare (di assorbimento della radiazione e dunque, come si è visto, di densità) per individuare gli elementi superficiali o per realizzare raffittimenti localizzati nelle zone di transizione fra tessuti differenti.

1.3.2.2 L'individuazione della superficie di contorno: la segmentazione

Un metodo alternativo comporta invece l'individuazione di una superficie di contorno: l'operazione con cui in un'immagine diagnostica si individua la superficie di contorno di un organo è in genere denominata **segmentazione**. Per realizzare questa operazione esistono dei codici commerciali che fanno uso di vari algoritmi più o meno automatizzati. In termini generali le tecniche di segmentazione possono essere classificate in quattro categorie fondamentali:

- le **nuvole di punti**: il contorno è definito da un insieme di punti nello spazio; questa categoria è di fatto poco usata per le poche garanzie di continuità della superficie di contorno; teoricamente esisterebbero dei metodi (tipici dei programmi CAD) per approssimare la nuvola di punti con superfici matematicamente definite, ma di fatto, forse per causa della dispersione di precisione nel posizionamento dei punti, non si è a conoscenza di applicazioni in ambito biomeccanico.
- le **pila di contorni**: una seconda categoria di algoritmi elabora separatamente ogni singola immagine della pila prodotta dalla CT; per ogni immagine viene utilizzato un algoritmo di segmentazione (quale il conjugate-gradient follower [3]), e il contorno viene così definito da una serie di curve piane. Tutti i metodi convenzionali basati su “derivative methods”, sono però al più semi-automatici: anche nel caso della segmentazione di un osso, facilitato da immagini fortemente contrastate, un intervento manuale si rende in genere necessario nelle regioni epifisarie [4]. Segmentate tutte le

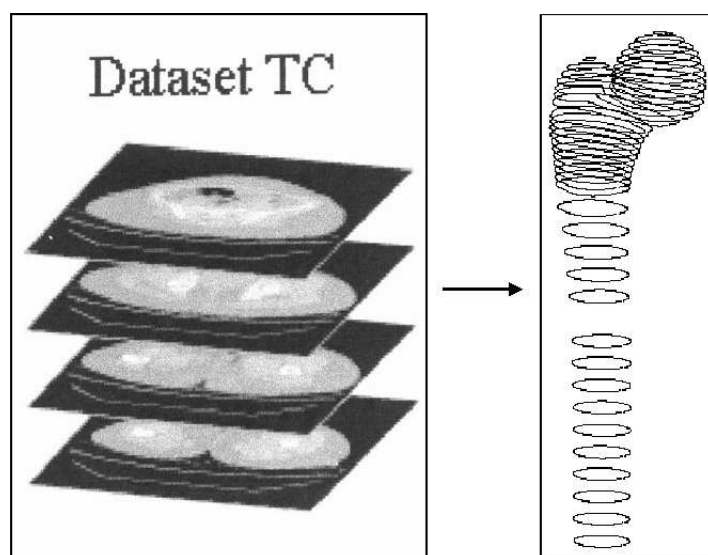


Figura 1.4. Segmentazione delle immagini e produzione dei contorni per ciascuna delle immagini del data-set CT

immagini, l'insieme dei singoli contorni può essere interpolato per ottenere una superficie chiusa: questa operazione è sempre fattibile adottando come superficie un insieme di semplici [5], ma se si vuole fare uso di superfici matematicamente descritte da polinomi di ordine superiore si deve in genere provvedere alla correzione manuale dei coefficienti del polinomio per ogni singolo contorno.

- la **superfici tassellizzate tridimensionali**: un terzo approccio permette di elaborare direttamente in maniera automatica l'intera pila di immagini considerata quale dataset tridimensionale. Questo metodo, il cui antenato è il *Marching Cube* [6], consente l'estrazione automatica di superfici di isodensità dal dataset CT: la superficie è rappresentata da semplici poligoni (tipicamente triangoli) che costituiscono una superficie denominata **tassellizzata**. Il difetto di questo metodo è che produce spesso superfici con contraddizioni topologiche quali ad esempio triangoli mancanti o sovrapposti; inoltre si viene a generare solitamente un numero molto elevato di semplici, che, nel caso di un femore umano, può tranquillamente arrivare all'ordine delle migliaia di elementi.
- le **superfici matematiche tridimensionali**: l'ultimo gruppo di tecniche di segmentazione fa uso di superfici matematiche "elasticamente deformabili": la corrispondenza con il contorno dell'organo è ottenuta attraverso la minimizzazione di un'opportuna funzione di costo definita sul campo scalare del dataset CT. Di fatto questo approccio è ancora in fase di sviluppo e a tutt'oggi non è pienamente utilizzabile; inoltre le implementazioni attuali richiedono la definizione empirica di una serie di parametri per ogni singolo dataset, e si può pertanto affermare che l'algoritmo non sia ancora automatico.

Agli effetti pratici attualmente la creazione della mesh parte dalla superficie di confine del tessuto osseo in forma tassellizzata. Da questa base di partenza sono ancora possibili due metodi alternativi:

- rappresentare la superficie tassellizzata con una serie di superfici matematicamente definite che nel loro complesso definiscano un solido topologicamente corretto. Questa superficie può allora essere discretizzata, e la mesh ottenuta serve di appoggio per la creazione della mesh del volume. Per descrivere la superficie tassellizzata si possono usare degli elementi di superficie NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines) generabili con sofisticati programmi di *reverse engineering*, e sulle quali la creazione di una mesh di superficie risulta relativamente facile. Importate le NURBS in un programma FEM, si provvede dapprima alla creazione della mesh sulle NURBS che funge da appoggio alla discretizzazione del volume con elementi tetraedrici.
- la superficie tassellizzata ottenuta con la segmentazione può essere utilizzata senza ulteriori elaborazioni. La metodologia, chiamata "grid-based", effettua sostanzialmente una proiezione della griglia di punti del dataset sulla superficie di contorno. L'assenza di codici commerciali che implementino questa procedura ne ha di fatto determinato la scarsità di utilizzo.

1.3.3 Definizione delle proprietà meccaniche

Una volta completata la discretizzazione del segmento osseo, è necessario attribuire ad ogni elemento della mesh le relative proprietà meccaniche. Nel caso di una modellizzazione generica di un osso, le proprietà meccaniche dei differenti tessuti ossei sono generalmente assunti pari ai valori medi riportati nella letteratura delle misure sperimentali [4, 7]. Quando invece si cura un modello *subject-specific* le proprietà meccaniche devono essere derivate dai dati CT. È stato dimostrato come la distribuzione delle tensioni in un osso sia fortemente legata alla distribuzione delle proprietà meccaniche nel tessuto osseo. Pertanto è di fondamentale importanza individuare un metodo valido per individuare dai dati CT la distribuzione delle proprietà meccaniche in un tessuto osseo e poterla mappare in un modello ad elementi finiti *subject-specific*.

In una CT a raggi X, le immagini rappresentano la distribuzione del coefficiente di attenuazione lineare dei tessuti; i valori riportati sono in genere espressi in Hounsfield Units (HU), unità di misura ormai riconosciuta come standard. Questo sistema di unità presenta i coefficienti di attenuazione nella forma normalizzata definita dall'espressione (1.1), nella quale all'acqua viene assegnato il valore 0 e all'aria il valore -1000 .

È stato dimostrato che esiste una correlazione quasi lineare fra le unità HU (CT numbers) e i valori di densità apparente di un tessuto biologico, e che questo legame è valido per un ampio range di valori di densità [8, 9]. Il passaggio fra le CT units e la densità di un tessuto biologico è chiamato *calibrazione* del dataset. Inoltre sono state individuate sperimentalmente delle buone relazioni empiriche tra densità e proprietà meccaniche dei tessuti ossei [10, 11, 12]. È quindi in linea di principio possibile derivare dai dati CT una distribuzione non omogenea delle proprietà dei tessuti e tenerne quindi conto nel modello ad elementi finiti *subject-specific*. In letteratura sono proposti vari metodi per realizzare questa operazione, caratterizzati da differenti livelli di automaticità e dipendenti dalla tecnica che si è adottata per creare la mesh.

Nel caso così detto “voxel mesh” [13, 14] il compito è semplice: il data-set CT rappresenta un volume campionato nei punti di una griglia regolare e gli elementi della mesh cartesiana, generata automaticamente con un criterio di soglia automatica, hanno forma di parallelepipedo e sono ottenuti dall'unione di un prefissato numero di voxels.

Il trasferimento dei dati CT agli elementi della mesh è dunque naturale potendosi associare direttamente ad ogni elemento il valore medio di densità radiologica dei voxel che lo compongono; il passaggio al modulo di Young è poi possibile utilizzando un'opportuna relazione empirica riportata in letteratura. Va sottolineato che, per la natura delle relazioni che legano valori CT alla densità e la

densità al modulo di Young, le due operazioni non sono commutative: pertanto una strada alternativa, e non equivalente, è quella di passare in ogni punto del dataset dai valori CT ai valori del modulo di Young, associando poi ad ogni elemento la media dei valori del modulo di Young ottenuti nei voxel componenti.

Avendo generato una mesh strutturata, è possibile realizzare un'accurata mappatura delle proprietà dei diversi tessuti dato che le facce degli elementi possono seguire debitamente i confini fra i vari tessuti ossei. In questo caso la densità media in un singolo elemento finito è definita sulla base dei voxel che cadono al proprio interno. La procedura può avere diversi livelli di automazione, ma in ogni caso si basa implicitamente sulla conoscenza a priori della topologia della mesh [15, 13, 16].

Quando si sia invece costruita una mesh non strutturata, le facce degli elementi non sono allineate né con gli assi del dataset CT, né con le superfici del tessuto osseo; poiché è improponibile procedere ad una mappatura manuale delle proprietà meccaniche sugli elementi della mesh, è necessario escogitare dei metodi più sofisticati. Se la mesh è generata partendo dagli stessi dati, la mesh e la distribuzione delle densità sono perfettamente registrate nello spazio. L'unico problema è quello di stabilire come trasferire agli elementi del modello i valori di questa non omogenea distribuzione delle proprietà. In letteratura vengono descritte due strategie.

Un primo approccio è quello di includere nella formulazione degli elementi le proprietà meccaniche variabili nello spazio. Questo è l'approccio più generale che bene si accorda con la sostanziale variabilità delle proprietà dei tessuti entro ogni elemento di volume. Questo approccio non si può adottare utilizzando un codice FEM commerciale "general purpose" richiedendo una formulazione "ad hoc" e dunque una manipolazione del solutore. Inoltre l'esigenza di una tale complessità di analisi non è stata sinora dimostrata ed ha forse costituito la ragione per cui questo approccio risulta essere stato sinora utilizzato in un solo studio [17].

Tutti gli altri studi sono basati sull'implicita assunzione che le variazioni dei valori CT all'interno del volume di ogni elemento siano trascurabili. Pertanto le proprietà meccaniche del tessuto vengono assegnate agli elementi facendo la media dei valori del campo scalare all'interno di ogni elemento. Le differenze risiedono nel modo di calcolare questa media all'interno degli elementi.

L'approccio più semplice proposto in letteratura è la ricerca per ogni nodo di ciascun elemento del valore associato al più vicino punto del dataset CT: all'elemento viene allora assegnata la media pesata dei valori nodali [18]. Una variante proposta in letteratura assegna ad ogni elemento il valore ottenuto mediando le

densità degli otto punti della griglia CT che si trovano attorno al centroide dell'elemento [19]. Questi metodi sono di implementazione assai semplice, ma possono produrre dei risultati inaccurati quando la dimensione degli elementi sia significativamente maggiore della spaziatura della griglia di punti CT.

Un secondo approccio, proposto inizialmente con limitazioni [20] e successivamente reso disponibile in una formulazione generalizzata nel codice open source BONEMAT_V1 [21], assegna agli elementi la media dei valori associati ai punti del dataset CT che cadono all'interno di ogni elemento. In questo caso anche se la dimensione dell'elemento è significativamente maggiore della spaziatura della griglia CT, il risultato ottenuto è ragionevolmente accurato. Tuttavia, neppure questo metodo può produrre risultati soddisfacenti quando la dimensione degli elementi sia, al contrario, pari o minore delle dimensioni dei voxel. Per questa ragione sarebbe importante poter disporre di un codice in grado di trattare entrambe le situazioni e che, completamente automatizzato, potesse essere utilizzato anche con mesh non strutturate. Un codice con queste caratteristiche, chiamato BONEMAT_V2³ è stato in effetti realizzato dai Laboratori di Tecnologia Medica dell'Istituto Ortopedico Rizzoli di Bologna, ed è stato verificato per confronto con il BONEMAT_V1 in tre differenti tipi di osso.

1.3.3.1 Il software di mappatura

La struttura delle due versioni del codice BONEMAT è la stessa, e le differenze risiedono nel modo in cui, partendo dai valori CT, viene calcolato il valore medio HU assegnato a ciascun elemento della mesh. La sua struttura di base del codice⁴ può essere divisa in tre fasi fondamentali, di seguito illustrate.

Valutazione del valore medio di HU

Per ciascun elemento della mesh il codice calcola un valore uniforme $\overline{HU}$ sulla base dei dati CT tramite la formula:

$$\overline{HU}_n = \frac{\int_{V_n} HU(x,y,z)dV}{\int_{V_n} dV} = \frac{\int_{V_n} HU(r,s,t)det[J(r,s,t)]dV}{V_n} \quad (1.2)$$

dove V_n è il volume dell'elemento n , (x,y,z) sono le coordinate nel riferimento CT, (r,s,t) sono le coordinate locali nel sistema di riferimento dell'elemento e J è lo jacobiano della trasformazione tra i due sistemi di coordinate. Gli integrali dell'equazione (1.2) vengono valutati numericamente, con la possibilità di poter

³disponibile presso il sito http://www.biomedtown.org/B3C_Building/products/bonemat/

⁴decritta analiticamente nella documentazione riportata nelle pubblicazioni di riferimento [21]

scegliere l'ordine dell'integrazione numerica. Il valore $HU(x,y,z)$ in un generico punto del dominio CT è determinato con un'interpolazione tri-lineare tra i valori degli otto punti adiacenti. Questo metodo è computazionalmente più oneroso rispetto al precedente, ma permette di stimare il valore di $\overline{HU}_n$ per ogni elemento con un metodo più accurato, usando tutte le informazioni disponibili per interpolare i valori di HU all'interno del dominio CT. In questo caso la dimensione dell'elemento finito non influenza l'accuratezza nella stima di $\overline{HU}_n$ dato che la descrizione del campo scalare delle HU è non uniforme anche all'interno di ogni singolo voxel, e tiene conto della distribuzione spaziale delle HU negli otto nodi circostanti i vertici della griglia di punti CT.

Calibrazione del data-set CT

I valori numerici prodotti da un'acquisizione CT dipendono da molti fattori legati allo specifico esame, tra cui i parametri fisici impostati dal radiologo come il KVP (*kVolt Peak*) o l'*X-ray Tube Current*; la calibrazione, realizzata in genere con l'utilizzo di una campione di controllo o fantoccio, è necessaria per trasformare correttamente i valori misurati in valori significativi di densità di tessuto osseo. Si assume sia valida una relazione di tipo lineare e che ogni utente possa adottare la propria relazione, con i parametri opportuni. L'equazione di calibrazione è allora:

$$\bar{\rho}_n = \alpha + \beta \overline{HU}_n \quad (1.3)$$

dove $\bar{\rho}_n$ è la densità assegnata in modo uniforme all'elemento n della mesh, $\overline{HU}_n$ è il valore uniforme del numero CT, α e β sono i coefficienti di calibrazione forniti dall'utente.

Definizione del modulo di Young

In letteratura si possono rintracciare molte relazioni che legano la densità del tessuto osseo al modulo di Young. La relazione viene indicata dall'utente e può essere sia di tipo lineare che di tipo esponenziale. Si assume che una singola equazione resti valida per tutto l'intervallo di valori di densità. L'equazione adottata è nella forma:

$$\bar{E}_n = a + b \bar{\rho}_n^c \quad (1.4)$$

nella quale $\bar{E}_n$ è il valore del modulo di Young assegnato uniformemente all'intero elemento n della mesh, $\bar{\rho}_n$ è il corrispondente valore di densità e a , b e c sono i coefficienti adottati dall'utente. Teoricamente il procedimento può assegnare proprietà differenti ad ogni elemento della mesh: siccome alcuni codici FEM commerciali hanno limitazioni sul numero massimo di materiali presenti, il codice offre all'utente la possibilità di ridurre il numero di valori per il modulo E impostando un valore soglia per ΔE , con una procedura in grado di assicurare che ad

ogni elemento non venga attribuito un valore inferiore a quello individuato con l'espressione (1.4).

1.3.4 I problemi dell'approccio FEM mesh

I procedimenti utilizzati per estrarre le informazioni geometriche e materiali dai dati CT sono spesso affette da errori non trascurabili: questi errori si propagano in modo ignoto nei vari passi della creazione del modello e affliggono in modo difficilmente accertabile l'accuratezza dei calcoli.

Errori di risoluzione dello scanner CT

La prima fonte di errore e distorsione è costituita dalla risoluzione e dalla qualità delle immagini del dataset utilizzato, caratteristiche che dipendono dai parametri impostati per la scansione oltre che dalle caratteristiche dello scanner CT.

Errori di segmentazione

La seconda fonte di errore è la segmentazione della regione di interesse: sono stati proposti vari algoritmi di segmentazione caratterizzati da vari gradi di automazione, partendo dall'estrazione completamente manuale del contorno e arrivando a complessi algoritmi completamente automatizzati. Qualunque algoritmo di segmentazione si scelga sarà in ogni caso presente un'incertezza nella definizione del contorno. Nella maggior parte dei casi la segmentazione avviene facendo uso di algoritmi basati su processi di sogliatura, i cui risultati dipendono dal valore di soglia impostato [22, 6]. Questo errore nella definizione della geometria si propaga evidentemente attraverso tutti i passi successivi sino alla creazione della mesh.

Errori di mappatura

In molti studi le informazioni circa la densità ottenute dal data set CT sono utilizzate per derivare una distribuzione non omogenea delle proprietà meccaniche dei tessuti. Questa procedura prevede due passi: per prima cosa i dati CT sono calibrati per correlare le Hounsfield Units HU ai valori di densità apparente o di *ash density* del tessuto; questa operazione è talvolta realizzata utilizzando un "fantoccio di calibrazione" [23, 12, 24, 5, 25], ovvero assumendo dei valori convenzionali attinti dalla letteratura per determinate sezioni (*selected regions*) [3]. In entrambi i casi i valori ottenuti non possono essere considerati privi di errore. Successivamente i valori di densità del tessuto osseo sono correlati con

i corrispondenti valori di modulo di Young utilizzando equazioni di derivazione empirica ottenuti da indagini sperimentali. I coefficienti di queste equazioni sono affetti da un'incertezza dovuta a una significativa dispersione di queste misure sperimentali [26, 27, 28, 29].

Le inevitabili incertezze legate ai vari passi di creazione del modello affliggono sicuramente l'accuratezza dei valori ottenuti con il calcolo. Sfortunatamente questi modelli *subject specific* non possono essere convalidati da misure dirette poiché le tecnologie attualmente disponibili non permettono misure di tensione o di deformazione *in vivo* che non siano invasive.

La valutazione dell'accuratezza del modello può essere ricavata con due operazioni separate: dapprima si può accertare l'accuratezza intrinseca dei metodi messi a punto rispetto ai risultati sperimentali di test *in vitro*; poi può essere eseguita un'analisi di sensibilità per capire quale sia l'effetto delle incertezze delle misure rilevate *in vivo*. Mentre la validazione *in vitro* dei modelli ad elementi finiti di segmenti ossei è stata realizzata da molti autori, è ancora sconosciuta l'influenza che gli errori associati alle misure prese *in vivo* possano avere sui risultati prodotti da un modello a elementi finiti *subject specific*.

Capitolo 2

Il Metodo delle Celle

Il Metodo delle Celle è un metodo numerico basato sulla formulazione finita diretta delle equazioni dei campi fisici.

Attualmente i metodi numerici partono dalle equazioni di campo scritte in forma differenziale, ottenute dall'analisi di porzioni infinitesime dei sistemi fisici. La scelta di fissare l'attenzione su porzioni di spazio di estensione tendente a zero risponde all'intento di ottenere una soluzione esatta dei problemi descritti: questo obbliga a ridurre le grandezze fisiche (che nascono associate ad intervalli di tempo o a elementi geometrici di estensione finita) a funzioni del tempo e del punto, in modo tale da poter applicare gli operatori matematici del calcolo differenziale. Questa strategia costituisce certamente un'importante struttura logica di studio, ma comporta alcune difficoltà: in primo luogo le funzioni che definiscono le grandezze fisiche devono essere derivabili rispetto alle coordinate di riferimento: questo fatto comporta difficoltà nella presenza di discontinuità geometriche e nelle proprietà dei materiali. In secondo luogo, la presenza di sorgenti concentrate (astrazione che rappresenta sorgenti distribuite su estensioni piccole rispetto alle dimensioni del sistema) introduce singolarità di carattere puramente matematico. In ultima analisi, le equazioni ottenute con l'approccio differenziale descrivono il comportamento dei sistemi analizzati in modo "esatto" rispetto alle ipotesi poste: questa soluzione esatta è per quantitativamente accessibile solo in pochi e particolari casi: per geometrie in genere regolari ed in presenza di particolari condizioni al contorno.

Per poter analizzare sistemi reali, le equazioni differenziali devono essere discretizzate, fatte risalire cioè dall'infinitesimo a dimensioni che, pur convenientemente piccole, sono comunque finite. Si ottengono in questo modo dei sistemi di equazioni algebriche, oggi "facilmente" risolvibili con l'utilizzo del calcolatore elettronico. Per questo scopo sono state elaborate varie metodologie, alcune tra le

più note delle quali sono il Metodo delle Differenze Finite (FDT), il Metodo degli Elementi Finiti (FEM), il Metodo degli Elementi al Contorno (BEM) e il Metodo dei Volumi Finiti (FVM)¹.

L'implementazione di queste procedure è in genere complessa ed ha il difetto di perdere il legame con il problema fisico in esame.

Il Metodo delle Celle segue invece una strategia differente: anziché affrontare le equazioni differenziali, fondate sull'astrazione teorica del punto per descrivere una realtà fisica discreta, il Metodo si basa sulla formulazione discreta diretta delle leggi fisiche. Fissando l'attenzione direttamente su porzioni di spazio finite, le leggi fisiche del fenomeno in esame sono scritte cioè direttamente in termini discreti, partendo dalle leggi sperimentali. Questa strada permette di costruire direttamente in forma algebrica le equazioni del campo fisico studiato (equazioni di bilancio, equazioni circuitali, equazioni materiali). Il metodo conserva l'aderenza alla realtà fisica del problema studiato, e al contempo segue la metodologia dell'approccio sperimentale sia nella scala di osservazione che nell'attribuire le grandezze fisiche agli elementi geometrici dello spazio.

Questi argomenti meritano una specifica digressione, poiché costituiscono la premessa concettuale della formulazione del Metodo delle Celle.

2.1 Le variabili fisiche

Lo studio delle grandezze fisiche è la prima e fondamentale fase che accompagna la formulazione di un modello descrittivo di qualunque fenomeno fisico. Volendo inquadrare la formulazione finita di una legge fisica, è importante partire proprio da una riflessione attorno alle grandezze fisiche, alla loro natura e alla loro classificazione.

2.1.1 Costanti e variabili

Le grandezze fisiche possono dapprima essere divise in due grandi famiglie: un primo gruppo di grandezze costituito da quei valori che assumono il ruolo di parametri del problema, descrivendone la natura e qualificando attributi il cui valore è assunto invariabile nel fenomeno studiato. È questa la categoria delle **costanti fisiche** cui appartengono tanto le costanti universali (entità come la carica dell'elettrone o la velocità della luce che sono le stesse per qualsiasi problema venga posto in esame) quanto le costanti materiali, entità costanti nel singolo

¹pur usando la formulazione integrale, il Metodo dei Volumi Finiti è comunque basato sulla formulazione differenziale

problema ma che possono assumere valori di volta in volta differenti in ogni caso specifico.

La seconda grande categoria di grandezze fisiche è costituita dalle **variabili fisiche**: si tratta di grandezze il cui valore definisce una singola particolare condizione del sistema trattato. È una categoria di grandezze assai eterogenea tanto dal punto di vista topologico (entità geometriche cui la grandezza viene riferita) quanto dal punto di vista “funzionale”: alcune di queste grandezze contribuiscono in genere a definire il problema; altre sono invece oggetto dell’indagine condotta con il modello matematico; altre ancora sono grandezze che definiscono lo stato energetico del sistema.

Per inquadrare il ruolo e l’importanza delle variabili si possono adottare due criteri di classificazione, il primo basato sull’analisi dell’attribuzione alle entità geometriche del sistema, il secondo che indaga invece il ruolo svolto dalla grandezza nel descrivere il sistema studiato.

2.1.2 Classificazione in base alle entità geometriche di riferimento

La prima classificazione delle variabili avviene in relazione all’estensione degli enti geometrici di riferimento, e distingue le variabili **globali** dalle variabili **locali**.

- le **variabili globali**, chiamate anche *variabili integrali*, sono *funzioni di dominio*, e sono grandezze associate ad elementi discreti dello spazio e del tempo: punti (**P**), linee (**L**), superfici (**S**), volumi (**V**), istanti (**I**) ed intervalli di tempo (**T**).

Le variabili che vengono rilevate sperimentalmente sono di fatto delle variabili globali, e questo fatto è legato alla metodologia stessa della misura, che associa di necessità le grandezze fisiche ad elementi discreti dello spazio. È così che un contenuto di massa resta naturalmente associato ad un volume, un flusso di calore ad una superficie, un impulso ad un intervallo di tempo.

- le **variabili locali**, note come **funzioni di campo**, sono invece delle *funzioni di punto*, analiticamente dipendenti dal posto e dal tempo, e sono le grandezze comunemente utilizzate dalla formulazione differenziale. Esse sono ottenute dalle variabili globali a mezzo degli operatori di densità e di tasso, ossia dal limite del rapporto fra il valore della grandezza globale e l’estensione dell’elemento spazio-temporale cui la grandezza è riferita, al tendere a zero di questa estensione; esse sono pertanto slegate dagli attributi geometrici di partenza.

Va infine precisato che le variabili globali associate ai punti (quali ad esempio lo spostamento nella meccanica dei solidi) si distinguono dalle variabili locali per il fatto di non essere né densità né tassi.

2.1.3 La classificazione delle variabili in base al ruolo

Un'altra importante classificazione avviene invece in relazione al ruolo che le variabili hanno nel descrivere il campo fisico. Sotto questo profilo si individuano:

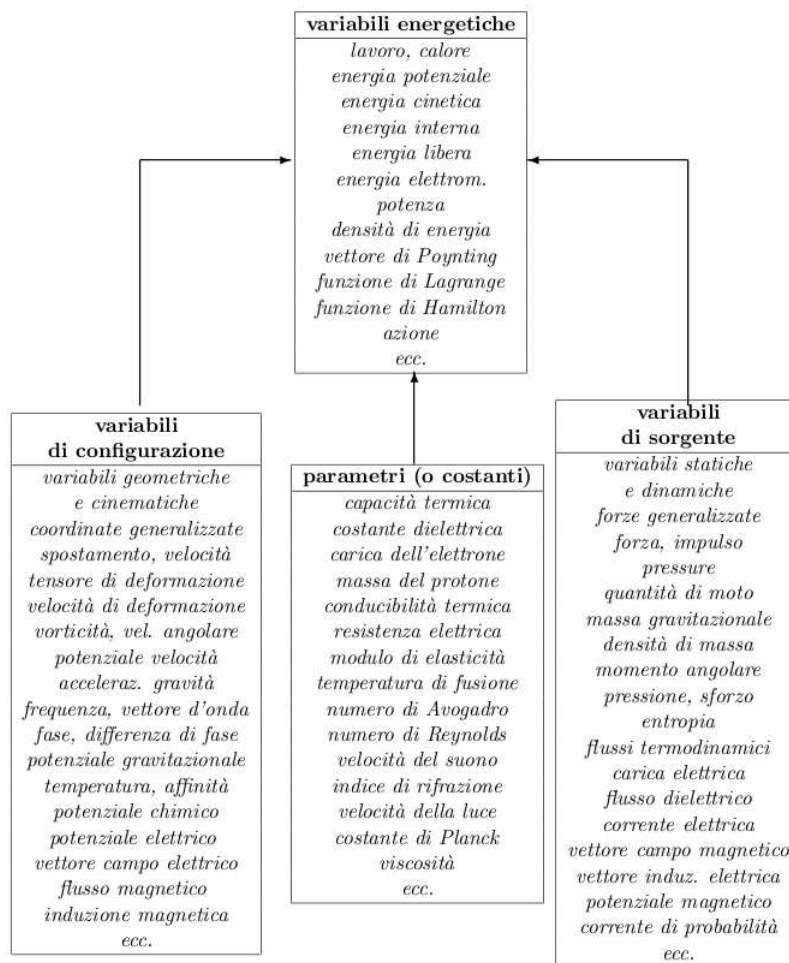


Figura 2.1. Classificazione generale delle grandezze fisiche.

- le **variabili di configurazione** che definiscono appunto la configurazione del sistema. Appartengono alla stessa categoria tutte le variabili ottenute

da variabili di configurazione a mezzo di operazioni di somma, differenza, moltiplicazione per una costante, integrazione, derivazione spaziale o temporale, a patto che nelle operazioni non figurino costanti fisiche. Nell'ambito della meccanica dei continui sono variabili di configurazione le variabili geometriche e le variabili cinematiche;

- le **variabili di sorgente** : sono quelle che definiscono le sorgenti di un campo ossia le entità che generano il campo. Per il campo elastico sono variabili di sorgente la massa e le forze. Appartengono alla stessa classe tutte le variabili ottenibili da variabili di sorgente a mezzo di operazioni di somma, differenza, passaggio al limite, derivazione e integrazione, divisione per una lunghezza, un'area, un volume e un intervallo di tempo. Queste relazioni non devono contenere costanti fisiche;
- le **variabili energetiche** sono ottenute dal prodotto di una variabile di configurazione per una variabile di sorgente. Sono variabili energetiche il lavoro, la potenza e l'energia nelle sue diverse forme (l'energia potenziale, l'energia cinetica, l'energia interna, ...).

Il Metodo delle Celle tratta variabili globali e trae grandi vantaggi teorici dall'ultima delle tre classificazioni proposte. Lo scopo di una classificazione è quello di ordinare gli elementi classificati chiarendo le relazioni che li accomunano e quelle che li differenziano. Le classificazioni proposte sono di tipo funzionale e sono di grande aiuto nell'impostazione della formulazione discreta delle equazioni di campo. Questo fatto è legato alla stretta relazione che si instaura tra le classi di variabili e orientazione degli elementi geometrici cui le variabili sono riferite. Come verrà illustrato nel seguito, esiste in sostanza una particolare corrispondenza tra le variabili fisiche ed attributi degli enti geometrici di appoggio.

Le variabili fisiche globali (siano esse variabili di configurazione, di sorgente o energetiche) vengono riferite alle strutture geometriche elementari dello spazio (punti, linee, superfici e volumi) e del tempo (istanti ed intervalli di tempo). Il segno di queste variabili dipende dall'orientazione attribuita a questi elementi spaziali e temporali di riferimento.

Considerando, ad esempio, un flusso attraverso una superficie, è del tutto evidente come il suo segno (e quindi anche il suo significato) dipenda dall'orientazione attribuita alla superficie attraversata. Cambiando l'orientazione della superficie cambia di conseguenza il segno del flusso, ma il suo significato (ad esempio di flusso entrante o uscente in un volume di cui la superficie è contorno) non viene alterato.

2.2 L'orientazione degli elementi spaziali

Gli elementi geometrici dello spazio utilizzati usualmente per riferire le variabili globali possono tutti venire orientati nello spazio. Più precisamente sono possibili due tipi di orientazione di un elemento spaziale, quella interna e quella esterna, ciascuna delle quali è dotata di versi.

2.2.1 Orientazione interna degli elementi spaziali

L'orientazione interna di un elemento geometrico è un'orientazione che viene fatta sull'elemento stesso. Da un punto di vista puramente geometrico questo significa che per definire un'orientazione interna non necessario stabilire l'ambiente geometrico in cui l'oggetto inserito.

Si ha così che un punto² viene orientato internamente stabilendo un verso di "avvicinamento" considerato come positivo, ossia stabilendo se il punto sia "sorgente" oppure "pozzo". Per orientare internamente una linea se ne stabilisce un verso di percorrenza; per un elemento di superficie è invece necessario stabilire un verso di percorrenza del suo contorno. Un volume viene infine orientato internamente quando siano fissate delle orientazioni compatibili sulle sue facce di contorno.

2.2.2 Orientazione esterna degli elementi spaziali

L'orientazione esterna di un elemento geometrico dipende dalla dimensione dello spazio in cui l'elemento è considerato immerso. Mentre l'orientazione interna una proprietà intrinseca, l'orientazione esterna cambia, a seconda che l'elemento geometrico sia considerato nel piano o nello spazio. Questo tipo di orientazione è meno immediata di quella interna, e merita una pertanto una disamina dettagliata.

²essendo il punto un'entità geometrica priva di estensione è lecito ritenere che una sua orientazione sia priva di senso geometrico. Anche se la nozione non ha un significato immediato, essa ha comunque senso per le proprietà formali che permette di mantenere. Per analogia si può pensare all'elevamento a potenza: scrivere n^0 un'espressione in sé priva di significato, se rapportata alla definizione che prevede di moltiplicare n per se stesso, 0 volte. La nota regola $n^a/n^b = n^{a-b}$, estesa al caso in cui $a = b$, permette per di dare significato all'espressione n^0 che diviene, come noto, $n^0 = n^{a-a} = n^a/n^a = 1$. Attribuire significato all'espressione n^0 permette di conservare le proprietà formali dell'elevamento a potenza.

2.2.2.1 Orientazione esterna di una linea

La figura (2.2) rappresenta le possibili orientazioni esterne di un segmento: considerato nel piano, il segmento è orientato esternamente da un verso di attraversamento; nello spazio l'orientazione esterna viene definita da un senso di rotazione attorno ad esso; in uno spazio unidimensionale l'orientazione è invece costituita da due frecce che ne stabiliscono idealmente come positiva la trazione ovvero la compressione.

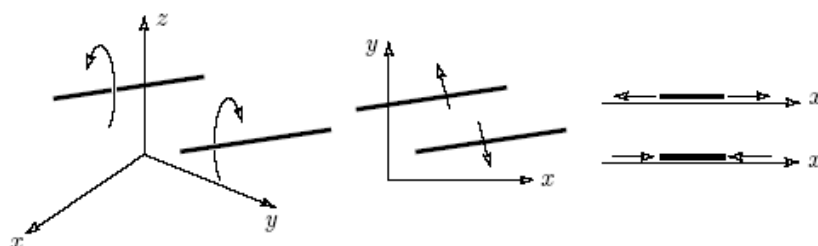


Figura 2.2. L'orientazione esterna di una linea dipende dalle dimensioni dello spazio in cui la si considera

2.2.2.2 Orientazione esterna di una superficie

La più nota orientazione esterna di una superficie è quella che viene fatta nello spazio, attribuendole un verso di attraversamento. È in relazione a questo tipo di orientazione che assume significato il flusso di una grandezza attraverso una superficie.

In un ambiente bidimensionale, un elemento di superficie riceve un'orientazione esterna quando sia attribuita una direzione positiva di attraversamento del suo contorno (ovvero quando il suo contorno abbia ricevuto un'orientazione esterna).

2.2.2.3 Orientazione esterna di un volume

L'orientazione esterna di un volume (ristretta evidentemente al solo caso tridimensionale, non sussistendo volumi immersi nel piano) è costituita da un verso di attraversamento della sua superficie di contorno. Da notare che anche in questo caso l'orientazione esterna di un volume viene indotta dall'orientazione esterna della superficie di contorno.

2.2.2.4 Orientazione esterna di un punto

Conservando l'idea di una definizione convenzionale che permetta di conservare le proprietà formali, anche il punto può essere dotato di un'orientazione esterna. Ipotizziamo allora di considerare un cubo dotato di orientazione interna e un punto posto al centro del cubo: i sensi di rotazione definiti sulle facce del volume possono vedersi come sensi di rotazione delle semirette con origine nel punto. È ragionevole considerare orientazione esterna di un punto quella costituita dai sensi di rotazione delle semirette con origine nel punto.

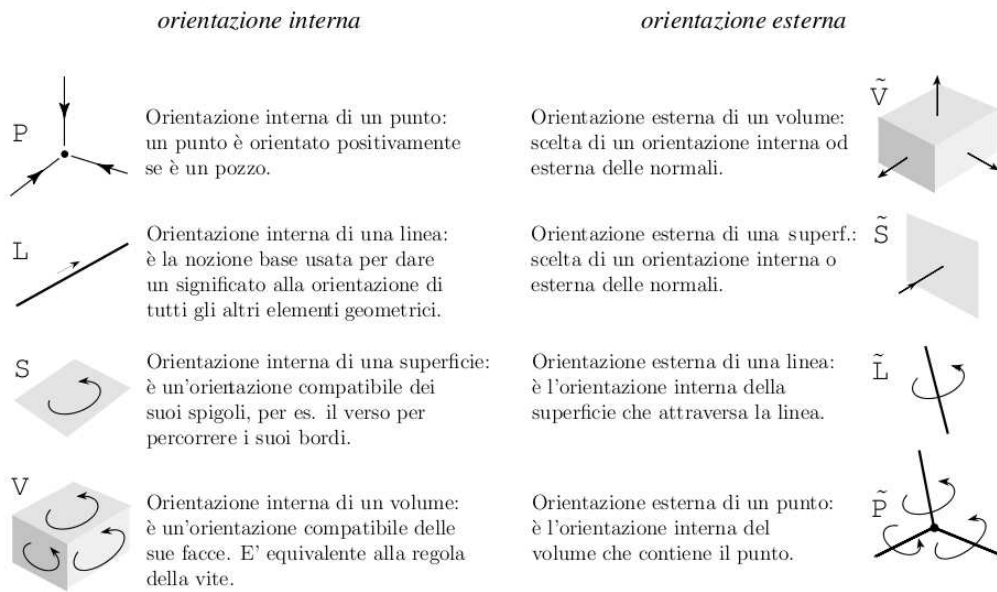


Figura 2.3. Orientazioni interna ed esterna degli elementi geometrici di base nello spazio tridimensionale

Osservazione

Dall'esposizione dei vari casi di orientazione esterna emerge una significativa dualità tra oggetti muniti di orientazione interna e oggetti dotati di un'orientazione esterna. Questo legame si esprime nel fatto che un'orientazione interna (esterna) di un oggetto induce un'orientazione esterna (interna) sul suo duale. Questa regola della mutua induzione ha una piccola eccezione: i punti sono tradizionalmente orientati internamente come pozzi: questo indurrebbe di necessità un'orientazione esterna dei volumi (entità duali dei punti nello spazio tridimensionale), le cui facce verrebbero a ricevere tutte un verso di attraversamento positivo dall'esterno all'interno del volume. Tradizionalmente, però, si considerano

quasi sempre positive le normali alle facce uscenti dal volume, assumendo quindi un'orientazione discorde da quella suggerita dall'orientazione interna di punti.

2.3 L'orientazione degli elementi temporali

Alcune grandezze fisiche sono riferite al tempo. Per le variabili locali il tempo è una delle coordinate da cui la grandezza può dipendere, al pari delle coordinate spaziali. L'espressione generalizzata di una grandezza locale è infatti $g = g(x, y, z, t)$.

Le grandezze globali, e dunque nel mondo della realtà discreta, possono essere invece associate agli istanti di tempo, ovvero essere riferite ad intervalli di tempo: istanti ed intervalli sono le entità temporali di riferimento la cui definizione è intuitiva perché corrispondente alla quotidiana esperienza di ciascuno: l'istante quel riferimento temporale usato per collocare un evento (ad esempio l'arrivo dell'autobus ad una fermata); l'intervallo, tempo intercorrente tra due istanti, è invece il riferimento naturale per fenomeni che non sono puntuali, ma che hanno uno svolgimento nel tempo (ad esempio il tempo necessario all'autobus per raggiungere la fermata successiva).

Per fare un esempio di ambito fisico, il vettore posizione di una particella r è una variabile associata agli istanti mentre lo spostamento s è una grandezza attribuita agli intervalli.

Al pari degli elementi geometrici, anche istanti ed intervalli possono ricevere tanto un'orientazione interna quanto un'orientazione esterna.

2.3.1 Orientazione interna

La naturale orientazione interna di un intervallo di tempo T è costituita dal verso assegnato all'asse dei tempi: un intervallo di tempo è cioè orientato dall'istante precedente a quello successivo. L'orientazione degli istanti è in qualche modo omologa all'orientazione interna di punti, e il suo significato convenzionale discende dall'esigenza di garantire delle proprietà formali prodotte dall'orientazione interna. Gli istanti sono orientati come pozzi ovvero sono considerati positivi gli intervalli che arrivano all'istante I e negativi quelli che escono dall'istante I .

2.3.2 Orientazione esterna

L'orientazione esterna è, anche per gli elementi temporali, più complessa. Consideriamo due intervalli di tempo consecutivi T^- e T^+ , come indicato in figura (2.4) e consideriamo un istante interno a ciascun intervallo, ad esempio gli

istanti medi, indicati rispettivamente con le notazioni $\tilde{I}^-$ ed $\tilde{I}^+$. Questi istanti vengono detti istanti duali, poiché si pongono come corrispondenti agli intervalli di tempo definiti da coppie di istanti primali. L'intervallo di tempo $\tilde{T}$ che decorre tra due istanti duali prende il nome di intervallo duale. Vi è un'evidente corrispondenza (dualità) fra istanti primali e intervalli duali e fra intervalli primali e istanti duali.

L'orientazione interna di un'istante primale induce naturalmente un'orientazione del corrispondente intervallo duale. Questa appenda descritta è l'orientazione esterna di un intervallo, che corrisponde, per analogia, ad una sorta di trazione o compressione dell'intervallo.

Analogamente l'orientazione interna di un intervallo primale trasferisce sull'istante duale corrispondente una direzione di attraversamento, che ne costituisce l'orientazione esterna.

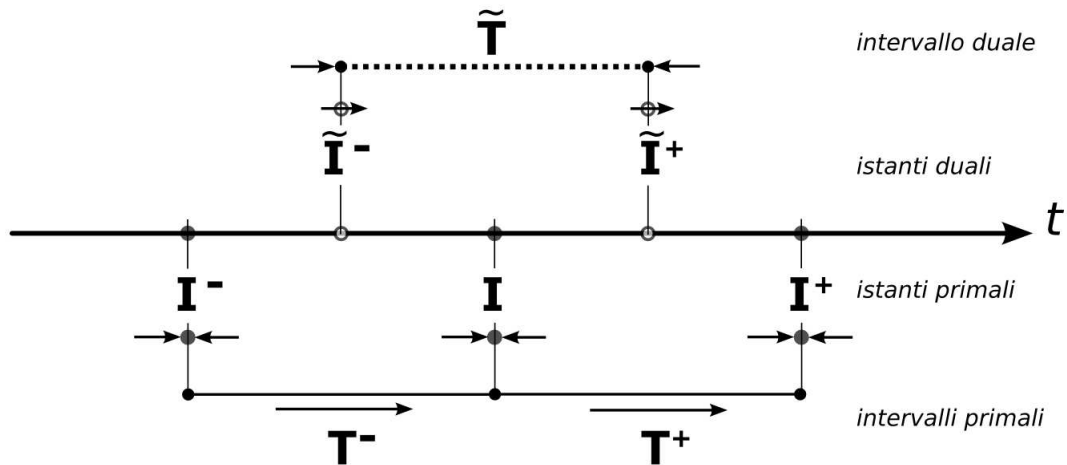


Figura 2.4. Orientazione esterna degli istanti e degli intervalli di tempo

Si noti che sull'asse dei tempi si sono individuate due classi entità: gli istanti temporali I tra cui sono individuati gli intervalli T costituiscono un primo ordine di elementi, denominati primali. Da questi elementi si sono ricavati gli istanti $\tilde{I}$ ed i corrispondenti intervalli $\tilde{T}$: queste entità sono denominate duali, poiché corrispondenti alle entità primali, e sono ad esse strettamente correlate.

Istanti e intervalli primali sono dotati di orientazione interna; istanti e intervalli duali sono invece dotati di orientazione interna, indotta dall'orientazione delle corrispondenti entità primali.

2.4 Attribuzione delle variabili agli elementi geometrici

Le grandezze fisiche globali sono associate ad elementi geometrici orientati. In termini generali si può affermare che la definizione stessa di una variabile, ovvero le sue modalità di misura sperimentale, forniscono l'indicazione dell'ente geometrico cui la grandezza è riferita. Circa invece l'orientazione di questo ente geometrico (interna o esterna) si osserva che per molte variabili il cambiamento di orientazione dell'ente geometrico comporta un cambiamento di segno della variabile stessa.

Queste affermazioni vengono di molto chiarite da qualche esempio: il già citato caso del flusso (ad esempio di calore) attraverso una superficie è per definizione la quantità di calore che fluisce attraverso una superficie assegnata in un dato intervallo di tempo. Il flusso è dunque una grandezza naturalmente associata agli elementi di superficie e agli intervalli di tempo. Si tratta ora di stabilire se l'orientazione degli elementi di superficie sia interna o esterna: si osserva allora che il flusso indica una quantità in transito attraverso la superficie: cambiando il verso positivo di attraversamento della superficie il valore del flusso cambia di segno. Poiché indicare un verso di attraversamento positivo significa precisare un'orientazione esterna, si ha evidentemente che il flusso è riferito ad elementi di superficie orientati esternamente.

Per proseguire nell'ambito della termostatica, risulta evidente che la temperatura è una variabile associata ai punti, e che la differenza di temperatura è di conseguenza associata a segmenti: cambiando il verso di percorrenza del segmento la differenza di temperatura cambia segno; l'orientazione dei segmenti di riferimento è quella interna.

Analoga situazione si ha per le attribuzioni agli elementi temporali. Una grandezza può essere associata agli istanti oppure ad intervalli di tempo; nella precedente sezione (2.3) si è parlato di istanti e di intervalli primali e duali: gli elementi primali dotati di orientazione interna, gli enti duali di orientazione esterna.

Una grandezza associata agli intervalli che cambi segno per inversione temporale, necessita evidentemente di un'orientazione interna dell'intervallo di tempo, essendo legata al verso di percorrenza. Peraltro non si vede il significato fisico del cambiamento del verso per un intervallo dotato di orientazione esterna.

La velocità, che cambia segno invertendo la direzione di percorrenze dell'asse dei tempi, viene indubbiamente associata a intervalli primali, mentre l'impulso, invariante rispetto al verso di percorrenza, è legato ad intervalli duali.

In conclusione si può rilevare come le variabili di configurazione risultino sistematicamente associate elementi dotati di orientazione interna; per contro le variabili di sorgente risultano associate ad elementi dotati di orientazione esterna.

2.5 I complessi di celle

Nella trattazione differenziale si utilizzano le funzioni di punto e risultano pertanto fondamentali i sistemi di coordinate, utili a collocare i punti nello spazio e, quindi, a collocare le grandezze fisiche.

La trattazione discreta considera invece grandezze globali che sono, come detto, riferite a punti, linee, superfici e volumi. Il riferimento spaziale costituito dai sistemi di coordinate risulta pertanto uno strumento insufficiente: è necessaria invece una struttura organizzata di elementi geometrici (volumi, facce, spigoli e punti) a cui poter attribuire le grandezze da collocare nello spazio. Questa struttura costituita dai complessi di celle.

In termini pratici l'operazione non è nuova: si tratta di dividere il dominio in tante porzioni (celle) di forma arbitraria e di dimensioni opportune. Questo primo complesso di celle è detto *complesso primale*: esso è sin qui analogo all'insieme di elementi delle mesh che si usano comunemente quando si adopera un metodo numerico tradizionale che discretizza le equazioni differenziali. Nonostante questa iniziale analogia, si preferisce utilizzare il termine "complesso di celle" in luogo di mesh, in quanto tutti gli elementi geometrici che formano il complesso sono coinvolti nella formulazione discreta.

Vi è poi un'altra differenza fra "mesh" tradizionalmente intesa e i complessi di celle: dato un complesso di celle di forma qualunque, si può individuare in maniera arbitraria un punto all'interno di ogni cella. Congiungendo tali punti interni per ogni coppia di celle adiacenti si ottiene un secondo complesso di celle. A questo secondo complesso di celle si dà il nome di *complesso duale*.

Vi è una stretta corrispondenza reciproca (dualità) tra i due complessi di celle, tale da giustificare l'attributo di "duale" nella denominazione del secondo sistema di celle: innanzitutto ad ogni elemento del complesso primale corrisponde un opportuno elemento del complesso duale, secondo il legame illustrato nella seguente tabella (2.5)

Un complesso di celle, inteso come insieme piccole porzioni adiacenti che compongono un dominio, è formato da punti, spigoli, facce e volumi: topologicamente questi elementi sono considerati celle di dimensione, rispettivamente zero, uno, due e tre, e si parla infatti di 0-celle, 1-celle, 2-celle e 3-celle. Dal punto di vista topologico un complesso di celle è non già un insieme di volumi, quanto piuttosto un insieme di celle di varia dimensione. Dal punto di vista formale ad

elementi del complesso primale		elementi del complesso primale
punti P	$\Leftrightarrow$	volumi $\tilde{V}$
linee L	$\Leftrightarrow$	superfici $\tilde{S}$
superfici S	$\Leftrightarrow$	linee $\tilde{L}$
volumi V	$\Leftrightarrow$	punti $\tilde{P}$

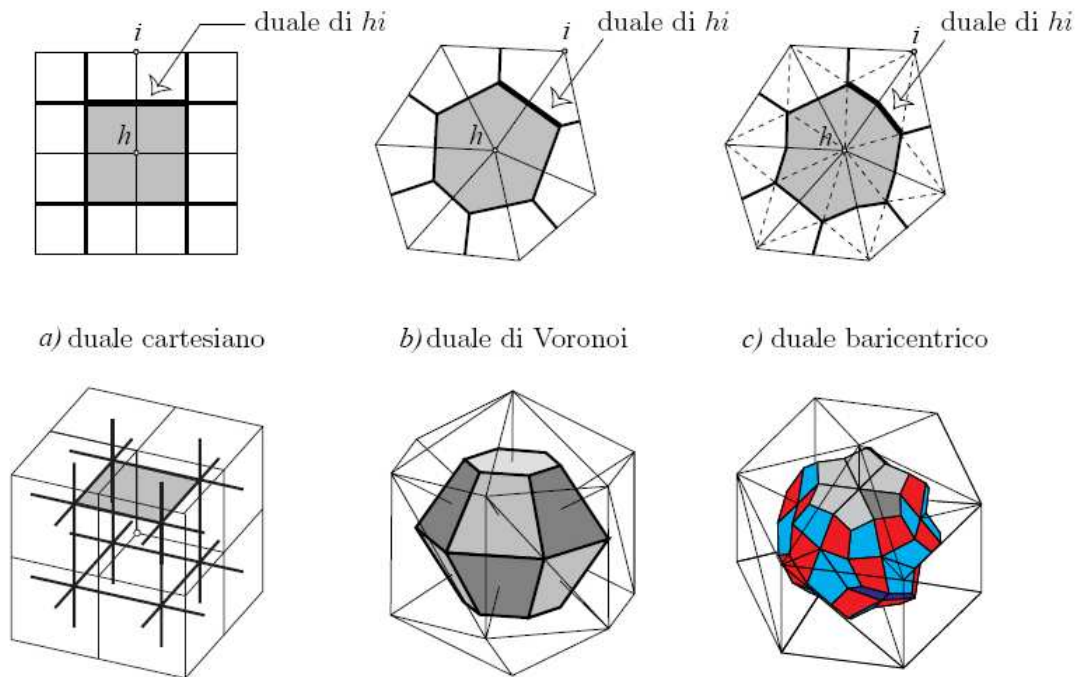


Figura 2.5. Celle primali e celle duali nello spazio a 2 e a 3 dimensioni

una cella primale di ordine p corrisponde un elemento del sistema duale di ordine $n - p$, e viceversa, essendo n la dimensione dello spazio in cui si considera il sistema di celle.

Altro aspetto di dualità riguarda l'orientazione degli elementi dei due sistemi di celle: la figura (2.3) evidenzia come un'orientazione interna delle celle primali induca un'orientazione esterna delle corrispondenti celle duali.

La figura (2.5) illustra la formazione di celle duali nel piano e nello spazio con diverse forme di celle primali. Va rilevato il fatto che tanto la scelta del punto all'interno di ogni cella primale (0-cella duale in ogni 2 o 3-cella primale), quanto il modo di unire tali punti (collegamento diretto oppure appoggiato al baricentro

dei lati o delle facce delle celle primali) sono assolutamente arbitrari. Le più semplici figure geometriche che compongono un complesso di celle nel piano sono i triangoli: un complesso del genere viene pertanto detto complesso simpliciale; il complesso simpliciale nello spazio è invece costituito da tetraedri. Per entrambi questi complessi la costruzione delle celle duali viene comunemente effettuata adottando come punti duali i baricentri oppure i circocentri (sferocentri) delle celle primali.

Rispetto ai termini dell'orientazione viene chiamato primale il complesso di celle cui si attribuisce orientazione interna; conseguentemente il complesso duale è quello che riceve dal complesso primale un'orientazione sterna.

Un'altro aspetto della dualità dei sistemi di celle riguarda l'attribuzione delle grandezze fisiche agli elementi geometrici: se associamo alle celle del sistema primale le variabili fisiche di configurazione, e attribuiamo dunque al complesso primale orientazione interna, si produce una naturale associazione delle variabili di sorgente (che come detto necessitano di orientazione esterna) ai corrispondenti elementi duali. La costruzione del sistema duale mette cioè a disposizione le strutture necessarie ad "ospitare" le variabili di sorgente che completano la definizione del sistema fisico in esame.

Questa è la manifestazione di una stretta corrispondenza che sussiste fra la classificazione fisica delle variabili e la classificazione geometrica. La sistematica associazione fra variabili fisiche ed elementi spaziali orientati dei due sistemi di celle è un punto fondamentale per la formulazione finita diretta delle leggi fisiche dei campi.

Resta ora evidente una sostanziale differenza fra i complessi di celle e le "mesh" tradizionali:

- costruire un complesso di celle significa certo dividere un dominio in tante porzioni discrete, ma significa anche costruire il sistema di elementi geometrici duali a quelli appena creati. Questa operazione, che è funzionale alla formulazione discreta usata dal Metodo delle Celle, non ha un omologo nella pratica usuale dei metodi numerici citati;
- le variabili globali sono associate alle celle (0-celle = vertici; 1-celle = lati; 2-celle = facce; 3-celle = volumetti). Data una grandezza Q associata ad elementi spaziali di dimensione p , ne viene che ad ogni cella p -dimensionale c_k del complesso di celle risulta associato un valore Q_k della grandezza Q . In questo modo la distribuzione della grandezza Q è descritta dalla N -pla $(Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$. Nella topologia algebrica una tale distribuzione porta il nome (quanto mai infelice) di "co-catena". Noi la denoteremo con un termine più

semplice ed espressivo di distribuzione p -dimensionale. Essa è l'analogo di una funzione di campo, usata nella formulazione differenziale, la quale associa ad ogni punto (non ad ogni p -cella) la densità q della grandezza Q . Una distribuzione p -dimensionale è una funzione di dominio o funzione di insieme mentre una funzione di campo è una funzione di punto.

2.6 Impostazione del problema con il Metodo delle Celle

Un problema fisico viene ben posto quando siano precisati:

- forma e dimensione del dominio;
- natura e posizione delle sorgenti;
- le caratteristiche materiali;
- le condizioni al contorno.

Risolvere il problema di campo significa allora determinare la distribuzione spaziale e temporale della variabile principale di configurazione (denominata in genere come potenziale del problema in esame). Qualunque strada si segua per affrontare la soluzione del problema, si perviene sempre alla formulazione di un'equazione fondamentale, algebrica o differenziale a seconda dell'impostazione adottata. Questa equazione nasce dalla composizione di due categorie di equazioni:

- equazioni di struttura;
- equazioni costitutive.

2.6.1 Equazioni di struttura

Le equazioni di struttura sono le equazioni che forniscono la struttura di una teoria e ne forniscono, per così dire, le colonne portanti. Esse sono dette anche equazioni topologiche e legano di fatto grandezze associate a celle di ordine n a celle di ordine $n + 1$: è il caso del gradiente di una funzione, grandezza associata alla linea che congiunge due punti in cui sono noti dei valori scalari; le equazioni circuitali associano invece ad una superficie una grandezza correlata a grandezze associate alle linee; le equazioni di bilancio realizzano infine una relazione fra grandezze associate a superfici con grandezze associate ai volumi. Le caratteristiche di queste equazioni sono:

- legare tra di loro variabili dello stesso tipo (variabili di configurazione con variabili di configurazione, variabili di sorgente con variabili di sorgente);
- non contenere costanti materiali;
- essere valide a qualsiasi scala dimensionale.

La validità ad ogni scala dimensionale significa in particolare che le equazioni di struttura sono le stesse a prescindere dalla forma, dalle dimensioni e dalla natura del mezzo materiale della porzione di campo sul quale sono scritte. In particolare si ha che le equazioni di struttura valgono, inalterate, tanto per la trattazione differenziale quanto per quella discreta.

Equazioni di bilancio

Le equazioni fondamentali di molte teorie fisiche sono basate su un'equazione di bilancio. Considerata una regione chiusa dello spazio V in cui sia definita una generica grandezza estensiva Q , l'equazione di bilancio esprime le variazioni della grandezza Q che si realizzano all'interno del volume V in un dato intervallo di tempo T . Nella sua forma generale un'equazione di bilancio può essere espressa come:

$$Q^{prod} = Q^{acc} + Q^{usc} \quad (2.1)$$

dove

Q^{prod} è la produzione netta della grandezza Q entro il volume V nell'intervallo di tempo T ;

Q^{acc} è l'accumulo netto della grandezza Q entro il volume V nell'intervallo di tempo T ;

Q^{usc} è il flusso uscente netto della grandezza Q attraverso la superficie di contorno del volume V nell'intervallo di tempo T ;

A sua volta la quantità accumulata Q^{acc} è costituita dalla differenza:

$$Q^{acc} = Q^{finale} - Q^{iniziale} \quad (2.2)$$

fra la quantità contenuta entro V all'istante finale e all'istante iniziale dell'intervallo di tempo T su cui si considera il bilancio.

Quando il termine di produzione di Q sia nullo, si parla di **equazione di conservazione**; sono equazioni di conservazione l'equazione di bilancio della massa per un sistema chiuso e l'equazione di bilancio dell'energia di un sistema isolato.

Un'altra specializzazione dell'espressione generale dell'equazione di bilancio si

ha nel caso di sistemi stazionari, ovvero sistemi che non hanno evoluzione nel tempo. È il caso del bilancio statico delle forze che descrive l'equilibrio di un corpo, per il quale si ha un'espressione generale del tipo:

$$F[\partial\tilde{V}] + F[\tilde{V}] = 0 \quad (2.3)$$

dove $F[\tilde{V}]$ descrive le forze di volume agenti sul volume $\tilde{V}$, mentre il termine $F[\partial\tilde{V}]$ le forze di superficie che agiscono sul suo contorno.

Va notato che la forza può essere vista come flusso della quantità di moto, e pertanto l'equazione di equilibrio può essere vista come equazione di stazionarietà del flusso della quantità di moto.

Appare infine rilevante accennare al fatto che il bilancio più che una legge fisica in sé, è un costrutto della pensiero logico dell'uomo che trova applicazioni in molti ambiti applicativi. La sua importanza oltre che concettuale è quella di porre in relazione quantità (accumulate, prodotte, transitate) definite da altre leggi fisiche.

2.6.2 Equazioni costitutive

Le equazioni costitutive sono delle relazioni che definiscono la costituzione del sistema, riportando i parametri caratteristici del mezzo in cui hanno luogo i fenomeni studiati. Queste equazioni caratterizzano il comportamento dei materiali presenti rispetto al problema studiato, e pertanto identificano un modello di comportamento. Sono esempi di legge costitutiva le leggi nella meccanica dei solidi che descrivono il modello di comportamento elastico, plastico, viscoelastico di un materiale.

Le equazioni costitutive sono anche chiamate *equazioni di comportamento* o, nella termostatica, *equazioni di stato*. Caratteristiche essenziali delle equazioni costitutive sono:

- legare variabili differenti (variabili di configurazione con variabili di sorgente);
- contenere costanti materiali;
- essere valide in regioni a campo uniforme, intendendo per campo uniforme l'uniformità del gradiente del potenziale del campo.

Di fatto le equazioni costitutive costituiscono un "ponte" tra le variabili di configurazione e le variabili di sorgente di uno stesso campo.

Il requisito di uniformità del campo pone dei limiti precisi alla validità delle equazioni costitutive: il problema viene affrontato in modo diverso dalla trattazione differenziale e quella discreta. L'approccio differenziale scrive le equazioni relativamente ad intorni infinitesimi del punto, situazione in cui qualsiasi funzione

è approssimabile al primo ordine e, di conseguenza, il suo gradiente risulta uniforme. La formulazione discreta considera invece porzioni di sistema piccole ma finite, all'interno delle quali si considera il campo uniforme. Questa strada, seguita dal Metodo delle Celle, accetta a priori un'approssimazione cui si è comunque costretti all'atto di discretizzare le equazioni ottenute con l'approccio differenziale che vengono "forzate" (non senza accettare approssimazioni) ad avere validità su porzioni di sistema di estensione finita.

2.6.3 I diagrammi di Tonti

Per la formulazione di un modello di analisi di un sistema fisico, viepiù quando si intenda fornirne una formulazione discreta, è essenziale individuare le grandezze coinvolte e gli enti geometrici cui esse sono riferite. Secondariamente, in termini logici, è necessario rilevare le relazioni che sussistono tra le grandezze tra di loro e nella loro eventuale evoluzione temporale. Si ottiene in questo modo il quadro completo della struttura logica utilizzata, strumento molto importante ai fini tanto della rappresentazione del modello di analisi quanto per l'implementazione di procedure per il calcolo per via numerica della soluzione.

Un'efficace rappresentazione sintetica del modello fisico approntato per la soluzione di un problema offerta dai *diagrammi di Tonti*: si tratta di grafici che evidenziando il percorso che conduce alle equazioni risolutive passando attraverso le varie equazioni di struttura e costitutive. Inoltre evidenziano la suddivisione in variabili di sorgente e configurazione e presentano le attribuzioni delle variabili stesse agli enti geometrici e temporali. Uno schema generale di riferimento presentato in figura (2.6). Il diagramma è tridimensionale, e si compone di due piani: il secondo piano, rappresentato a tratto fine, ospita le grandezze integrali nel tempo; in primo piano (in grassetto) sono invece collocate le grandezze che si ottengono dalle precedenti tramite un'operazione di differenza nel tempo, ossia l'analogo discreto della derivazione temporale.

In ciascun piano figurano due colonne di caselle, cui corrispondono i simboli P , L , S e V che si riferiscono rispettivamente ai punti, alle linee, alle superfici e ai volumi. La colonna di sinistra rappresenta le entità primali, quella di destra le corrispondenti entità duali. Da notare che gli elementi duali, in ordine ovviamente inverso, sono identificate dalle stesse lettere cui è sovrapposto il simbolo tilde.

Poiché le caselle sono destinate ad ospitare una o più grandezze coinvolte nella formulazione, ne deriva che le variabili di configurazione si collocheranno nelle caselle della colonna di sinistra, mentre le variabili di sorgente troveranno collocazione nelle caselle della colonna di destra. Le equazioni di struttura, che legano

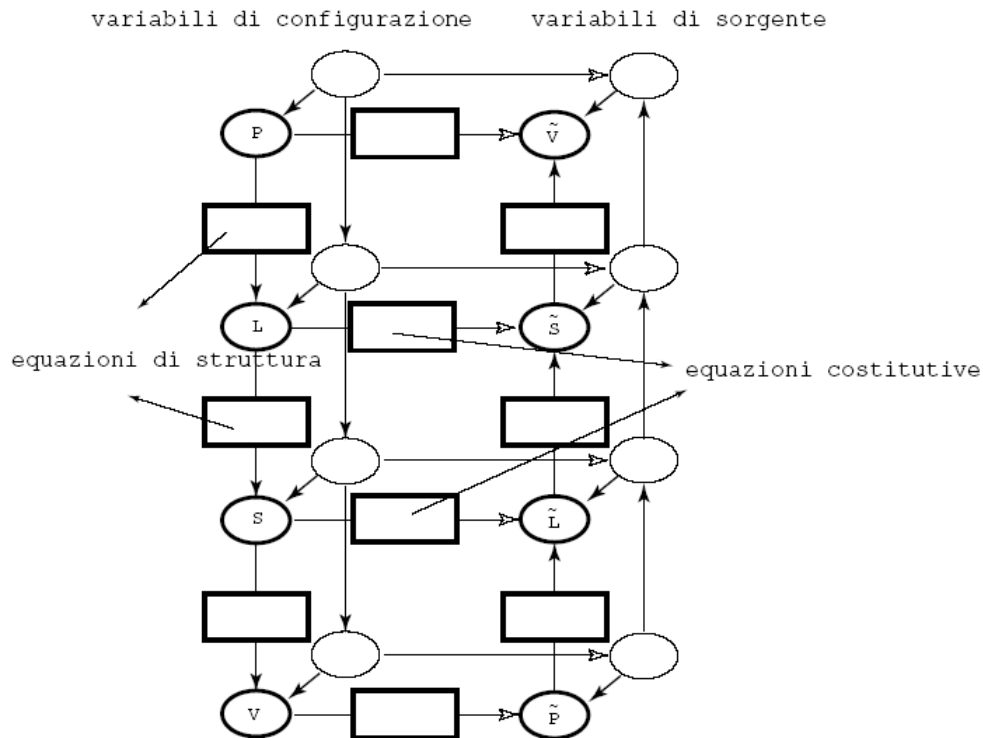
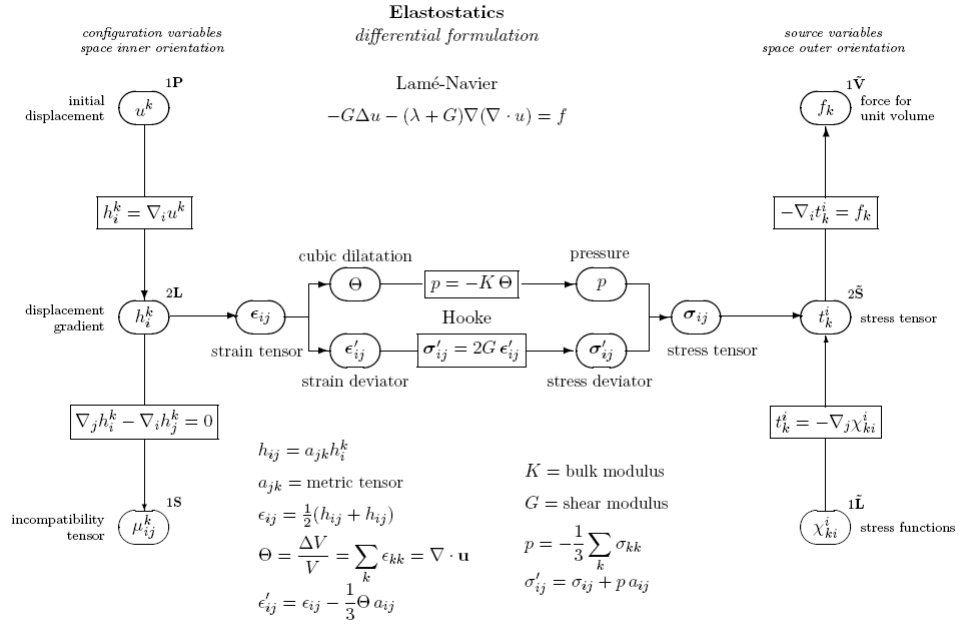


Figura 2.6. Schema generale di un diagramma di Tonti per l'illustrazione delle variabili, delle entità geometriche (n -celle) di riferimento e delle equazioni che definiscono le relazioni tra le grandezze coinvolte

variabili dello stesso tipo, sono rappresentate da frecce verticali; le equazioni costitutive, che costituiscono invece una sorta di "ponte" tra le due categorie di grandezze, rappresentate da frecce orizzontali od oblique che collegano caselle appartenenti a colonne opposte. L'equazione risolvibile si ottiene componendo le equazioni di struttura e quelle costitutive, ottenendo un legame fra variabile di configurazione e quella di sorgente del campo.

Lo schema proposto è certamente uno schema generale e non è detto che tutti i legami che è possibile indicare debbano necessariamente essere sempre presenti. Nel caso di problemi stazionari, ad esempio, il diagramma perde evidentemente la sua tridimensionalità e si riduce ad una rappresentazione piana dei legami tra le grandezze coinvolte. Le figure (2.7) e (2.8) riportano il diagramma di Tonti per il problema elastico, riassumendo con evidente sinteticità le relazioni fondamentali della meccanica dei continui nella formulazione differenziale e finita, rispettivamente..



Ref: Fung Y.C., Foundation of Solid Mechanics, Prentice Hall, 1965, p.129

Figura 2.7. Diagramma di Tonti per la formulazione differenziale dell'elestostatica

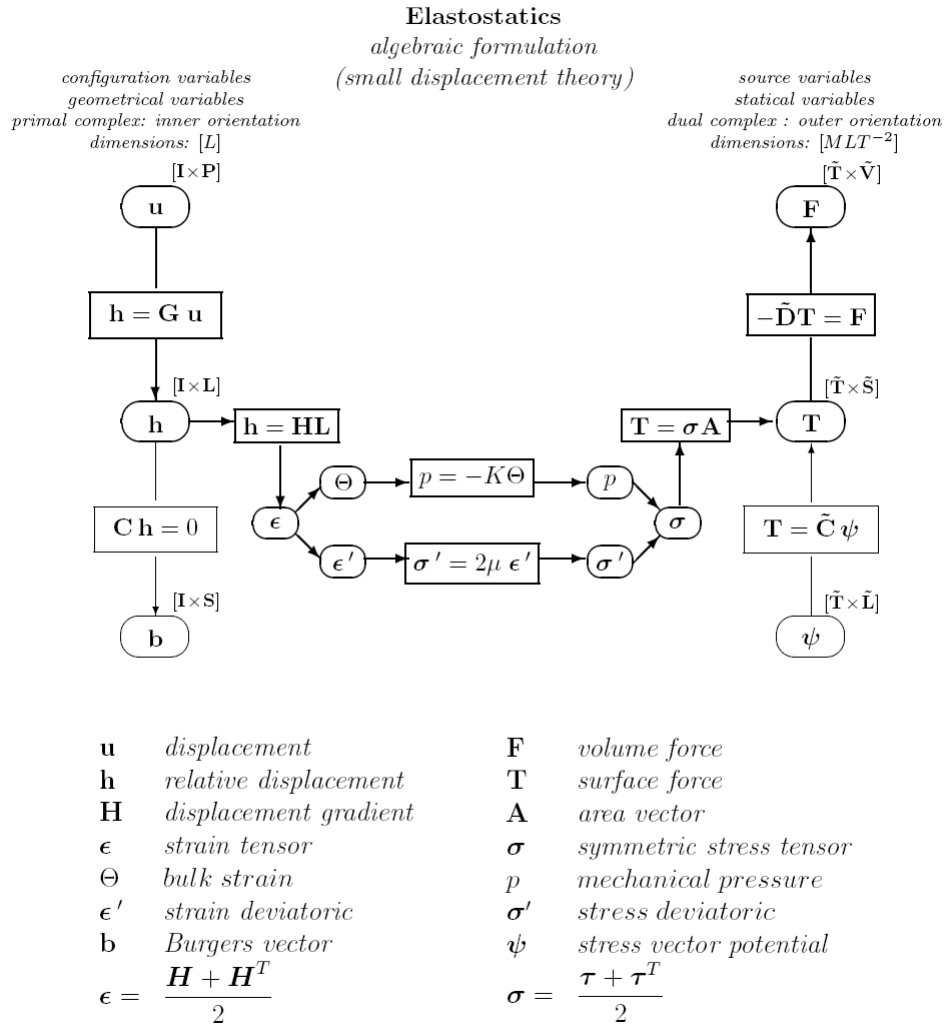


Figura 2.8. Diagramma di Tonti per la formulazione finita dell'elestostatica

Capitolo 3

Formulazione quadratica con il Metodo delle Celle

Rispetto al Metodo degli Elementi Finiti, il Metodo delle Celle utilizza un approccio metodologico completamente diverso: l'uso delle variabili di dominio in luogo delle funzioni di punto, l'attribuzione delle grandezze agli elementi geometrici secondo i processi sperimentali utilizzati per la loro misura, sono due elementi fondamentali che portano ad una formulazione discreta diretta senza dover fare ricorso alla formulazione differenziale. È stato dimostrato [30] che, pur usando un approccio completamente diverso, il CM, usando i semplici, è in grado di ottenere la stessa matrice di rigidezza costruita con il Metodo degli Elementi Finiti. Relativamente all'uso dei semplici, la differenza tra i due metodi, in termini di risultati ottenibili, risiede solo nella differente costruzione del termine noto del sistema lineare che descrive la soluzione approssimata del problema. In particolare i due metodi sono caratterizzati dallo stesso valore di ordine di convergenza.

Quando però si adotti la formulazione quadratica, il Metodo delle Celle ha dimostrato di poter ottenere il quarto ordine di convergenza, superiore al valore ordinariamente ottenibile dal FEM con la medesima interpolazione. Questo è possibile grazie ad una particolare costruzione del complesso di celle duale ottenuta appoggiando la divisione delle celle primali ai punti di Gauss dei suoi lati. Questa proprietà è stata verificata relativamente alla soluzione numerica dell'equazione di Poisson per domini bidimensionali. Resta l'interrogativo circa il fatto che questa possibilità di ottenere il quarto ordine di convergenza permanga nella soluzione dei problemi tridimensionali.

In questo capitolo verrà presentata l'implementazione dell'interpolazione quadratica per la soluzione dell'equazione di Poisson in domini tridimensionali con il Metodo delle Celle; verrà dimostrato come, ancora, un'opportuna costruzione

del complesso duale permetta di ottenere l'ordine di convergenza 4. In conclusione l'uso dell'interpolazione quadratica verrà presentato nella sua estensione allo studio dei corpi elastici in regime di piccoli spostamenti, verificando la precisione della soluzione ottenibile in un problema di riferimento standard e comparando i risultati sia con la soluzione teorica del problema che con i valori ottenuti da un'analisi FEM di confronto.

3.1 Problemi scalari tridimensionali

In questo paragrafo verrà presentata l'implementazione del Metodo delle Celle con interpolazione quadratica nella soluzione dell'equazione di Poisson in domini tridimensionali.

Come problema di riferimento viene assunta la conduzione termica in regime stazionario. Dopo l'illustrazione dell'implementazione verrà descritto il test di valutazione dell'accuratezza nella soluzione di un problema di controllo di cui è nota la soluzione analitica, comparando i risultati con quanto ottenuto da un'analisi gemella (con identiche mesh, interpolazione e condizioni al contorno) condotta con un codice commerciale FEM.

3.1.1 Interpolazione quadratica

Il campo delle temperature viene approssimato all'interno di ogni cella con un polinomio di secondo grado:

$$T(x,y,z) = a + bx + cy + dz + exy + fyz + gzx + hx^2 + iy^2 + lz^2 \quad (3.1)$$

La funzione, che ha 10 coefficienti, richiede l'uso di un tetraedro a 10 nodi: la cella viene completamente definita dai suoi 4 vertici e dai punti medi dei suoi 6 lati; si vuole interpolare la temperatura in termini dei valori ai nodi. Al fine di poter disporre di una formulazione assolutamente generale ed indipendente dalla geometria della singola cella è conveniente adottare, in luogo del riferimento cartesiano globale, un riferimento locale per ciascuna cella. Un riferimento locale è offerto dalle coordinate affini locali definito dai tre lati uscenti da uno stesso vertice.

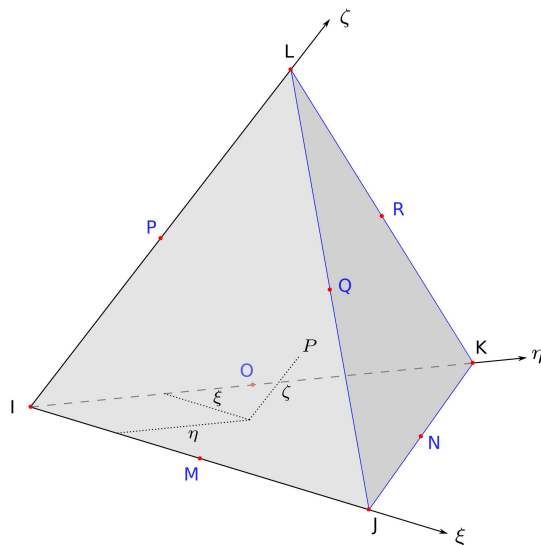


Figura 3.1. Cella tetraedrica a 10 nodi: disposizione e denominazione convenzionale dei vertici e sistema di riferimento locale di coordinate affini

3.1.1.1 Riferimento locale di coordinate affini

Il legame tra le coordinate locali affini e le coordinate cartesiane globali è lineare:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (x_j - x_i) & (x_k - x_i) & (x_l - x_i) \\ (y_j - y_i) & (y_k - y_i) & (y_l - y_i) \\ (z_j - z_i) & (z_k - z_i) & (z_l - z_i) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}. \quad (3.2)$$

che, con una sintetica notazione vettoriale di evidente significato, può venire espressa come:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_i + \mathbf{J}_e \mathbf{s} \quad (3.3)$$

La relazione inversa è dunque:

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r \\ s \\ t \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \epsilon & \theta \\ \mu & \nu & \pi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

essendo

$$\alpha = 1/A [(y_k - y_i) (z_l - z_i) - (y_l - y_i) (z_k - z_i)] \quad (3.5)$$

$$\beta = 1/A [(x_l - x_i) (z_k - z_i) - (x_k - x_i) (z_l - z_i)] \quad (3.6)$$

$$\gamma = 1/A [(x_k - x_i) (y_l - y_i) - (x_l - x_i) (y_k - y_i)] \quad (3.7)$$

$$\delta = 1/A [(y_l - y_i) (z_j - z_i) - (y_j - y_i) (z_l - z_i)] \quad (3.8)$$

$$\epsilon = 1/A [(x_j - x_i) (z_l - z_i) - (x_l - x_i) (z_j - z_i)] \quad (3.9)$$

$$\theta = 1/A [(x_l - x_i) (y_j - y_i) - (x_j - x_i) (y_l - y_i)] \quad (3.10)$$

$$\mu = 1/A [(y_j - y_i) (z_k - z_i) - (y_k - y_i) (z_j - z_i)] \quad (3.11)$$

$$\nu = 1/A [(x_k - x_i) (z_j - z_i) - (x_j - x_i) (z_k - z_i)] \quad (3.12)$$

$$\pi = 1/A [(x_j - x_i) (y_k - y_i) - (x_k - x_i) (y_j - y_i)] \quad (3.13)$$

e

$$r = \frac{(x_i y_k - x_k y_i) z_l + (x_l y_i - x_i y_l) z_k + (x_k y_l - x_l y_k) z_i}{B} \quad (3.14)$$

$$s = \frac{(x_i y_j - x_j y_i) z_l + (x_l y_i - x_i y_l) z_j + (x_j y_l - x_l y_j) z_i}{B} \quad (3.15)$$

$$t = \frac{(x_i y_j - x_j y_i) z_k + (x_k y_i - x_i y_k) z_j + (x_j y_k - x_k y_j) z_i}{B} \quad (3.16)$$

essendo

$$\begin{aligned} A = & (x_j - x_i) [(y_k - y_i) (z_l - z_i) - (y_l - y_i) (z_k - z_i)] + \\ & (x_k - x_i) [(y_l - y_i) (z_j - z_i) - (y_j - y_i) (z_l - z_i)] + \\ & (x_l - x_i) [(y_j - y_i) (z_k - z_i) - (y_k - y_i) (z_j - z_i)] \end{aligned} \quad (3.17)$$

e

$$\begin{aligned} B = & [(x_j - x_i) y_k + (x_i - x_k) y_j + (x_k - x_j) y_i] z_l \\ & + [(x_i - x_j) y_l + (x_l - x_i) y_j + (x_j - x_l) y_i] z_k \\ & + [(x_k - x_i) y_l + (x_i - x_l) y_k + (x_l - x_k) y_i] z_j \\ & + [(x_j - x_k) y_l + (x_l - x_j) y_k + (x_k - x_l) y_j] z_i \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.1.1.2 La funzione interpolante

Nel sistema di riferimento delle coordinate affini locali¹ il polinomio che interpola i valori delle temperature nodali all'interno della cella assume la forma:

$$T^c(\xi, \eta, \zeta) = \{1 \quad \xi \quad \eta \quad \zeta \quad \xi\eta \quad \eta\zeta \quad \zeta\xi \quad \xi^2 \quad \eta^2 \quad \zeta^2\} \begin{Bmatrix} a_h \\ a_i \\ a_j \\ a_k \\ a_l \\ a_m \\ a_n \\ a_o \\ a_p \end{Bmatrix}_c. \quad (3.19)$$

I dieci coefficienti incogniti si determinano imponendo che il polinomio assuma ai nodi i valori noti:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_h \\ a_i \\ a_j \\ a_k \\ a_l \\ a_m \\ a_n \\ a_o \\ a_p \end{Bmatrix}_c = \begin{Bmatrix} T_h \\ T_i \\ T_j \\ T_k \\ T_l \\ T_m \\ T_n \\ T_o \\ T_p \end{Bmatrix}_c \quad (3.20)$$

invertendo la quale si ottiene il vettore dei coefficienti del polinomio interpolante espresso in funzione delle temperature nodali:

$$\begin{Bmatrix} a_h \\ a_i \\ a_j \\ a_k \\ a_l \\ a_m \\ a_n \\ a_o \\ a_p \end{Bmatrix}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_h \\ T_i \\ T_j \\ T_k \\ T_l \\ T_m \\ T_n \\ T_o \\ T_p \end{Bmatrix}_c \quad (3.21)$$

¹la linearità del legame tra coordinate affini locali e coordinate cartesiane locali rende indifferente la scelta del sistema di riferimento

ovvero

$$\mathbf{a}_c = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{T}_c. \quad (3.22)$$

L'adozione delle coordinate affini locali offre dunque un significativo vantaggio: i coefficienti della matrice dell'equazione (3.20) sono costanti, indipendenti dalla cella, dalla sua geometria e dalla sua disposizione spaziale. Adottando il riferimento cartesiano globale i coefficienti della matrice sarebbero stati invece funzione delle coordinate dei nodi della cella e questo avrebbe obbligato al calcolo della matrice inversa per l'equazione (3.21) per ogni cella con conseguente maggiore costo computazionale della procedura²

L'espressione (3.19) può dunque essere scritta nella sintetica forma:

$$T^c(\xi, \eta, \zeta) = \{1 \quad \xi \quad \eta \quad \zeta\xi\eta \quad \eta\zeta \quad \zeta\xi \quad \xi^2 \quad \eta^2 \quad \zeta^2\} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{T}_c. \quad (3.23)$$

che permette di calcolare il valore della temperatura in un punto P interno alla cella c noti i valori delle sue coordinate $\xi \eta \zeta$ nel sistema di riferimento locale.

3.1.1.3 Gradiente

Nella generica cella c il vettore gradiente $\mathbf{g}_c$ è definito dalle componenti:

$$\begin{Bmatrix} \partial_\xi T \\ \partial_\eta T \\ \partial_\zeta T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \eta & 0 & \zeta & 2\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \xi & \zeta & 0 & 0 & 2\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \eta & \zeta & 0 & 0 & 2\zeta \end{bmatrix} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{T}_c. \quad (3.24)$$

Le componenti del gradiente sono:

$$\begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial_x T \\ \partial_y T \\ \partial_z T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x \xi & \partial_x \eta & \partial_x \zeta \\ \partial_y \xi & \partial_y \eta & \partial_y \zeta \\ \partial_z \xi & \partial_z \eta & \partial_z \zeta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial_\xi T \\ \partial_\eta T \\ \partial_\zeta T \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

dall'equazione (3.4) si ha:

$$\begin{Bmatrix} g_x(\xi, \eta, \zeta) \\ g_y(\xi, \eta, \zeta) \\ g_z(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \delta & \mu \\ \beta & \epsilon & \nu \\ \gamma & \theta & \pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \eta & 0 & \zeta & 2\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \xi & \zeta & 0 & 0 & 2\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \eta & \zeta & 0 & 0 & 2\zeta \end{bmatrix} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{T}_c. \quad (3.26)$$

²dal punto di vista computazionale vi è poi un ulteriore vantaggio nell'adozione delle coordinate locali affini: quando i coefficienti della matrice dipendono dalle coordinate, essi assumono valori che decrescono al diminuire delle dimensioni della cella e questo peggiora la precisione con cui gli algoritmi disponibili calcolano i coefficienti della matrice inversa.

3.1.1.4 Equazione costitutiva

Il legame tra il vettore flusso di calore $\mathbf{q}$ e il gradiente della temperatura $\mathbf{g}$ è detto equazione costitutiva. In un mezzo anisotropo questo legame viene espresso nella forma:

$$\begin{Bmatrix} q_x(x,y,x) \\ q_y(x,y,x) \\ q_z(x,y,x) \end{Bmatrix}_c = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix}_c \begin{Bmatrix} g_x(x,y,x) \\ g_y(x,y,x) \\ g_z(x,y,x) \end{Bmatrix}_c \quad (3.27)$$

Indicando con $\mathbf{K}_c$ la matrice 3×3 (detta matrice di conduttività termica della cella c) il legame costitutivo può essere espresso nella forma matriciale:

$$\mathbf{q}_c = -\mathbf{K}_c \mathbf{g}_c \quad (3.28)$$

Se il materiale di cui si compone la cella c è, dal punto di vista della conduzione termica, isotropo, gli elementi della matrice di conduttività termica $\mathbf{K}_c$ divengono tra loro identici e l'equazione (3.27) assume la forma:

$$q_x = -k g_x \quad q_y = -k g_y \quad q_z = -k g_z \quad (3.29)$$

o, in forma vettoriale

$$\mathbf{q}_c = -k \mathbf{g}_c \quad (3.30)$$

nota come equazione di Fourier.

3.1.1.5 Flusso di calore

Il vettore gradiente $\mathbf{g}$ e il flusso di calore $\mathbf{q}$ sono funzioni affini delle coordinate; di conseguenza il flusso di calore Q attraverso una superficie A è esprimibile come prodotto scalare del vettore area che definisce la superficie per il vettore flusso unitario $\mathbf{q}$ valutato nel baricentro G della superficie stessa. Essendo $\mathbf{A} = \{A_x, A_y, A_z\}$ il vettore area e G il suo baricentro, si ha:

$$Q(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \mathbf{q} = \begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} q_x(G) \\ q_y(G) \\ q_z(G) \end{Bmatrix}. \quad (3.31)$$

3.1.1.6 Bilancio

L'equazione fondamentale del problema viene ottenuta scrivendo il bilancio termico riferito alle regioni tributarie associate ad ogni nodo del sistema. Queste regioni tributarie sono offerte dalle celle duali. Siccome le regioni tributarie sono

arbitrarie per forma e per estensione³, anche il criterio di definizione delle celle duali è anch'esso arbitrario. Questo significa, in termini pratici, che tutti i criteri di divisione delle celle tetraedriche in porzioni associate ai suoi nodi sono di principio ammissibili, ancorché, almeno dal punto di vista computazionale, non equivalenti.

Nel caso bidimensionale con i semplici ad interpolazione quadratica si è ve-

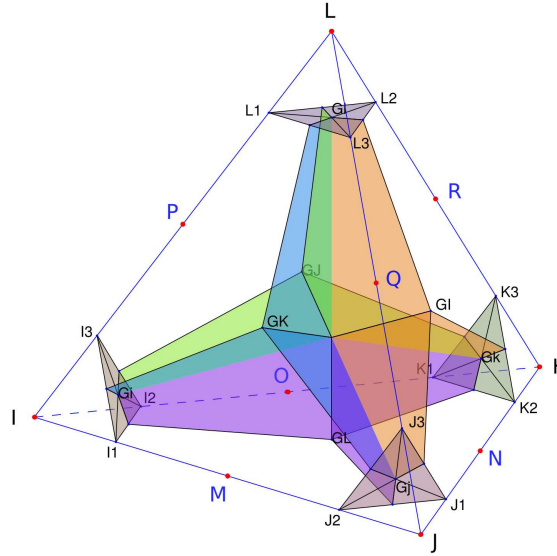


Figura 3.2. Suddivisione del tetraedro in porzioni duali basata sui punti Gauss dei lati

rificata una dipendenza tra il criterio di definizione delle celle duali e il grado di convergenza del Metodo. In particolare quando la creazione delle celle duali venisse appoggiata ai punti di Gauss dei lati delle celle primali, il metodo ha presentato ordine di convergenza pari a 4, superiore a quanto ordinariamente ottenibile con una corrispondente analisi condotta con il FEM.

Assunto un criterio per la definizione della suddivisione duale vi sono due possibili modi di procedere:

- esaminando un nodo alla volta, individuare l'insieme $I(n)$ delle celle che afferiscono al nodo e definire il poliedro (cella) duale del nodo che ne costituisce la regione tributaria: il poliedro duale sarà composto da varie porzioni ciascuna delle quale risulterà appartenere ad una cella primale differente.

³l'equazione di bilancio ha valore a prescindere sia dalla forma che dalle dimensioni della regione a cui è riferita

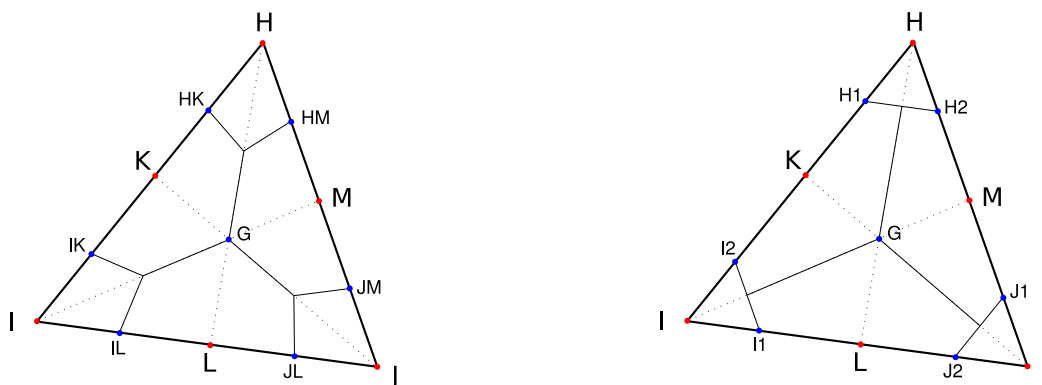


Figura 3.3. Suddivisione duale per celle triangolari con interpolazione quadratica: a sinistra la divisione è di tipo “baricentrico”, ossia basata sui punti medi dei segmenti congiungenti i nodi; a destra la suddivisione si appoggia al baricentro e ai punti di Gauss dei lati di cella.

Per ogni porzione si calcola il flusso di calore $Q(A_{n,i})^c$ in transito, nella cella di appartenenza c tra il vertice n e il nodi di cella adiacente j ; ciascuno di questi flussi sarà espresso in relazione alle temperature nodali della cella in cui l’elemento di superficie in oggetto è contenuto. Conclusa questa operazione per tutti gli elementi di superficie del poliedro duale è possibile scrivere l’equazione di bilancio per il nodo in esame:

$$\sum_{c \in I(n)} \sum_{ij} Q_{n,j}^c = \phi_n \quad (3.32)$$

essendo ϕ_n il calore generato all’interno della cella duale associata ad n .

- analizzando una cella primale alla volta, calcolare i flussi di calore attraverso le superfici duali contenute nella cella. Componendo le equazioni (3.26), (3.27) e (3.31) vengono determinati i termini di flusso delle porzioni di celle tributarie associate ai nodi di cella. Questi flussi sono scritti in funzione dei valori delle temperature della cella esaminata.

Con entrambe le strade si arriva alla scrittura del sistema lineare che definisce la soluzione del problema (le temperature nodali); con la prima procedura la matrice fondamentale del sistema risolvete viene scritta riga a riga, calcolando gli elementi non nulli corrispondenti ai nodi delle celle che condividono il nodo n in esame: i flussi di calore che lasciano il nodo n nella cella c sono espressi in termini dei valori delle temperature associate a tutti i nodi della cella, e vengono

considerati i soli flussi che attraversano le superfici di confine fra la porzione di cella associata al nodo e il resto della cella. Con la seconda strada si costruisce invece un sistema lineare locale che mette in relazione per ogni cella c esaminata le temperature nodali con i valori di calore generato/assorbito dalla porzione di cella associata ad ogni suo nodo:

$$\mathbf{k}_c \mathbf{T}_c = \mathbf{Q}_c \quad (3.33)$$

questo sistema deve essere “assemblato” opportunamente sommando i termini nelle righe (e per la matrice $\mathbf{k}$ anche nelle colonne) del sistema risolvibile globale di indice corrispondente ai numeri che identificano ogni nodo in una numerazione globale.

Un’ultima considerazione riguarda i segni dei flussi di calore attraverso le superfici: essi sono strettamente correlati all’orientazione (esterna) assunta per tali elementi di superficie. Va qui ricordato (fatto non solo formale bensì sostanziale per l’implementazione del Metodo) che si deve provvedere ad orientare internamente gli elementi del complesso di celle primale poiché questa orientazione indurrà automaticamente e in modo non equivoco l’orientazione (esterna) degli elementi corrispondenti del complesso di celle duale.

3.1.2 Test di convergenza

Per realizzare un test di convergenza della soluzione numerica ottenibile con semplici nello spazio con interpolazione quadratica è stata considerata l’equazione di Laplace $\Delta T(x,y,z) = 0$ e due funzioni di riferimento, adottate come test per la stima dell’accuratezza della soluzione:

$$T_1(x,y,z) = e^x \sin y + e^y \sin z + e^z \sin x; \quad (3.34)$$

e

$$T_2(x,y,z) = e^z (\cos x + \cos y + \sin x + \sin y) \quad (3.35)$$

Come dominio di studio è stato considerato un cubo di lato unitario centrato nell’origine del sistema di riferimento cartesiano e con le facce ortogonali agli assi del riferimento. Il dominio è stato suddiviso in tetraedri a 10 nodi creando dapprima una suddivisione in cubi ognuno dei quali è stato suddiviso, in modo regolare, in tetraedri. Con questa strategia il lato dei cubi di appoggio ottenuti con la prima suddivisione del dominio fornisce una dimensione lineare caratteristica associata alla mesh finale di tetraedri.

Come parametro di errore è stato adottato il valore dello scarto quadratico medio tra valori della soluzione analitica e valori della soluzione numerica ai nodi della mesh.

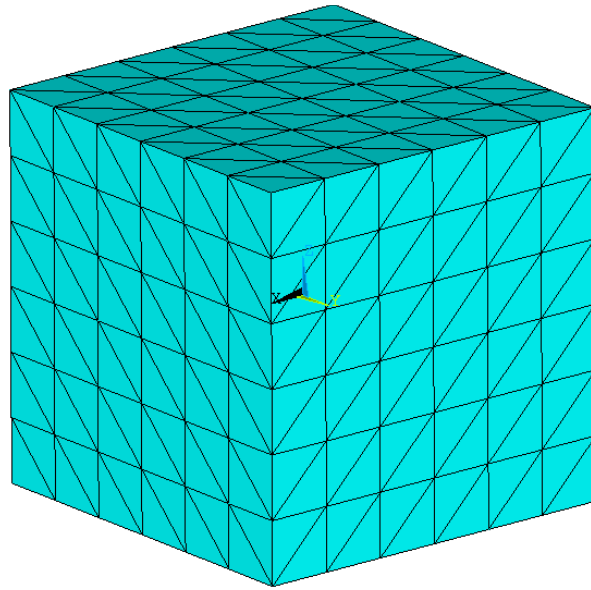


Figura 3.4. Esempio di mesh regolare di tetraedri a 10 nodi ottenuta a partire da una suddivisione regolare della geometria

La tabella (3.1) riporta i valori dello scarto quadratico medio ottenuti con le due funzioni di test per le varie dimensioni caratteristiche del complesso di celle utilizzato (lato di cella). Gli stessi valori sono illustrati in figura (3.5).

lato cella	errore medio CM	
	T1	T2
0.3333	5.60E-005	1.57E-004
0.2500	1.63E-005	5.15E-005
0.2000	7.99E-006	1.48E-005
0.1667	3.11E-006	7.92E-006
0.1429	1.74E-006	4.36E-006
0.1250	1.40E-006	3.80E-006
0.1111	8.42E-007	1.56E-006
0.1000	4.68E-007	1.14E-006

Tabella 3.1. Valori dello scarto quadratico medio tra soluzione numerica prodotta dal CM e soluzione teorica al variare del lato di cella della mesh per le due funzioni di test

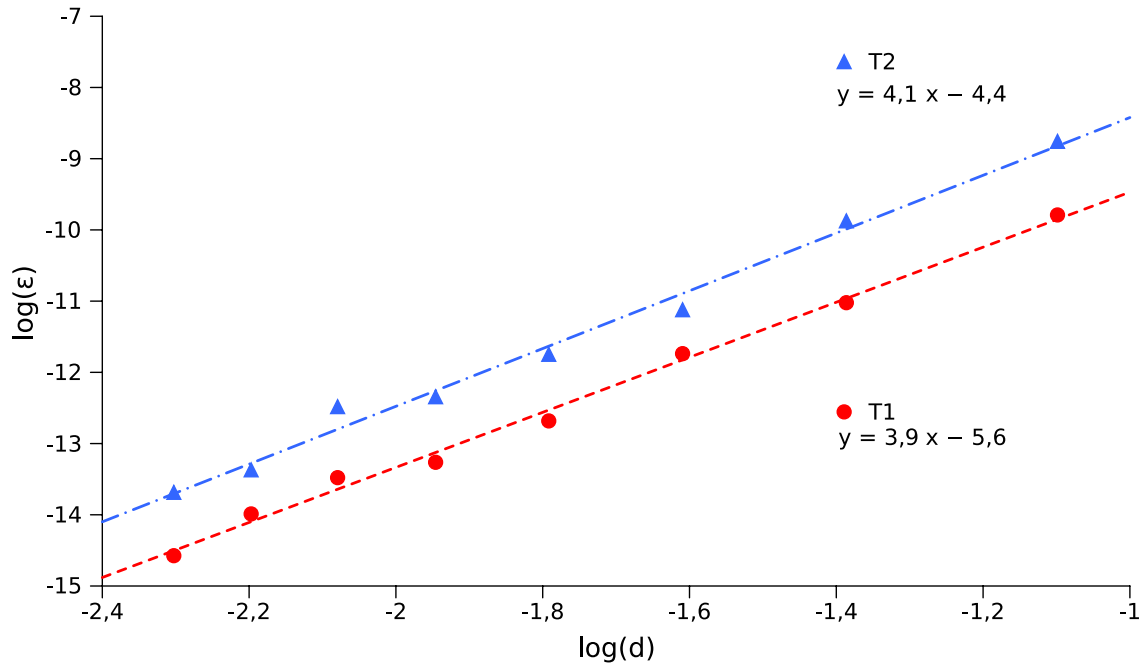


Figura 3.5. Analisi di convergenza: rappresentazione in scala logaritmica dello scarto quadratico medio per le funzioni di test ((3.34) in blu e (3.35) in rosso) rispetto alla dimensione rappresentativa del lato di cella

Gli stessi test, utilizzando lo stesso insieme di tetraedri e con le stesse condizioni al contorno sono stati replicati con il software commerciale Ansys, utilizzando il Metodo degli Elementi Finiti con tetraedri ad interpolazione quadratica. La tabella (3.2) riporta i valori dello scarto quadratico medio ottenuti con le due funzioni di test per le varie dimensioni caratteristiche del complesso di celle utilizzato (loto di cella). Gli stessi valori sono illustrati in figura (3.6).

3.2 Problemi di elasticità lineare tridimensionali

In questo paragrafo l'implementazione del Metodo delle Celle con interpolazione quadratica in domini tridimensionali verrà estesa al problema dello studio delle deformazioni dei corpi elastici in regime di piccoli spostamenti.

L'illustrazione dell'implementazione verrà completata con un test di accuratezza nel cogliere il campo di spostamenti in un problema di controllo del quale si dispone di una soluzione teorica in forma chiusa; i risultati ottenuti vengono comparati con gli analoghi risultati ottenuti nella soluzione del medesimo problema, con la stessa discretizzazione geometrica e lo stesso ordine di interpolazione, da un codice commerciale basato sul Metodo degli Elementi Finiti.

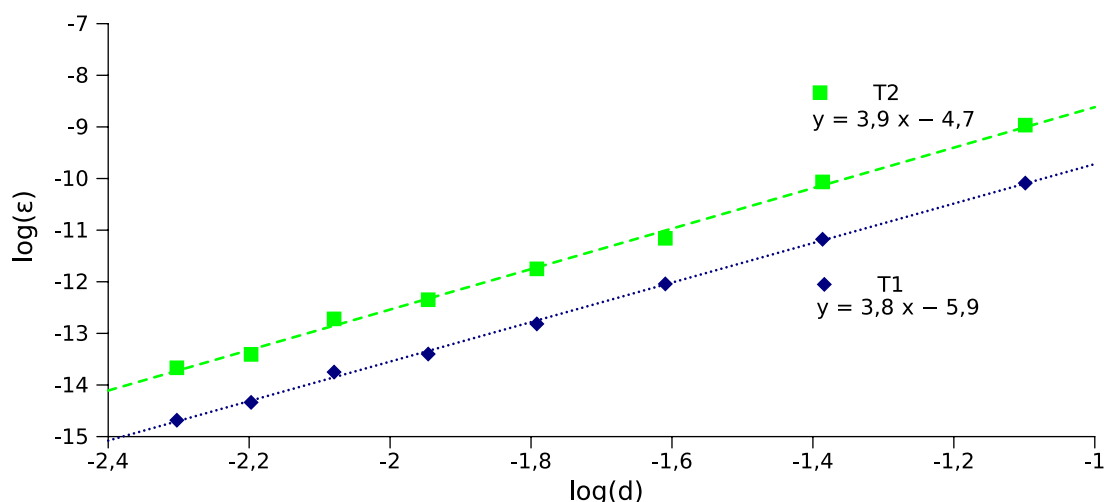


Figura 3.6. Analisi dell'ordine di convergenza del FEM: grafico in scala logaritmica dello scarto quadratico medio (ε) rispetto alla dimensione caratteristica di cella (d) per le funzioni di test.

lato cella	errore medio FEM	
	T1	T2
0.3333	4.16E-005	1.28E-004
0.2500	1.40E-005	4.25E-005
0.2000	5.89E-006	1.43E-005
0.1667	2.72E-006	7.89E-006
0.1429	1.51E-006	4.34E-006
0.1250	1.07E-006	2.99E-006
0.1111	5.94E-007	1.50E-006
0.1000	4.20E-007	1.16E-006

Tabella 3.2. Valori dello scarto quadratico medio tra soluzione numerica prodotta dal FEM e soluzione teorica al variare del lato di cella della mesh per le due funzioni di test

3.2.1 Interpolazione quadratica del campo degli spostamenti

Ciascuna delle tre componenti dello spostamento rispetto ad un riferimento cartesiano globale viene approssimata, all'interno di ogni cella, con il polinomio di secondo grado:

$$u_i(x,y,z) = a_i + b_i x + c_i y + d_i z + e_i xy + f_i yz + g_i zx + h_i x^2 + i_i y^2 + l_i z^2 \quad (3.36)$$

essendo u_i la componente del vettore spostamento in un punto $P(x, y, z)$ secondo l' i -esimo asse del riferimento globale.

Adottando il sistema di riferimento locale di coordinate affini di cella introdotto nel paragrafo 3.1.1.1, varrà l'espressione:

$$u_i(\xi, \eta, \zeta) = \left\{ 1 \quad \xi \quad \eta \quad \zeta \quad \xi\eta \quad \eta\zeta \quad \zeta\xi \quad \xi^2 \quad \eta^2 \quad \zeta^2 \right\} \begin{Bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \\ d_i \\ e_i \\ f_i \\ g_i \\ h_i \\ i_i \\ l_i \end{Bmatrix}_c \quad (3.37)$$

dove il vettore dei coefficienti viene determinato imponendo che la funzione approssimante colga i valori nodali:

$$\mathbf{a}_{ic} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}_{ic}. \quad (3.38)$$

essendo:

- $\mathbf{a}_{ic}$ il vettore dei coefficienti del polinomio interpolante il campo della componente u_i dello spostamento all'interno della cella c ;
- $\mathbf{C}$ la matrice definita nella 3.20
- $\mathbf{u}_{ic}$ il vettore delle i -esime componenti di spostamento nodale per i nodi (ordinati) della cella c .

Con il processo già illustrato per il campo scalare, si perverrà pertanto, per ciascuna componente di spostamento, alle espressioni:

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) &= \left\{ 1 \quad \xi \quad \eta \quad \zeta \quad \xi\eta \quad \eta\zeta \quad \zeta\xi \quad \xi^2 \quad \eta^2 \quad \zeta^2 \right\} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}_c \\ v(\xi, \eta, \zeta) &= \left\{ 1 \quad \xi \quad \eta \quad \zeta \quad \xi\eta \quad \eta\zeta \quad \zeta\xi \quad \xi^2 \quad \eta^2 \quad \zeta^2 \right\} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{v}_c \\ w(\xi, \eta, \zeta) &= \left\{ 1 \quad \xi \quad \eta \quad \zeta \quad \xi\eta \quad \eta\zeta \quad \zeta\xi \quad \xi^2 \quad \eta^2 \quad \zeta^2 \right\} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{w}_c. \end{aligned} \quad (3.39)$$

che descrivono completamente la stima del vettore spostamento $\mathbf{u}(\mathbf{P})$ in un punto P all'interno della cella c .

Raccogliendo le componenti di spostamento di tutti i nodi di cella nel vettore:

$$\mathbf{u}_c = \begin{Bmatrix} u_h \\ v_h \\ w_h \\ u_i \\ v_i \\ w_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ u_q \\ v_q \\ w_q \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

le espressioni riportate nella 3.39 possono venire sinteticamente indicate come:

$$\mathbf{u}(P) = \mathbf{B}(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{u}_c \quad (3.41)$$

dove, essendo $\mathbf{I}$ una matrice identità 3x3, si é inteso indicare:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ \mathbf{I} & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 1/2\mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4\mathbf{I} & 0 & 0 \\ \mathbf{I} & 1/2\mathbf{I} & 1/2\mathbf{I} & 0 & 1/4\mathbf{I} & 0 & 0 & 1/4\mathbf{I} & 1/4\mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{I} & 0 & 1/2\mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4\mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & 1/2\mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 1/2\mathbf{I} & 0 & 1/4\mathbf{I} & 0 & 0 & 1/4\mathbf{I} & 1/4\mathbf{I} & 0 & 1/4\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 & 1/2\mathbf{I} & 1/2\mathbf{I} & 0 & 1/4\mathbf{I} & 0 & 0 & 1/4\mathbf{I} & 1/4\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

e

$$\mathbf{B}(\xi, \eta, \zeta) = [\mathbf{I} \quad \mathbf{I}\xi \quad \mathbf{I}\eta \quad \mathbf{I}\zeta \quad \mathbf{I}\xi\eta \quad \mathbf{I}\eta\zeta \quad \mathbf{I}\zeta\xi \quad \mathbf{I}\xi^2 \quad \mathbf{I}\eta^2 \quad \mathbf{I}\zeta^2] \quad (3.43)$$

3.2.2 Spostamenti - deformazioni

3.2.2.1 Notazione vettoriale

Lo stato deformativo in una porzione di solido è completamente descritto da 6 parametri: tre di dilatazione ε secondo gli assi di riferimento, e tre di scorrimento

γ fra coppie di questi assi.

Questi sei parametri sono generalmente raccolti in una matrice detta *tensore di deformazione*

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Questo tensore è strettamente legato al campo degli spostamenti: pi precisamente esso corrisponde alla parte simmetrica della matrice gradiente degli spostamenti $\nabla(\{u\})$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\gamma_{xy}}{2} \\ \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{\gamma_{zx}}{2} \end{array} \right. \quad (3.45)$$

Di fatto si suole esprimere la matrice $\mathbf{E}$ mediante il vettore

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

che riporta tutte le 6 componenti significative del tensore rappresentato. Oltre ad essere questa una notazione comoda, essa è soprattutto utile ai fini dell'implementazione di un programma di calcolo efficiente. In più, nel caso di comportamento elastico lineare del materiale, essa permette di esprimere il legame costitutivo con una semplice matrice di dimensione 6x6 anziché con un tensore a quattro indici $C_{hkr s}$.

3.2.2.2 Gradiente degli spostamenti

Il gradiente degli spostamenti viene espresso dalla matrice

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

Indicando con u_i la generica componente del vettore spostamento $\mathbf{u}$, e con e_i la variabile di derivazione, si ha evidentemente:

$$\frac{\partial u_i}{\partial e_i} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial e_i} + \frac{\partial u_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial e_i} + \frac{\partial u_i}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial e_i}. \quad (3.48)$$

Si ha pertanto:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial u}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Va rilevato subito che la seconda matrice altro non è che la matrice trasposta dell'inversa della matrice $\mathbf{J}_c$ che appare nell'equazione (3.3).

Analizzando invece la prima matrice, appare evidente la scrittura:

$$\mathbf{Q} = \left[\frac{\partial \mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi}, \frac{\partial \mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta}, \frac{\partial \mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \right] (\mathbf{J}_c^T)^{-1} \quad (3.50)$$

che, ricordando la relazione (3.41), autorizza la scrittura:

$$\mathbf{Q} = \left[\frac{\partial \mathbf{B}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{u}_c, \frac{\partial \mathbf{B}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{u}_c, \frac{\partial \mathbf{B}(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{u}_c \right] (\mathbf{J}_c^T)^{-1} \quad (3.51)$$

Questa espressione consente di calcolare i valori degli elementi del tensore di deformazione ϵ in un punto di coordinate note all'interno della cella⁴ c ;

⁴si noti come l'unico termine dipendente dalla cella sia proprio la matrice $\mathbf{J}_c$ legata alla specifica disposizione spaziale dei vertici di cella

3.2.3 Legame sforzi - deformazioni

Lo stato di tensione in un punto è completamente descritto dalla matrice

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

detta tensore degli sforzi. La simmetria di questo tensore consente, come per il caso del tensore delle deformazioni, di poter adottare la notazione vettoriale che ne riporta le sei sole componenti significative:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (3.53)$$

Il legame che correla il tensore degli sforzi σ a quello delle deformazioni ϵ descrive come il materiale si deforma per effetto delle sollecitazioni, comportamento macroscopico strettamente legato alla costituzione interna del materiale (tipo di legami chimici presenti, tipo di struttura molecolare, ...). Si parla a tale proposito di *legame costitutivo*.

Per un materiale che abbia comportamento elastico lineare ha:

$$\sigma = \mathbf{D} \epsilon. \quad (3.54)$$

Adottando per tensioni σ e deformazioni ϵ la notazione vettoriale, la (3.54) assume la forma generale:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} & d_{1,4} & d_{1,5} & d_{1,6} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & d_{2,3} & d_{2,4} & d_{2,5} & d_{2,6} \\ d_{3,1} & d_{3,2} & d_{3,3} & d_{3,4} & d_{3,5} & d_{3,6} \\ d_{4,1} & d_{4,2} & d_{4,3} & d_{4,4} & d_{4,5} & d_{4,6} \\ d_{5,1} & d_{5,2} & d_{5,3} & d_{5,4} & d_{5,5} & d_{5,6} \\ d_{6,1} & d_{6,2} & d_{6,3} & d_{6,4} & d_{6,5} & d_{6,6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (3.55)$$

Per un materiale a comportamento elastico lineare e isotropo la matrice $\mathbf{D}$ assume la forma:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{\nu} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1-\nu}{\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1-\nu}{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2\nu} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

dove E e ν sono rispettivamente il *modulo di elasticità* del materiale ed il suo *coefficiente di contrazione trasversale* altrimenti detto *modulo di Poisson*.

3.2.4 Legame forze - sforzi

In una regione caratterizzata da sforzo uniforme, la forza di superficie che agisce su una superficie piana A descritta dal vettore area $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ viene espressa dalla nota *relazione di Cauchy*, che, in forma discreta, è esprimibile come:

$$\begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

ossia, in notazione sintetica

$$\mathbf{T} = \Sigma \mathbf{a} \quad (3.58)$$

Adottando per σ la notazione vettoriale si ha, in modo del tutto equivalente

$$\begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & 0 & 0 & a_y & 0 & a_z \\ 0 & a_y & 0 & a_x & a_z & 0 \\ 0 & 0 & a_z & 0 & a_y & a_x \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

Nel caso trattato, all'interno di ciascuna cella il campo delle tensioni risulta essere funzione lineare delle coordinate. In questo caso, come noto, si ha la notevole proprietà:

$$\mathbf{T} = \int_A \Sigma(x, y, z) \cdot \mathbf{n} dA = \Sigma(x_G, y_G, z_G) \mathbf{a} \quad (3.60)$$

prodotto fra la matrice Σ calcolata nel baricentro $G = (x_G, y_G, z_G)$ della superficie A , per il vettore area $\mathbf{a}$ della superficie stessa.

Usando la notazione vettoriale per il tensore degli sforzi si può scrivere dunque:

$$\begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & 0 & 0 & a_y & 0 & a_z \\ 0 & a_y & 0 & a_x & a_z & 0 \\ 0 & 0 & a_z & 0 & a_y & a_x \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix}_G \quad (3.61)$$

ove si è inteso adottare il pedice G per indicare che le componenti del vettore σ sono calcolate nel baricentro G della superficie A .

3.2.5 L'equazione fondamentale: il bilancio delle forze

L'equazione fondamentale dell'elastostatica lega direttamente le forze esterne con gli spostamenti ai nodi delle celle. Si ottiene componendo opportunamente le relazioni sopra descritte:

$$\{u\}_c \rightarrow \{\epsilon\} \rightarrow \{\sigma\} \rightarrow \{T\} \quad (3.62)$$

Per ottenere la relazione fra forze e spostamenti ai nodi di una generica cella c si scrive un semplice bilancio delle forze pertinenti a ciascun nodo. Questo bilancio viene scritto relativamente alle celle del complesso duale, ovvero a quelle regioni del dominio che la divisione in celle primali associa naturalmente ad ogni nodo; queste regioni possono essere viste come le porzioni di dominio di competenza di ogni nodo. Le celle duali costituiscono delle "regioni tributarie" dei nodi del sistema primale, poiché è relativamente ad esse che il bilancio delle forze viene scritto, contemplando tutte le forze da esse "raccolte".

Di seguito si descrive il bilancio dalla prospettiva della generica cella primale. Nella creazione del complesso duale, ogni cella primale viene ad essere divisa in 10 parti, una per ogni nodo. Ogni parte è di fatto l'intersezione fra la cella (primale) in esame e le celle duali associate ai suoi nodi. Ogni parte rappresenta così la regione tributaria di ogni nodo nella cella considerata.

Per scrivere, ad esempio, il bilancio delle forze agenti sul nodo h si considerano dunque le forze agenti sulla sua regione tributaria. Le forze agenti sono:

- le forze di volume (tipicamente la forza peso) $\vec{B}_h^c$, nella porzione raccolta dal volume di cella associato al nodo (ossia la parte di cella duale del nodo h che cade nella cella c in esame);
- le forze di superficie $\vec{T}_{h,n}^c$ che agiscono sulle superfici di confine fra la regione tributaria del nodo h e le regioni tributarie dei tre nodi adiacenti; nel caso del nodo h , per la convenzione adottata sulla denominazione locale dei nodi, i nodi adiacenti sono i nodi l , m e n ;
- le forze concentrate $\vec{F}_h$ eventualmente applicate direttamente al nodo h o che cadono all'interno della sua regione tributaria: si noti che per quanto concentrata possa essere l'applicazione di una forza, essa agisce comunque su una regione che, per quanto piccola, resta pur sempre di estensione finita: il concetto di forza concentrata in un punto, che dal punto di vista fisico è una pura astrazione logica, resta tale anche nell'approccio numerico del Metodo delle Celle che attribuisce a buon diritto le forze concentrate alla cella duale in cui esse ricadono.

Le forze di volume sono note quando sia noto il volume della regione tributaria e le proprietà (la massa volumica nel caso della forza peso) del materiale di cella.

Le forze di superficie sono anch'esse note quando sia nota la geometria e l'orientazione della superficie $\sigma_c(x, y, z)$ ovvero $\sigma_c(\xi, \eta, \zeta)$ nella cella c in esame, da stimare nel baricentro della superficie. Dalla (3.60) si ha infatti

$$\begin{aligned}\vec{T}_{h,i}^c &= \sigma_c(G) \mathbf{A}_M \\ \vec{T}_{h,k}^c &= \sigma_c(G) \mathbf{A}_R \\ \vec{T}_{h,l}^c &= \sigma_c(G) \mathbf{A}_S\end{aligned}\tag{3.63}$$

La notazione $\sigma_c(G)$ suggerisce che σ_c sia calcolato nel baricentro della superficie $\mathbf{A}_P$.

Il bilancio delle forze sulla porzione di cella duale del nodo h contenuta nella cella c viene allora scritto nella forma:

$$\sum_{c \in \mathfrak{S}(h)} \left(\vec{B}_h^c + \vec{T}_{h,i}^c + \vec{T}_{h,k}^c + \vec{T}_{h,l}^c \right) = 0 \tag{3.64}$$

essendo $\mathfrak{S}(h)$ l'insieme delle celle che insistono sul nodo h , ossia quelle che hanno h tra i vertici di cella. Le forze $\vec{T}_{i,j}$ possono essere espresse in funzione del vettore degli spostamenti nodali $\mathbf{u}_c$ componendo opportunamente le espressioni (3.41), (3.45), (3.61) e (3.55). Scrivendo il bilancio su tutte le porzioni di cella duale della cella primale c si ottiene un'espressione del tipo:

$$\mathbf{F}_c - \mathbf{k} \mathbf{u}_c = \mathbf{0} \tag{3.65}$$

ossia, in modo più usuale

$$\mathbf{F}_c = \mathbf{k} \mathbf{u}_c \tag{3.66}$$

dove $\mathbf{F}_c$ riassume i termini delle forze di volume e delle forze applicate direttamente ai nodi.

Il sistema (3.66) prende il nome di sistema fondamentale e la matrice $\mathbf{k}_c$ è detta matrice di rigidezza locale e, per la cella a 10 nodi, ha dimensioni 30×30 .

Scrivendo il bilancio su tutte le N celle che descrivono la geometria in esame si ottengono altrettanti sistemi del tipo dell'equazione (3.66) che, opportunamente "assemblati" portano alla scrittura del sistema globale:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{U} \tag{3.67}$$

dove:

- $\mathbf{F}$ il vettore delle forze applicate a tutti gli N nodi del sistema:

$$\mathbf{F} = \{F_{1,x}, F_{1,y}, F_{1,z}, \dots, F_{N,x}, F_{N,y}, F_{N,z}\}^T$$

- $\mathbf{K}$ una matrice di dimensioni $3N \times 3N$ ed è detta matrice di rigidezza globale;
- $\mathbf{U}$ il vettore degli spostamenti nodali

$$\mathbf{U} = \{u_1, v_1, w_1, \dots, u_N, v_N, w_N\}^T.$$

3.2.5.1 Orientazione delle porzioni di superficie duale

Nel calcolo delle forze che agiscono sulla superficie di confine delle regioni tributarie di ciascun nodo è fondamentale che, cella per cella, venga assunta un'unica orientazione valida per entrambi i nodi separati da ogni porzione di superficie. Questa orientazione dà infatti il "segno della forza" ottenuta dal prodotto fra il tensore degli sforzi e il vettore area.

L'orientazione in questione è un'orientazione esterna di un elemento (la superficie) che fa parte del complesso duale. Come tale, essa viene naturalmente indotta quando sia stata assunta un'orientazione interna per gli elementi del complesso primale. Provvedere ad una convenzionale orientazione interna degli elementi del complesso primale è quindi operazione non formale bensì sostanziale per la costruzione dell'equazione di bilancio corretta, priva di ambiguità e di errori.

3.2.6 Test numerico

La precisione della soluzione numerica ottenibile con l'implementazione CM proposta è stata valutata risolvendo un problema di test, per il quale è disponibile in letteratura una soluzione in forma chiusa.

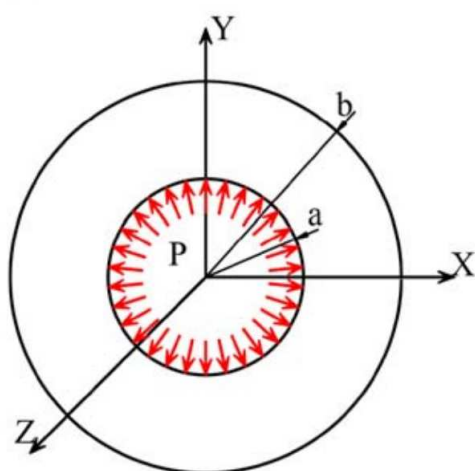
Il problema trattato è quello della sfera cava pressurizzata di grosso spessore (paragonabile al diametro interno della cavità), di materiale omogeneo e isotropo e a comportamento elastico lineare, in regime di piccoli spostamenti. La figura (3.7) riporta lo schema di riferimento: in queste condizioni il problema ha simmetria sferica e il campo di spostamenti risulta radiale rispetto al centro della sfera ed è definito dalla relazione⁵:

$$u(r) = \frac{Pa^3}{E(b^3 - a^3)} \left[(1 - 2\nu)r + (1 + \nu) \frac{b^3}{2r^2} \right] \quad (3.68)$$

essendo a e b i diametri interno ed esterno della sfera, rispettivamente, P il valore della pressione interna, E e ν il modulo elastico e il modulo di Poisson del materiale, r la distanza dal centro della sfera.

Il problema replicato è completamente descritto dai valori riportati nella tabella di figura (3.7).

⁵[31] cap. 7



parametro	valore	unità di misura
a	1	m
b	2	m
E	200	GPa
ν	0.26	m
P	10	m

Figura 3.7. Sfera cava pressurizzata: schema del problema e notazioni di riferimento

Beneficiando della simmetria sferica del problema, si è considerata solamente una porzione della geometria corrispondente ad un suo ottavo, ottenuto sezionando la sfera con i piani coordinati come illustrato in figura (3.8)

Per replicare le condizioni cinematiche del problema originario, sui punti delle superfici di taglio si sono eliminati gli spostamenti ortogonali alla superficie stessa, consentendo solamente spostamenti nel piano della sezione; per i punti appartenenti agli spigoli radiali, gli spostamenti vincolati saranno pertanto risultati dall'unione dei vincoli imposti sulle superfici concorrenti.

Questa geometria è stata discretizzata con elementi tetraedrici a 10 nodi, ottenendo 3 differenti mesh a differente dimensione caratteristica l , ottenuta come rapporto tra la lunghezza di uno spigolo radiale e il numero di divisioni su di esso impostate⁶. La figura (3.9) illustra una delle discretizzazioni utilizzate nell'analisi.

Lo stesso complesso di elementi è stato utilizzato per risolvere lo stesso problema con il programma Ansys, codice commerciale general purpose per la soluzione numerica di problemi ingegneristici basato sul FEM.

Per ciascuna delle discretizzazioni si è valutato in ogni nodo non vincolato il valore dello spostamento radiale u_i^{num} , confrontandolo con il valore teorico

⁶la regolarità della geometria e l'attitudine della tassellizzazione di Delaunay alla base del discretizzatore a campire una geometria di questo genere, hanno fatto sì che le mesh fossero regolari e di buona qualità; in queste condizioni la misura ottenuta dal rapporto tra dimensione dello spigolo radiale e numero di divisioni è una misura lineare significativa della mesh.

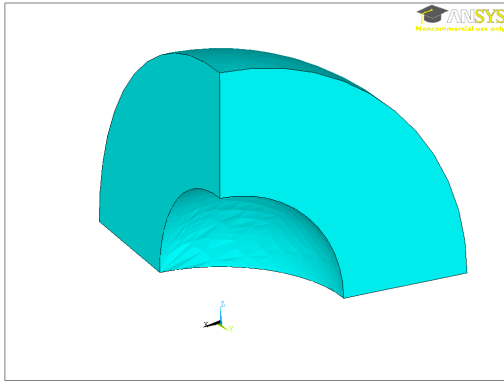


Figura 3.8. Sfera cava pressurizzata: geometria in esame

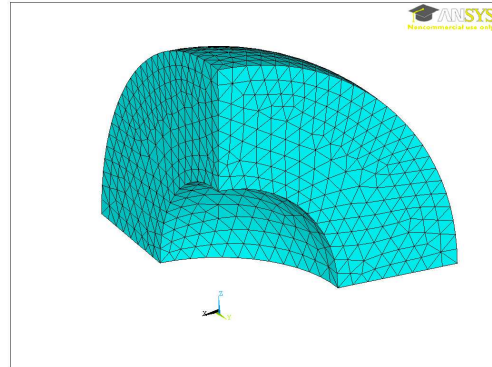


Figura 3.9. Sfera cava pressurizzata: esempio di mesh

u_i^t previsto dalla formula (3.68). Come parametro di precisione della soluzione numerica si è considerato lo scarto quadratico medio rispetto alla soluzione teorica:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_i} (u_i^{num} - u_i^t)^2}{N_i}} \quad (3.69)$$

essendo N_i il numero dei nodi non vincolati. La tabella di figura (3.10) riporta i valori di δ ottenuti con il codice CM e con l'analisi FEM accoppiata, per vari valori della dimensione lineare caratteristica della mesh l . I medesimi valori sono riportati in scala logaritmica nel grafico di figura (3.11) dove si evince, oltre alla piena concordanza dei risultati ottenuti dai due metodi e alla loro precisione nel predire i valori teorici di spostamento, anche la stretta corrispondenza in termini di ordine di convergenza sussistente tra CM e FEM.

Capitolo 4

L'approccio meshless con il Metodo delle Celle

In questo capitolo vengono formulate alcune ipotesi di approccio meshless del CM sia epr i problemi scalari che per problemi di elasticità lineare in domini bi-dimensionali.

La prima parte del capitolo è dedicata ad una breve introduzione sui metodi meshless in ambito differenziale, conclusa da una digressione sulle applicazioni nello specifico ambito della biomeccanica. I caratteri generali di un approccio meshless, reso accessibile in modo diretto dalla struttura concettuale del CM, vengono poi declinati nello specifico di tre approcci proposti: il primo basato sulla creazione di un complesso locale di celle primali, gli altri due basati su un'interpolazione della funzione incognita definita localmente su una costellazione di punti a connettività non definita.

4.1 La filosofia dei metodi meshless

Il Metodo degli Elementi Finiti (FEM) si è ormai affermato come il principale e più diffuso strumento di analisi numerica per soluzione di una vastità di problemi scientifici e tecnico-ingegneristici un tempo inaffrontabili. Esistono oggi numerosi codici commerciali che integrano formulazioni FEM per la soluzione di problemi complessi in cui intervengano problemi afferenti a distinti problemi fisici.

Pur evoluto talmente da consentire analisi molto raffinate e complesse, il FEM non è privo di limiti che, in taluni ambiti, fanno sì che si siano cercate strade alternative o parallele a maggiore flessibilità o di minor onere computazionale. Una delle fasi più onerose di una analisi FEM è la discretizzazione delle geometrie in elementi con la creazione della cosiddetta mesh: dividere una geometria in

elementi contigui, riproducendone le caratteristiche geometriche con sufficiente approssimazione e disponendo di elementi regolari è infatti un problema tutt'altro che banale; specie relativamente ai casi tridimensionali l'operazione ha un esito non sempre garantito e spesso risulta essere un punto critico ai fini della precisione dei calcoli effettuati. La generazione della mesh è una operazione spesso computazionalmente onerosa e dispendiosa in termini di tempo, fatto che assume rilievo in tutti quei problemi (dalla fluidodinamica a superficie libera ai fenomeni di frattura, dalle grandi deformazioni alle interazioni fluido-struttura) in cui il fenomeno studiato comporta una variazione della geometria, obbligando ad ogni passo dell'analisi alla rigenerazione della mesh sulla geometria aggiornata.

Con il tentativo di superare questi limiti a partire dalla fine degli anni '70 iniziò a svilupparsi un approccio differente che, costruendo le interpolazioni basandosi unicamente sui nodi, non rendesse necessaria la generazione di elementi; questa nuova categoria di metodi assunse il nome di "meshless" (talvolta denominati anche "meshfree").

Il primo metodo meshless sviluppato ha nome *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH): sviluppato nel 1977 in ambito astrofisico da Lucy [32], Monaghan e Gingold [33], fu poi applicato a problemi di fluidodinamica e di meccanica dei solidi (problemi di impatto). Dall'epoca, numerosi furono i metodi sviluppati ascrivibili alla categoria dei metodi meshless; citando i più noti, e probabilmente tralasciandone in questa arbitraria selezione alcuni:

- Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) [32], [33]
- Non Structured Finite Differences (NSFD) [34]
- Diffuse Element Method (DEM) [35]
- Element-Free Galerkin Method (EFG o EFGM) [36]
- Reproducing Kernel Particle method (RKPM) [37]
- partition of Unit (PUFEM) [38]
- Finite Point Method (FPM) [39]
- hp-Clouds [40]
- Natural Element Method (NEM) [41]
- Meshless Local Petrov Galerkin (MLPG) [42]
- Generalized Finite Element Method (GFEM) [43]

- Meshless Finite Element Method (MFEM) [44]
- Extended Finite Element Method (XFEM) [45]

Tutti questi metodi condividono il fatto di discretizzare il dominio in esame solamente a livello di punti (nodi) posizionati dentro la geometria e sul suo contorno, come suggerito dalla figura (4.1). L'approssimazione di una funzione scalare avviene tramite una relazione del tipo:

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_{I \in S} \Phi_I(\mathbf{x}) u_I(t) \quad (4.1)$$

essendo, con riferimento alle notazioni di figura (4.1):

- u_I il valore al nodo I di posizione $\mathbf{x}_I$
- $\Phi_I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione di forma associate al nodo I : solitamente si tratta di una funzione non nulla solo entro una regione di influenza del nodo Ω_I definita da un valore d_I detto *supporto* del nodo I ;
- S è l'insieme dei nodi per i quali la funzione di forma $\Phi_I(\mathbf{x})$ è non nulla

L'espressione formale è dunque analoga a quella nota per gli Elementi Finiti, con la differenza che ora le funzioni dell'equazione (4.1) sono approssimanti e non già interpolanti, verificandosi $u_I \neq (\mathbf{x}_I)$. Questo fatto ha, come di seguito specificato, un'importante ricaduta nell'imposizione delle condizioni al contorno di tipo essenziale.

I vari metodi differiscono tra loro essenzialmente per:

- il tipo di approssimazione che viene effettuata: si distinguono a tale proposito i metodi *intrinseci* (SPH, MLS) dai metodi detti *estrinseci* (PUFEM, hp-clouds);
- il tipo di integrazione della forma differenziale: in particolare alcuni metodi utilizzano la forma “forte” avvalendosi del metodo di collocazione per la costruzione del sistema lineare risolvibile; altri usano invece il metodo di Galerkin integrando la forma debole;

In particolare, tra le formulazioni meshless che usano il metodo di Galerkin, la discretizzazione della forma differenziale può avvenire o usando dei punti di integrazione in cui le funzioni sono valutate (cosiddetti *stress points*) oppure ricorrendo alla cosiddetta *background mesh* o *cell structure*, un set di celle di integrazione ove viene utilizzato il metodo della quadratura di Gauss.

Sebbene l'assenza della mesh rappresenti, oltre che ragione di novità, anche motivo di attrattiva verso questi metodi, va ciononostante rilevato come essi non si siano ancora affermati nella pratica corrente: pochi sono i codici commerciali che implementano algoritmi meshless e molti metodi sono ancora in fase di sviluppo con applicazioni sperimentale in casi tecnologici la cui complessità giustifichi lo sforzo di una consistente indagine teorica e speculativa.

La maggior parte dei metodi meshless sinora sviluppati accusa infatti alcuni punti critici:

- difficoltà nell'imporre le condizioni al contorno di tipo essenziale: il carattere non interpolatorio delle funzioni di forma rendono impossibile l'imposizione diretta di questo tipo di condizioni al contorno per cui si deve ricorrere a tecniche dedicate; le tecniche più diffuse sono la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange e i *penalty methods*, ma va sottolineato come il tema sia ancora oggetto di indagine e di sviluppo teorico e come altre elaborate tecniche siano attingibili dalla letteratura [46];
- il calcolo delle derivate risulta per alcuni algoritmi significativamente laborioso;
- per i metodi che usano i punti di Gauss per integrare la formulazione forte della forma differenziale, il numero di punti richiesto è in alcuni casi elevato;
- le funzioni di forma hanno spesso continuità maggiore di C^0 con riduzione

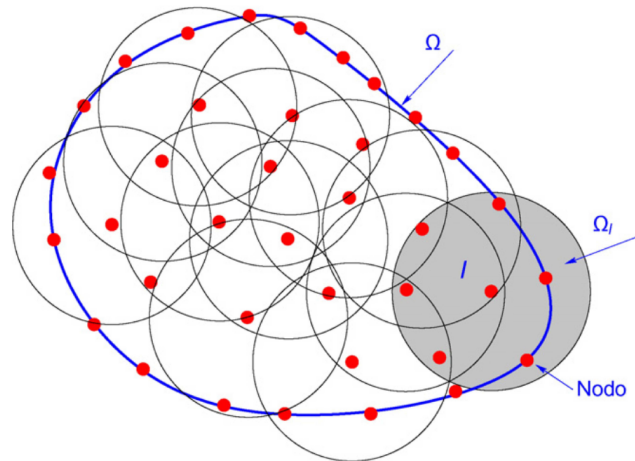


Figura 4.1. Discretizzazione con approccio meshless: nodi e domini di influenza (Ω_i)

dell'ordine di convergenza e con ostacoli nel considerare discontinuità nelle proprietà materiali;

- alcuni metodi non funzionano con distribuzioni arbitrarie di punti (necessitando di griglie regolari) o richiedono specifici requisiti nella connettività locale tra i punti per ottenere risultati precisi;

L'aspetto dell'onere computazionale nella definizione delle connettività locali è da taluni autori posto in particolare evidenza anche sotto lo specifico profilo "tassonomico" della classificazione di un metodo come "meshless": se da un lato l'idea centrale dell'assenza di mesh è uno degli elementi comunemente ritenuti focali, Idelsohn [44] afferma che «*un metodo meshless è un algoritmo in cui la definizione delle funzioni di forma dipende solamente dalla posizione dei nodi*»; ciononostante l'esigenza di una rapida definizione della connettività locale tra i nodi viene ritenuta un elemento imprescindibile, tanto che Idelsohn et alii ([47] e [48]) affermano:

Un metodo meshless è un algoritmo in cui:

1. *la definizione delle funzioni di forma dipende solamente dalla posizione dei nodi;*
2. *la valutazione della connettività locale ha complessità computazionale lineare rispetto al numero dei nodi.*

Questi requisiti giustificano quanti¹ affermano che in realtà, sotto il profilo della efficienza nella definizione della connettività, non tutti i metodi siano realmente meshless.

Lo sviluppo degli algoritmi è comunque ancora in corso, e come alle origini i limiti del FEM, oggi sono le difficoltà e le limitazioni degli algoritmi meshless "storici" ad essere l'ostacolo che le nuove formulazioni si impegnano a superare, come ben evidenziato in [49]. Allo stato attuale gli approcci più promettenti paiono essere rappresentati dai metodi MFEM, XFEM e GFEM.

4.1.1 Utilizzo di approcci meshless in ambito biomeccanico

Nello specifico dell'ambito biomeccanico computazionale l'applicazione di approcci meshless resta tutt'ora limitata a pochi studi malgrado sia gli aspetti morfologici delle geometrie che la complessità dei problemi trattati rendano a priori interessante il loro utilizzo.

I principali ambiti di applicazione sono la simulazione chirurgica ([50], [51]) e la simulazione del cedimento dei tessuti molli ([52]), ambiti entrambi in cui il

¹cfr. [48]

FEM risulta inadeguato in caso di grandi deformazioni con la perdita di continuità del dominio.

Lo sforzo tangibile di ricorrere ad approcci meshless per raggiungere simulazioni complesse difficoltosamente approntabili altrimenti, è ravvisabile in molti lavori riportati in letteratura: Wong et al. [53] presentano ad esempio un ambiente per l'applicazione di approssimazioni definite "element-free" nell'ambito della cardiologia computazionale in cui viene presentata l'implementazione di un modello meshless di un modello fisiologico del cuore costruito da immagini medicali. Il lavoro riporta delle comparazioni con il FEM su geometrie semplificate e dimostra la plausibilità fisiologica di un modello di cuore umano costruito da immagini di risonanza magnetica.

Chun et al. [54] realizzano un modello MGFd per lo studio della crescita della placca interna dei vasi sanguigni: il modello, basato su tre immagini di risonanza magnetica distanziate nel tempo, è bidimensionale e adotta un modello semplificato sia per le proprietà meccaniche del vaso che per il modello di accrescimento del deposito.

Horton et al. [55] affrontano la simulazione della deformazione di tessuti molli in tempo reale con una formulazione lagrangiana meshless basata sulle differenze centrali con integrazione esplicita per non linearità di carattere geometrico; il focus dell'applicazione è la *brain indentation*, problema rispetto al quale gli autori illustrano la validazione dell'analisi con misure sperimentali condotte su un cervello suino.

Sempre nell'ambito dei modelli *soft tissue* Pena et al. [56] applicano il NEM al problema delle grandi deformazioni in materiali non isotropi "fibro-rinforzati": gli autori illustrano un modello di legamento umano, confrontando i risultati con quelli ottenuti da una analisi FEM accoppiata.

Nello specifico ambito della biomeccanica dei tessuti ossei l'uso di approcci meshless è invece molto limitato: solo tre lavori in letteratura riportano l'utilizzo di algoritmi meshless nella predizione del comportamento meccanico di segmenti ossei. Liew et al. [57], si avvalgono del Reproducing Kernel Particle Method per analizzare la distribuzione delle deformazioni nella parte prossimale del femore umano in una simulazione dell'effetto dell'invecchiamento e della necrosi di tessuti: oltre all'interesse costituito dall'essere un primo lavoro che utilizza una metodologia meshless nello specifico ambito biomeccanico, l'adozione di un modello semplificato bidimensionale e l'adozione di un materiale base omogeneo costituiscono un significativo limite nella prospettiva delle applicazioni cliniche.

Lo studio di Doblaré et al. [58] esplora invece l'applicazione del NEM in una relativamente ampia casistica (rimodellamento adattivo del tessuto osseo, comportamento iperelastico dei tendini in regime di grandi deformazioni, modello poroelastico delle cartilagini articolari) evidenziando i potenziali vantaggi dell'utilizzo del metodo meshless nelle simulazioni biomeccaniche. Ciononostante manca ancora una applicazione a livello di organo, con un modello tridimensionale di un segmento osseo intero.

Lee et al. [59] applicano una implementazione della Moving Least Square Approximation Technique per analizzare il comportamento meccanico di campioni cubici di osso trabecolare sottoposti a compressione: con un modello tridimensionale dei campioni sperimentali derivato da immagini $\mu-CT$, il lavoro dimostra le notevoli potenzialità rappresentate dall'applicazione diretta del metodo meshless ai dataset di immagini cliniche per la costruzione di modelli numerici.

4.2 Meshless a celle locali con il CM

Come è stato evidenziato, il Metodo delle Celle scrive delle relazioni algebriche tra variabili (di sorgente o di configurazione che siano) di natura globale.

Gli elementi (geometrici e temporali) di supporto per riferire queste grandezze sono costituiti dalle celle di ordine n dei due complessi primale e duale. Tra i due complessi di celle sussiste una relazione di dualità che si manifesta nella corrispondenza biunivoca tra gli elementi corrispondenti.

La chiave di volta dell'approccio può essere vista nella scrittura di un'equazione di bilancio riferita alle celle duali. Le celle duali sono ottenute da una suddivisione arbitraria delle celle primali e costituiscono le regioni tributarie associate ad ogni "vertice" (o in termini generali 0-cella) del complesso primale. Sotto questo profilo, il complesso duale di celle può essere visto come una struttura di supporto del sistema primale volta a collocare le grandezze coinvolte nell'equazione di bilancio. La stessa equazione di bilancio è associata ad una cella duale; la soluzione di tutte le equazioni di bilancio (associate a tutte le celle del sistema duale) consente di determinare, in ultima analisi, le variabili di configurazione associate al sistema primale.

Merita a questo punto sottolineare alcune proprietà immediate delle equazioni di bilancio:

- indipendenza rispetto alla forma della regione tributaria di riferimento;
- indipendenza rispetto all'estensione della regione tributaria di riferimento;

- relativamente ad un sistema in equilibrio, risulterà in equilibrio anche qualunque sua porzione arbitrariamente scelta; questo significa che, relativamente ad un sistema di equilibrio, è possibile scrivere n equazioni di bilancio riferite ad altrettante regioni estratte dal sistema originale: queste regioni, in particolare, possono sovrapporsi in tutto o in parte senza che la validità dei bilanci ad esse riferiti ne traggano danno alcuno.

Queste considerazioni riassuntive sul Metodo delle Celle e sui suoi “strumenti” suggeriscono un approccio “locale” alla costruzione della equazione di bilancio. Dal punto di vista del singolo nodo primale preso in esame, sulla cui circostante regione tributaria (cella duale) si sta scrivendo il bilancio, la conoscenza dei due complessi di celle nella loro globalità è evidentemente superflua: dal punto di vista del nodo esaminato è infatti sufficiente conoscere la connettività locale tra questo nodo ed i nodi primali circostanti, connettività che permette di definire l'insieme delle celle primali che afferiscono al nodo stesso. Definite che siano (localmente) queste celle, è infatti possibile definire - sempre localmente - gli elementi del complesso duale ad esse associati; questo consente in particolare di definire la cella duale che circonda il nodo considerato, ossia la sua regione tributaria rispetto a cui esprimere il bilancio di nodo. Questa procedura, in cui la divisione delle stesse celle primali in porzioni duali avviene più volte per ciascuno dei vertici di cella, è ridondante e computazionalmente non ottimizzata, se applicata alle celle di un complesso definito, nella sua globalità, a priori. Il processo solitamente seguito è quello di esaminare una cella alla volta, calcolando porzioni del bilancio di nodo dei suoi vertici; conducendo questa operazione per tutte le celle primali, si coinvolgono tutte le porzioni di cella duale di competenza di ciascun nodo, e il loro corretto assemblaggio porta immediatamente alla scrittura del sistema risolvibile.

La prospettiva locale nella scrittura dell'equazione di bilancio nodo a nodo suggerisce un approccio meshless reso immediatamente possibile dal Metodo delle Celle. Si prenda infatti in esame un generico nodo P interno ad un dominio (bi o tridimensionale) studiato in cui siano stati posizionati un certo numero di nodi (ad esempio quelli generati da una tradizionale generazione di celle primali); chiameremo convenzionalmente questo nodo preso in esame nodo “polo”. Attorno a questo nodo, è possibile individuare un certo numero di nodi, scelti, tra i nodi prossimi, in modo tale da circondare il nodo polo, evitando cioè che i punti individuati si addensino attorno ad una stessa direzione rispetto al polo. Chiameremo convenzionalmente questi nodi, “nodi satellite”. Con questa costellazione dei nodi “satellite”, opportunamente ordinati, è possibile costruire un insieme di celle che:

- condividano tutte il nodo polo;

- siano tra loro adiacenti;
- coprano interamente l'intorno del nodo polo senza lasciare porzioni di dominio "scoperte".

L'insieme di queste celle costituisce una mesh locale, ovvero un complesso primale locale associato al nodo polo.

Il numero delle celle locali (ossia il numero di nodi satellite), la loro forma e la loro dimensione, sono elementi di principio arbitrari; il numero di satelliti dipende da un lato dalla necessità di coprire tutta una regione circostante il nodo polo e dall'altro dall'esigenza di evitare creazione di celle distorte².

Zovatto e Nicolini [60] hanno rilevato comunque come l'ordine di convergenza ottenuto non dipenda dal numero di nodi satellite utilizzati quando questi varino tra 4 e 8; un numero maggiore di nodi satellite risulta poco conveniente, aumentando la difficoltà nella creazione di celle a forma regolare.

Per ciascuna delle celle del complesso locale si provvede quindi al calcolo delle grandezze coinvolte nel bilancio del vertice corrispondente al nodo polo. La procedura, cella per cella risulta essere la stessa seguita quando la cella veniva considerata come parte di un complesso globale.

Con questa procedura, la matrice fondamentale del sistema di equazioni algebriche che permettono di risolvere il campo studiato (ossia il calcolo dei valori delle sue variabili di configurazione), viene costruita riga per riga; la riga³ elaborata è quella corrispondente numero associato al nodo polo nella numerazione globale dei nodi posizionati all'interno del sistema studiato; gli elementi non nulli di questa riga saranno quelli posizionati nelle colonne di indice pari al numero identificativo dei vari nodi satellite nella numerazione globale.

Non appare del tutto superfluo in questo contesto sottolineare come questo approccio locale comporti la perdita di garanzie circa la simmetria della matrice fondamentale del sistema risolvibile. Nulla assicura infatti il carattere mutuo della relazione polo-satellite: un nodo che figura nella lista dei satelliti di un dato polo, non necessariamente contemplerà questo polo nella lista dei suoi satelliti. Non sussiste quindi necessariamente la simmetria di ruoli tra i nodi nella scrittura

²la geometria delle celle è solitamente espressa da un parametro denominato *aspect ratio*, definito come il rapporto tra la lunghezza del lato più lungo e quella del lato più corto di un elemento; celle molto distorte, individuate da elevato valore *diaspect ratio*, sono caratterizzate da una matrice di interpolazione mal condizionata: questo fatto, che verrà approfondito nel seguente paragrafo, determina una perdita di accuratezza nell'interpolazione della funzione incognita e dunque, in ultima analisi, un decadimento dell'accuratezza della soluzione numerica a livello globale di intero sistema.

³o le righe nel caso in cui la variabile di configurazione sia di natura vettoriale

dei relativi bilanci e questo si traduce, evidentemente, nella perdita di simmetria nella matrice che riassume i bilanci nodali.

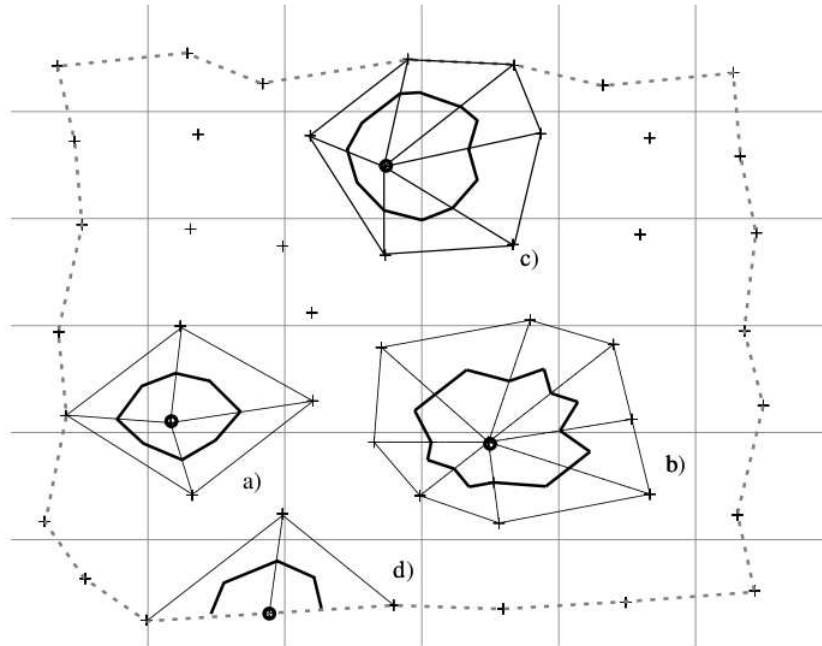


Figura 4.2. Generazione delle mesh locali e definizione delle regioni tributarie: i nodi primali sono indicati con il simbolo “+”, il contorno del dominio in linea tratteggiata, in linea continua sono definite le celle locali e in linea spessa le celle duali associate ai “poli” di volta in volta considerati, ottenuti dalla suddivisione delle celle della mesh locale; in a), b) e c) sono illustrate mesh locali di elementi triangolari ottenute considerando rispettivamente 4, 8 e 6 nodi satellite; in d) illustrata la situazione di un nodo di bordo

Esclusa la natura globale della costruzione della mesh e del bilancio al nodo, l'approccio non presenta significativi elementi di novità: le celle del complesso locale costituiscono il supporto per l'attribuzione delle grandezze coinvolte nel problema fisico trattato e identiche restano le relazioni che portano alla costruzione del bilancio locale ai nodi di cella. Nei due paragrafi seguenti questo approccio meshless a celle locali verrà presentato nelle sue applicazioni al problema della condizione termica in regime stazionario, e al problema dello studio della deformazione di sistemi piani in regime di piccoli spostamenti, due ambiti assunti come riferimento in tutte le indagini esplorative di questo elaborato.

4.2.1 Conduzione termica in regime stazionario

Si assuma che in un sistema di geometria proprietà fisiche (conducibilità termica k) note, siano stati posizionati un conveniente numero di punti (o nodi) sia all'interno che sul contorno, avendosi in particolare un nodo in corrispondenza di ogni eventuale vertice. La posizione dei nodi sia nota rispetto ad una riferimento cartesiano globale esterno XOY , come illustrato in figura (4.3).

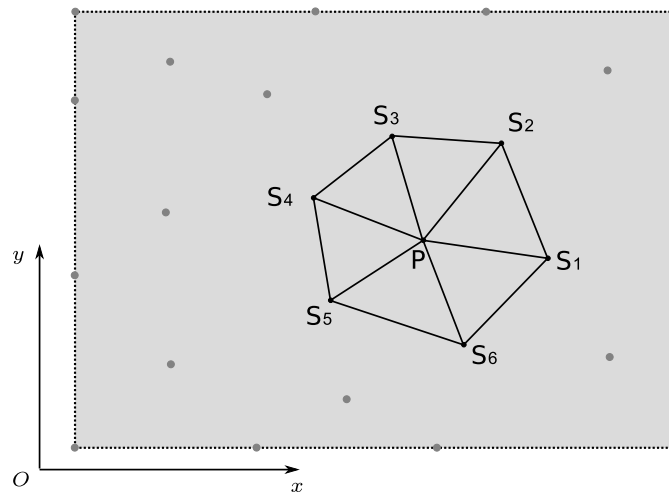


Figura 4.3. Distribuzione di nodi nel dominio in esame e definizione di una mesh locale attorno al generico nodo interno P_P con sei nodi satellite S_i

Note le condizioni al contorno (temperature imposte, sorgenti di calore concentrate, flussi di calore sul contorno) ci si pone l'obiettivo di determinare i valori della temperatura in ogni nodo.

L'algoritmo prevede la definizione di una mesh di celle primali localmente nodo a nodo; preso in esame un generico nodo polo P :

- si individuano i più vicini nodi circostanti⁴;
- si ordinano i o questi nodi in senso, ad esempio, antiorario rispetto al nodo polo, in modo tale da avere una lista ordinata di N nodi satellite S_i ;

⁴l'individuazione dei nodi circostanti può avvenire con un criterio empirico di individuazione dei nodi contenuti all'interno di una circonferenza di raggio R valutato a partire da informazioni circa la densità - globale o locale - dei nodi

- si definiscono N celle locali c_i : le prime $N - 1$ celle avranno vertici P, S_i, S_{i+1} ; l'ultima avrà vertici P, S_N, S_1 ;
- si provvede alla definizione della regione tributaria del nodo polo: un modo immediato è ad esempio quello di creare il complesso di celle duale locale a partire dal complesso primale locale appena definito;

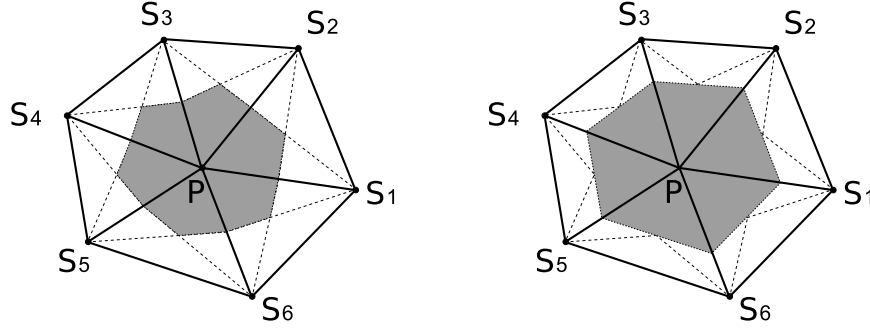


Figura 4.4. Creazione della regione tributaria del nodo polo: a sinistra la regione è individuata dalla divisione di ogni cella appoggiata al baricentro e ai punti medi dei lati, come usualmente effettuato nel CM tradizionale; nella figura di destra la regione è delimitata in ogni cella da una superficie parallela al lato di cella opposto al nodo polo e passante per il baricentro di cella

- cella per cella si calcolano i flussi di calore in transito attraverso la superficie di confine tra la cella duale del nodo polo e il resto della cella; queste grandezze saranno funzione dei valori di temperatura nodale dei vertici della cella esaminata. Con riferimento alle notazioni di figura (4.5) il flusso attraverso l'elemento di superficie piana orientata $\mathbf{A}$ è esprimibile come⁵:

$$Q_P^c = \frac{1}{2t A_c} [A_x \ A_y] \mathbf{K}_c \begin{bmatrix} A_{hx} & A_{ix} & A_{jx} \\ A_{hy} & A_{iy} & A_{jy} \end{bmatrix}_c \begin{Bmatrix} T_h \\ T_i \\ T_j \end{Bmatrix}_c \quad (4.2)$$

essendo:

- t lo spessore del sistema piano;
- A_c l'area della cella c ;
- A_x e A_y le componenti del vettore area $\mathbf{A}$;
- K_c la matrice di conducibilità termica della cella c ;

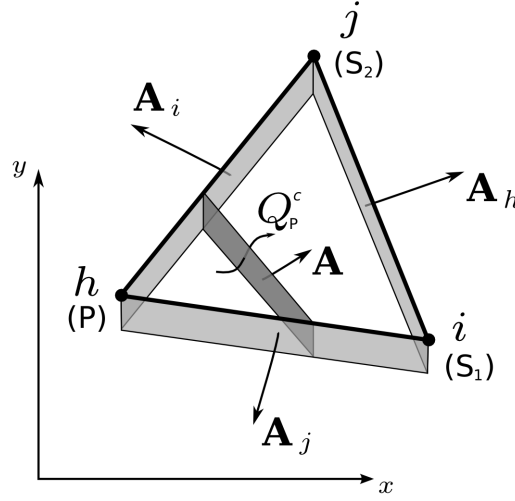


Figura 4.5. Flusso attraverso una superficie orientata $\mathbf{A}$ nella cella c : orientazione dei vettori area; a puro titolo di esempio è stata assunta l'esatta geometria della cella 1 di vertici P, S_1, S_2

- $A_{hx}, A_{hy}, A_{ix}, \dots$ i vettori area associati ai lati della cella c di cui alla figura (4.5).
- si scrive il bilancio di calore al nodo polo, imponendo l'equivalenza tra il calore generato G_P all'interno della sua regione tributaria e il calore uscente dalle sue superfici di contorno; avendo calcolato, cella per cella del complesso locale, tutti i termini di flusso Q_P^c attraverso le porzioni di superficie A_P^c di contorno della regione tributaria del nodo polo P , si ha

$$\sum_{c \in \mathcal{I}(P)} Q_P^c = G_P \quad (4.3)$$

dove il termine a primo membro è espresso in funzione dei valori nodali di temperatura di tutti i nodi satellite S_i della costellazione. Si ottiene una espressione nella forma:

$$[k_P \quad k_{S_1} \quad k_{S_2} \quad \dots \quad k_{S_N}]_c \begin{Bmatrix} T_P \\ T_{S_1} \\ T_{S_2} \\ \dots \\ T_{S_N} \end{Bmatrix}_c = G_P \quad (4.4)$$

⁵cfr. [30]

I coefficienti della matrice a primo membro andranno a posizionarsi nella matrice fondamentale del sistema lineare risolvibile alla riga corrispondente all'indice di nodo associato al nodo polo nella numerazione complessiva globale dei nodi; le colonne in cui si posizioneranno i vari coefficienti sono quelle corrispondenti agli indici dei nodi della costellazione (polo e satelliti) nella medesima numerazione. Analogamente accade per il valore a secondo membro che va a costituire posizionarsi nel termine noto del sistema risolvibile alla riga associata al nodo polo.

Nota: come precisato nell'introduzione, la definizione della regione tributaria attorno al nodo polo è arbitraria. Nel caso siano presenti sorgenti distribuite è necessario assicurare una piena copertura del dominio con l'insieme delle regioni tributarie locali, pena l'errato computo dei termini di sorgente.

4.2.1.1 Nodi di bordo

La procedura da seguire per i nodi di bordo rimane sostanzialmente inalterata; come peraltro già nell'approccio tradizionale, nel bilancio al nodo polo andranno tenuti presente anche eventuali flussi di calore applicati al contorno del dominio nella porzione Φ_P che interessa la cella duale del polo. L'equazione (4.3) assume dunque la forma:

$$\sum_{c \in \mathcal{I}(P)} Q_P^c = G_P + \Phi_P \quad (4.5)$$

4.2.1.2 Alcuni test numerici

Per verificarne l'accuratezza, l'approccio descritto è stato applicato alla soluzione della equazione di Laplace $\nabla^2(w) = 0$ su un dominio piano quadrato di lato unitario centrato nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano con assi paralleli ai lati; nel dominio sono stati posizionati dei punti secondo una griglia regolare parallela ai lati; Da questa griglia, con spostamenti random e facendo in modo di avere un punto in ogni vertice e un certo numero di punti posizionati lungo ciascun lato⁶, si sono poi ottenute delle distribuzioni casuali di punti nel dominio. Sui punti del contorno sono stati imposti i valori assunti dalla funzione armonica:

$$w_t(x,y) = e^x \cos y \quad (4.6)$$

soluzione del problema, il cui grafico è raffigurati in figura (4.7).

Come parametro di valutazione della precisione della soluzione numerica, viene

⁶per i punti posizionati sui lati lo spostamento avviene lungo il lato stesso mentre i punti posizionati sui vertici non subiscono alterazioni di posizione

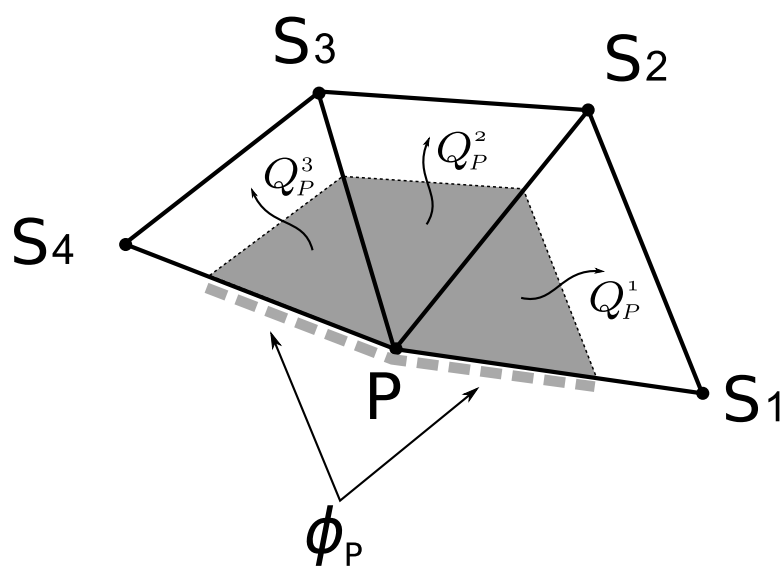


Figura 4.6. Bilancio sulla regione tributaria di un nodo di bordo quando presente un valore di flusso sul contorno del dominio

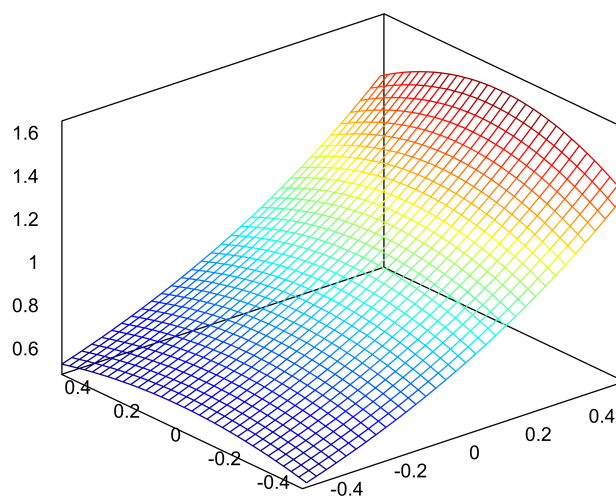


Figura 4.7. Funzione armonica $e^x \cos y$ nel dominio di lato unitario oggetto del test

utilizzato il valore dello scarto quadratico medio rispetto alla soluzione teorica:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_i} (w_{t,i} - w_i)^2}{N_i}} \quad (4.7)$$

essendo N_i il numero di nodi interni (quelli su cui non sono stati imposti i valori della funzione soluzione del problema), $w_{t,i}$ il valore assunto dalla soluzione teorica nel punto i e w_i il valore ottenuto dalla soluzione numerica nello stesso punto.

Il problema così posto è stato risolto con la procedura meshless a celle locali sopra descritta, implementata con riferimento a costellazioni locali composte da 4 satelliti.

La stima dell'ordine di convergenza, ossia del decrescere dell'errore al diminuire di una misura significativa della distanza dei punti, è stata effettuata con riferimento ad una griglia regolare di punti, situazione in cui il passo di griglia dà una misura esatta della dimensione associata alla distribuzione di punti. La tabella (4.1) riporta i valori ottenuti per il parametro δ con passi della griglia man mano ridotti:

lato	δ
0.5	0.002604
0.25	0.000543
0.125	0.000122
0.0625	0.000029
0.03125	0.000007

Tabella 4.1. Valore dell'errore medio δ per i punti interni al dominio al variare del passo della griglia di punti

Questi stessi valori, riportati in scala logaritmica nel grafico di figura (4.8), evidenziano come l'ordine di convergenza, per le varie interpolazioni sia pari a 2; relativamente alla griglia regolare di punti.

4.2.2 Sistemi elastici piani in regime di piccoli spostamenti

Come caso del problema scalare sia dato un sistema piano di geometria e proprietà note, su cui siano applicate delle forze e siano imposti dei vincoli agli spostamenti. All'interno e sul contorno di questa geometria venga disposto un conveniente numero di punti la cui posizione sia nota relativamente ad un riferimento cartesiano globale xOy , come illustrato in figura (4.3). Lo scopo che ci si

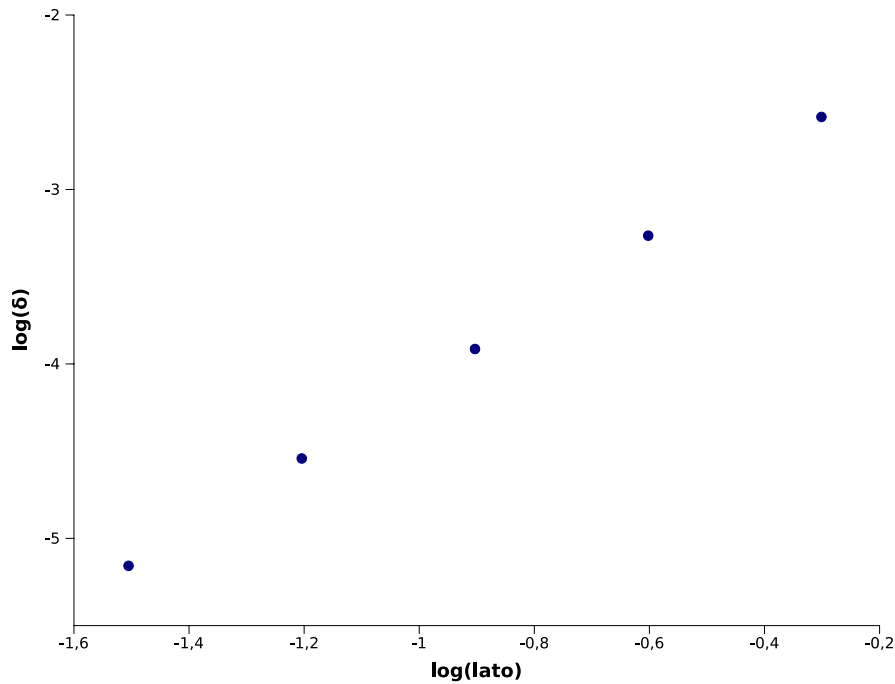


Figura 4.8. Errore medio rispetto al passo di griglia per le implementazioni con 4,5 e 8 nodi satellite

prefigge è quello di determinare le componenti del vettore spostamento in tutti i punti posizionati.

La procedura sarà sostanzialmente la stessa illustrata nel precedente paragrafo 4.2.1, con la differenza che entro ogni cella andrà determinata la forza agente su ogni porzione di superficie delimitante la regione tributaria del nodo polo in funzione dei valori delle componenti di spostamento nodale.

Per chiarezza la procedura viene qui riassunta, dedicando maggiore attenzione alle operazioni specifiche del problema ora trattato; considerato un generico nodo P interno al dominio, assunto come nodo polo

- costruire la mesh locale di celle primali con un conveniente numero di nodi satellite scelti tra quelli prossimi circostanti in modo da ottenere un insieme di celle triangolari adiacenti, tutte aventi in comune il nodo polo P e aventi adeguata regolarità di forma (come suggerito dalla figura (4.3));
- definire la regione tributaria del nodo polo, provvedendo alla costruzione del complesso duale locale (come suggerito dalla figura (4.4));
- cella per cella si calcolano le forze agenti sulla superficie di confine tra la cella duale del nodo polo e il resto della cella; queste grandezze saranno

funzione dei valori delle componenti dello spostamento dei vertici della cella esaminata. Con riferimento alle notazioni di figura (4.9) la forza agente sull'elemento di superficie piana orientata $\mathbf{A}$ è esprimibile come⁷:

$$\mathbf{T}_P^c = \begin{Bmatrix} T_{P,x} \\ T_{P,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x & 0 & A_y \\ 0 & A_y & A_x \end{bmatrix} \mathbf{D}_c \mathbf{B}_c \begin{Bmatrix} u_h \\ v_h \\ u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}_c \quad (4.8)$$

essendo:

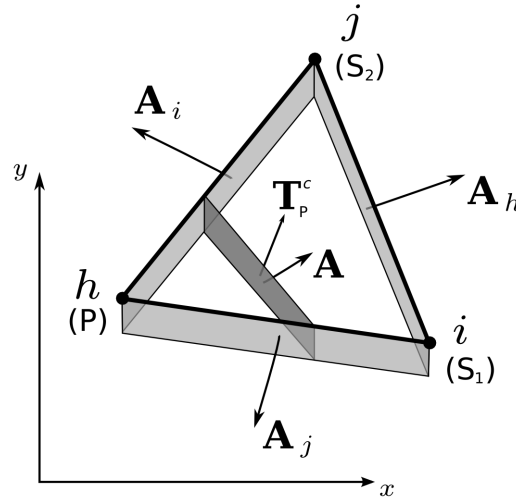


Figura 4.9. Forza agente su una superficie orientata $\mathbf{A}$ nella generica cella c : orientazione dei vettori area; a puro titolo di esempio è stata assunta l'esatta geometria della cella 1 di vertici P, S_1, S_2

- A_x e A_y le componenti del vettore area $\mathbf{A}$;
- $\mathbf{D}$ la matrice del legame costitutivo che, per uno stato piano di tensione in un materiale omogeneo e isotropo, è:

$$\mathbf{D}_c = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

⁷cfr. [61]

con E modulo di elasticità e ν modulo di Poisson del materiale;

- $\mathbf{B}$ la matrice che esprime il vettore gradiente degli spostamenti nella cella c :

$$\mathbf{B}_c = -\frac{1}{2t A_c} \begin{bmatrix} A_{hx} & 0 & A_{ix} & 0 & A_{jx} & 0 \\ 0 & A_{hy} & 0 & A_{iy} & 0 & A_{jy} \\ A_{hx} & A_{hy} & A_{ix} & A_{iy} & A_{jx} & A_{jy} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

con t spessore del sistema piano, A_c area di cella e in cui compaiono le componenti dei vettori area di cella di cui alla notazione di figura (4.9)

- $u_h, v_h, v_i, \dots$ le componenti dello spostamento nodale ai nodi di cella h , i e j .
- si scrive il bilancio delle forze al nodo polo, imponendo la condizione di equilibrio tra le forze di volume $\mathbf{F}_P$ agenti sulla sua regione tributaria e le forze agenti sulle sue superfici di contorno; avendo calcolato, cella per cella del complesso locale, tutti i termini delle forze di superficie $\mathbf{T}_P^c$ attraverso le porzioni di superficie $\mathbf{A}_P^c$ di contorno della regione tributaria del nodo polo P , si ha

$$\sum_{c \in \mathcal{I}(P)} \mathbf{T}_P^c = \mathbf{F}_P \quad (4.11)$$

dove il termine a primo membro è espresso in funzione dei valori nodali delle componenti di spostamento di tutti i nodi satellite S_i della costellazione. Si ottiene una espressione nella forma:

$$\begin{bmatrix} k_{P,u} & 0 & k_{S_1,u} & 0 & k_{S_2,u} & 0 & \dots & k_{S_N,u} & 0 \\ 0 & k_{P,v} & 0 & k_{S_1,v} & 0 & k_{S_2,v} & 0 & \dots & k_{S_N,v} \end{bmatrix}_c \begin{Bmatrix} u_P \\ v_P \\ u_{S_1} \\ v_{S_1} \\ u_{S_1} \\ v_{S_1} \\ \dots \\ u_{S_N} \\ v_{S_N} \end{Bmatrix}_c = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

I coefficienti della matrice a primo membro andranno a posizionarsi nella matrice fondamentale del sistema lineare risolvete alle righe associate al nodo polo e nelle colonne associate ai nodi satellite nella numerazione globale dei nodi⁸.

⁸se M è l'indice associato ad un nodo, le righe (e le colonne) associate hanno indice $2M - 1$ e $2M$

4.2.2.1 Test sulla trave di Timoshenko

L'indagine sulla precisione dell'implementazione è stata condotta relativamente al problema della trave di Timoshenko, per il quale si dispone di una soluzione analitica di confronto. Si tratta di una trave "incastata" ad una estremità e assoggetta ad una distribuzione parabolica di sforzi di taglio all'estremità opposta, come illustrato in figura (4.10).

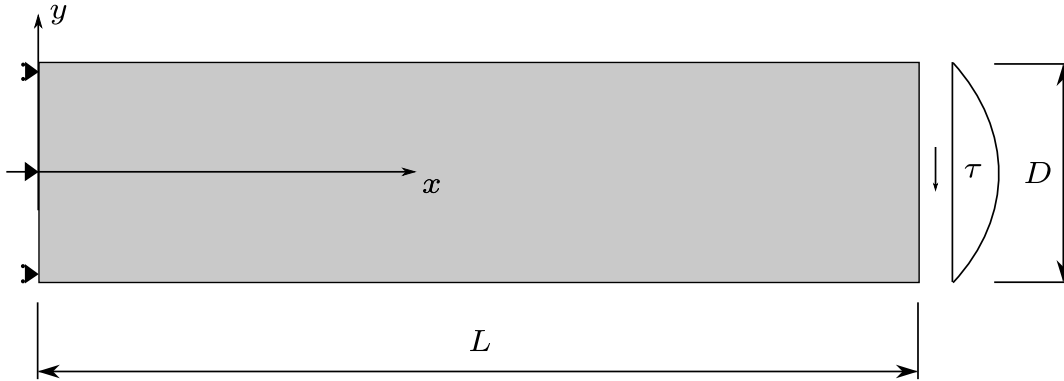


Figura 4.10. Trave di Timoshenko: schema statico, condizioni di carico, riferimento cartesiano e notazioni adottate; si noti come la condizione di vincolo sia approssimata e valevole solo ai fini delle stime e dei calcoli tecnico-ingegneristici, prevedendo la soluzione teorica per $x = 0$ spostamenti non nulli

Per il problema, relativamente ad un materiale omogeneo e isotropo, il campo di spostamenti $\{u, v\}$ è definibile in forma chiusa dalle relazioni⁹:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{Py}{6EJ} \left[(6L - 3x)x + (2 + \nu) \left(y^2 - \frac{D^2}{4} \right) \right] \\ v &= -\frac{P}{6EJ} \left[3\nu y^2 (L - x) + (4 + 5\nu) \frac{D^2 x}{4} - (3L - x)x^2 \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

essendo:

- E e ν il modulo di elasticità e il modulo di Poisson, rispettivamente, del materiale;
- P la risultante degli sforzi di taglio;
- L e D la lunghezza e l'altezza della trave;
- x e y le coordinate del punto nel riferimento di figura (4.10).

⁹[62]

L'analisi delle (4.13) evidenzia come per $x = 0$ le componenti dello spostamento non siano affatto nulle, variando invece in modo parabolica con la coordinata y . La definizione della trave di Timoshenko come di una "trave incastrata" è un'approssimazione lessicale giustificata dall'esiguità (relativa) degli spostamenti, solamente nel contesto della pratica tecnico ingegneristica. Ai fini della valutazione di precisione degli spostamenti predetti, al contrario, le condizioni di vincolo devono essere introdotte coerentemente con le ipotesi del problema, condizioni sotto le quali le (4.13) valgono esattamente [63]. Per riprodurre il problema sono stati dunque imposti i valori di spostamento previsti dalla soluzione esatta su tutti i punti del contorno, andando ad indagare la corrispondenza tra soluzione numerica e soluzione teorica nei punti interni.

I parametri descrittivi del problema trattato nel test sono riassunti in tabella (4.2); il test è stato condotto adottando una costellazione costituita da 4 nodi satellite per i nodi di interni, da tre satelliti per i nodi di bordo e da due per i nodi di vertice (singola cella); come metrica di precisione è stato considerato il valore quadratico medio del modulo della differenza (vettoriale) tra spostamento numerico e spostamento teorico in ciascuno dei punti non vincolati:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{N_i} [(u_{i,num} - u_{i,t})^2 + (v_{i,num} - v_{i,t})^2]}{N_i}} \quad (4.14)$$

avendo indicato con

- N_i il numero dei nodi interni (dunque non vincolati, e per cui ha senso il confronto con la soluzione teorica);
- con u e con v le componenti del vettore spostamento secondo la direzione x e y , rispettivamente, del sistema di riferimento globale;
- con il pedice $_{num}$ un valore di soluzione numerica;
- con il pedice $_t$ un valore di soluzione teorica;

Il calcolo è stato condotto distribuendo dei punti all'interno del dominio secondo una griglia regolare equispaziata; i valori di δ al variare del passo di griglia sono riportati in tabella (4.3) e, in scala logaritmica, in figura (4.11).

4.3 Interpolazione locale con funzioni polinomiali

Nel precedente paragrafo è stata presentato un approccio meshless immediatamente offerto dalla struttura concettuale e procedurale del Metodo delle Celle.

parametro	valore	unità di misura	lato	δ
L	8	m	1	0.0082415
D	2	m	0.5	0.0071274
E	1e3	GPa	0.25	0.0066124
ν	0.25	-	0.125	0.0063476
P	2	N		

Tabella 4.2. Parametri descrittivi il problema della trave di Timoshenko usato per il confronto numerico

Tabella 4.3. Valore dell'errore medio δ per i punti interni al dominio al variare del passo della griglia di punti

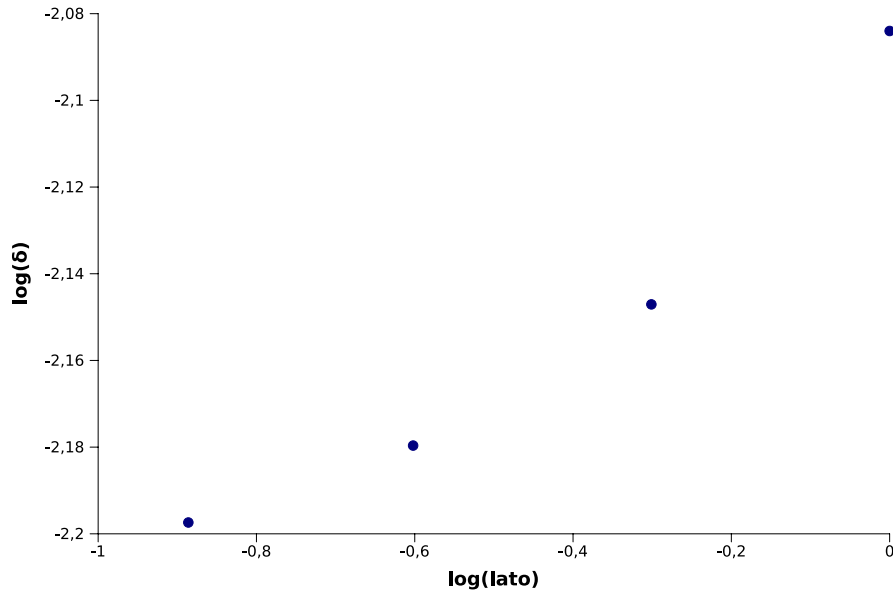


Figura 4.11. Test della trave di Timoshenko: errore medio rispetto al passo di griglia in scala logaritmica con approccio CM meshless a celle locali.

Il concetto di bilancio di nodo condotto sulla regione tributaria costituita dalla corrispondente cella duale, suggerisce infatti la definizione di una mesh "locale" che circonda ogni singolo nodo, allo scopo di definirne l'associata cella duale, sua regione tributaria. La definizione delle grandezze coinvolte nel bilancio di nodo, avviene cella per cella con la consueta interpolazione delle grandezze nodali di cella. Sotto questo profilo, le celle primali del complesso primale locale definito attorno al nodo polo costituiscono quindi una infrastruttura per collocare e definire le grandezze coinvolte nel bilancio locale del nodo polo. In particolare le

single celle sono il supporto per la interpolazione locale dei valori nodali delle ricercate variabili di configurazione (e delle grandezze da esse derivate).

Questa considerazione, unitamente all'ispirazione offerta da alcune metodologie meshless in ambito prettamente differenziale, suggeriscono la seguente procedura:

- fissata l'attenzione su un nodo (il nodo polo), individuare un certo numero di nodi prossimi circostanti (i nodi satellite) definendo una costellazione di punti;
- interpolare i valori incogniti delle variabili di configurazione nei vari punti della costellazione con una funzione analiticamente definita (ad esempio un polinomio di grado opportuno);
- derivare analiticamente le grandezze coinvolte nell'equazione di bilancio, attraverso le equazioni di struttura e costitutive applicate analiticamente alle funzioni interpolanti adottate;
- scrivere l'equazione bilancio del nodo polo relativamente ad una regione tributaria di forma elementare (circonferenza/sfera, quadrato/cubo) centrata sul polo stesso;

Da quanto esposto resta lecito chiedersi quanto un simile approccio sia, dal punto di vista della categorizzazione, affiliabile al Metodo delle Celle: del Metodo delle Celle viene infatti conservata solamente l'idea di bilancio su una regione tributaria di nodo ad estensione discreta; per il resto la formulazione algebrica delle equazioni coinvolte risulta appannata da un significativo uso di equazioni integro-differenziali; pure la filosofia del riferimento delle variabili agli elementi geometrici risulta sfumata.

A lungo si potrebbe quindi discutere sulla la proprietà con cui la letteratura abbia accettato (almeno relativamente alla prima delle due formulazioni che verranno di seguito proposte) di annoverare questi approcci nella famiglia del Metodo delle Celle; la questione, che pure è tutt'altro che marginale, appare in questo contesto di secondario rilievo: oggetto della ricerca non è infatti specificamente l'indagine circa l'applicabilità del Metodo delle Celle ai problemi di biomeccanica; il lavoro è invece piuttosto una riflessione concentrata sulle alternative al FEM che presentino carattere di innovazione¹⁰. Sotto questo aspetto, accettando temporaneamente la denominazione di Metodo delle Celle in attesa che la comunità

¹⁰come riportato nella presentazione del lavoro la valutazione che ha portato a identificare nel FEM il metodo numerico di elezione per lo studio di problemi di biomeccanica ortopedica ha nel passato affrontato una valutazione critica di tutte le alternative disponibili tra quelle consolidate per la categoria di problemi affini

scientifica affronti e risolva la questione, gli approcci proposti rappresentano sicuro motivo di interesse, tanto da giustificare la loro presenza in questo elaborato esplorativo.

Nel seguito verranno quindi presentate due formulazioni che implementano la procedura descritta. La prima delle due formulazione adotta come funzione interpolante i polinomi; essa, presentata in [60] relativamente alla soluzione dell'equazione di Laplace in domini bidimensionali, viene qui riportata, sviluppata, e applicata alla soluzione del problema della deformazione elastica di sistemi piani in regime di piccoli spostamenti, di seguito denominato, per mere ragioni di sintesi, come "problema dell'elasticità piana".

Il secondo approccio muove dall'intenzione di superare alcuni limiti dovuti all'interpolazione polinomiale: esso usa le funzioni di base radiale per l'interpolazione locale delle grandezze incognite e viene qui presentato e descritto relativamente ad entrambi i problemi sin qui trattati (campi scalari e problema dell'elasticità piana).

Una prima e immediata idea per interpolare localmente nell'intorno del nodo polo i valori assunti dalla variabile di configurazione (incognita) nei nodi circostanti è l'adozione di una funzione polinomiale. Ragioni di simmetria (il problema prescinde dal riferimento adottato) impongono la scelta di un polinomio in cui le coordinate coinvolte figurino con uguale grado. Specificamente la scelta avviene attingendo al cosiddetto triangolo di Pascal¹¹ per la selezione delle funzioni interpolanti. Nel seguito verranno descritti nel dettaglio le formulazioni per i due problemi (scalare e vettoriale) di riferimento.

4.3.1 Campo scalare stazionario

Considerando come riferimento il problema della conduzione del calore in regime stazionario all'interno di un dominio bidimensionale: sia dato un sistema piano nel quale siano stati posizionati un certo numero di punti, di seguito chiamati "nodi", la cui posizione sia riferita ad un sistema di assi cartesiani di riferimento. Lo scopo è quello di determinare la temperatura in ciascuno dei punti, note che siano le condizioni al contorno (temperature o flussi di calore imposti).

Si consideri un generico nodo P_p interno al dominio e si adotti un sistema di riferimento cartesiano locale con origine in questo nodo e assi paralleli al sistema di riferimento globale. Tra i nodi prossimi al nodo polo, si selezioni una costellazione di nodi satellite S_i ; per semplicità di illustrazione si assuma ora che la costellazione sia composta da 4 satelliti.

¹¹cfr. [64] cap. 7

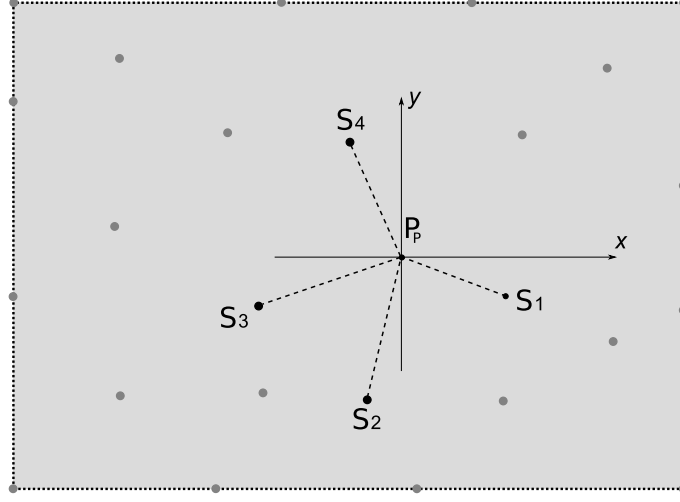


Figura 4.12. Costellazione di 4 satelliti attorno ad un generico nodo interno assunto come polo

Nell'intorno del polo P_p il campo scalare studiato verrà approssimato interpolando i valori T_i ai nodi della costellazione (polo P_p più satelliti S_i) con una funzione polinomiale di grado due:

$$T(P) = T(x, y) = a + bx + cy + dx^2 + ey^2 \quad (4.15)$$

I quattro coefficienti sono determinabili imponendo che il polinomio assuma in ciascun punto della costellazione il valore scalare assunto dal campo in quel punto:

$$T(P_i) = T(x_i, y_i) = a + bx_i + cy_i + dx_i^2 + ey_i^2 = T_i. \quad (4.16)$$

Le componenti del vettore gradiente della temperatura¹² $\mathbf{g}_c$ in un punto $P(x, y)$ sono esprimibili in forma analitica derivando la funzione di interpolazione locale:

$$\begin{aligned} g_x &= \frac{\partial T}{\partial x} = b + 2dx \\ g_y &= \frac{\partial T}{\partial y} = c + 2fy. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Il flusso unitario di calore $\mathbf{q}_c$ è correlato con il vettore gradiente delle temperature a meno della conducibilità termica k del mezzo¹³:

$$\mathbf{q}_c = -k\mathbf{g}_c. \quad (4.18)$$

¹²il pedice c si rende necessario riferendosi all'interpolazione locale della costellazione $\mathcal{C}$

¹³si è supposto qui per semplicità che il mezzo abbia comportamento isotropo

Nell'intorno del polo P_p il calore che attraversa una superficie orientata S di versore normale $\mathbf{n}$ è evidentemente esprimibile come:

$$Q_S = \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S (q_x n_x + q_y n_y) dS \quad (4.19)$$

Definita una regione tributaria Ω_P attorno al nodo polo, delimitata dalla superficie chiusa $\partial\Omega_P$, il bilancio di nodo impone l'equivalenza tra il flusso netto di calore uscente attraverso la superficie $Q_{\partial\Omega_P}$ e il calore generato Q_{Ω_P} all'interno del volume da essa racchiuso:

$$Q_{\Omega_P} = Q_{\partial\Omega_P} \quad (4.20)$$

essendo:

$$Q_{\partial\Omega_P} = -k \int_{\partial\Omega_P} (g_x n_x + g_y n_y) dS = Q_{\Omega_P}. \quad (4.21)$$

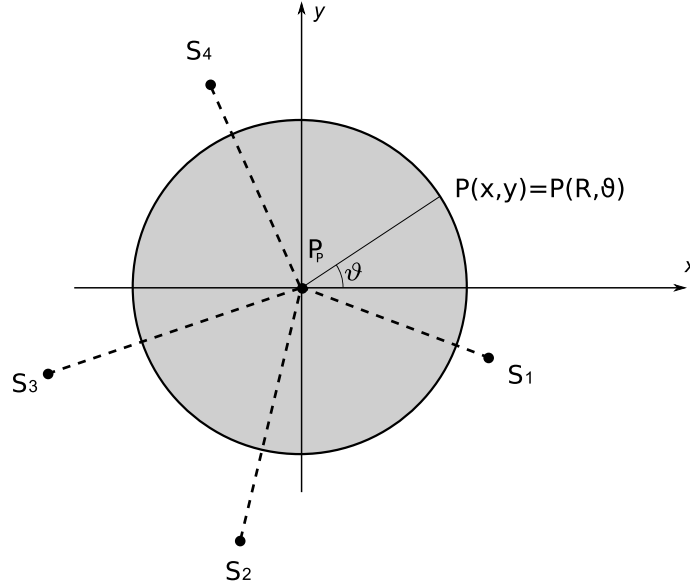


Figura 4.13. Regione tributaria circolare centrata nel nodo polo; è evidenziato il sistema di riferimento polare locale e la sua relazione con il riferimento cartesiano locale

Adottando come regione tributaria una “opportuna” figura piana “elementare” è possibile pervenire ad una espressione analitica del flusso di calore netto attraverso la superficie di contorno.

Si consideri ad esempio come regione tributaria del nodo polo un cerchio di raggio R centrato nel polo. Il valore di R è di principio arbitrario e può essere convenientemente assunto pari al valore medio delle distanze dei nodi satellite dal nodo polo. È qui conveniente adottare un riferimento polare locale centrato nel nodo polo, avente asse di riferimento l'asse delle ascisse del riferimento cartesiano locale, come illustrato dalla figura (4.13). Essendo:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \\ y &= \rho \sin \theta \end{aligned} \quad (4.22)$$

il flusso netto attraverso $\partial\Omega_P$ assume la forma:

$$\begin{aligned} Q_{\partial\Omega_P} &= -tk \int_0^{2\pi} [(2d \cos\theta R + b) g_x R \cos\theta + (2e \sin\theta R + c) R \sin\theta] d\theta \\ &= -2\pi tk (e + d) R^2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

essendo t lo spessore del sistema piano.

Nodi di contorno Se il nodo polo P_p risulta posizionato sul contorno del dominio, la procedura descritta resta inalterata. Con riferimento alla figura (4.14):

- il flusso di calore uscente dalla superficie di confine della regione tributaria assumerà, in termini generici, la forma:

$$Q_{\partial\Omega_P} = -tk \int_{\theta_1}^{\theta_2} [(2d \cos\theta R + b) g_x R \cos\theta + (2e \sin\theta R + c) R \sin\theta] d\theta \quad (4.24)$$

- l'equazione di bilancio contemplerà anche la quota parte dell'eventuale flusso imposto al contorno intercettata dalla regione tributaria:

$$Q_{\partial\Omega_P} = Q_{\Omega_P} + Q_{B\cap\Omega_P} \quad (4.25)$$

Se ϕ è il flusso unitario entrante imposto al contorno, si ha

$$Q_{B\cap\Omega_P} = 2R \phi \quad (4.26)$$

4.3.1.1 Aspetti implementativi

Nell'ottica di una implementazione della procedura in un codice numerico dedicato, conviene accennare all'impostazione "vettoriale" della procedura descritta.

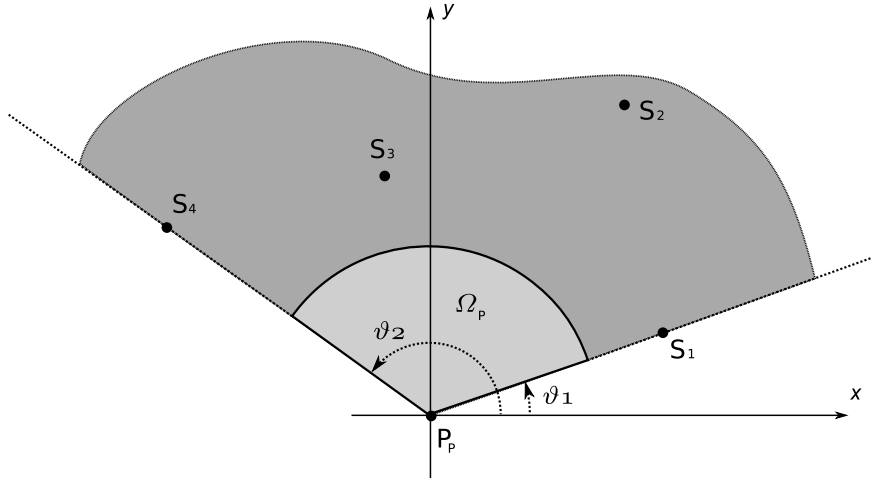


Figura 4.14. Regione tributaria per un polo situato sul bordo del dominio

Innanzitutto l'interpolazione locale può essere espressa nella forma:

$$T(P) = T(x,y) = a + bx + cy + dx^2 + ey^2 = [1 \ x \ y \ x^2 \ y^2] \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{Bmatrix} \quad (4.27)$$

Imponendo che la funzione assuma nei nodi della costellazione i valori del campo ad essi associati, si ottiene il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & y_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & y_4^2 \\ 1 & x_5 & y_5 & x_5^2 & y_5^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

sinteticamente esprimibile in forma matriciale come

$$\mathbf{M}_c \mathbf{a}_c = \mathbf{T}_c \quad (4.29)$$

ove con il pedice c si è inteso indicare il riferimento alla costellazione di punti esaminata.

Il vettore dei coefficienti del polinomio interpolante viene quindi ad essere espresso dalla:

$$\mathbf{a}_c = \mathbf{M}_c^{-1} \mathbf{T}_c \quad (4.30)$$

Il vettore gradiente può venire scritto come:

$$\mathbf{g}_c = \left\{ \begin{matrix} g_x \\ g_y \end{matrix} \right\}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2y \end{bmatrix} \mathbf{a}_c \quad (4.31)$$

e il flusso unitario assume quindi la forma:

$$\mathbf{q}_c = \left\{ \begin{matrix} q_x \\ q_y \end{matrix} \right\}_c = -k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2y \end{bmatrix} \mathbf{a}_c. \quad (4.32)$$

Se il materiale fosse anisotropo, alla costante k andrebbe sostituita la matrice ¹⁴:

$$\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Il flusso netto attraverso la superficie di contorno della regione tributaria del polo, essendo $\mathbf{n} = \{n_x, n_y\}$ il versore della normale alla superficie, assume la forma:

$$\begin{aligned} Q_{\partial\Omega_P} &= \int_{\partial\Omega_P} \mathbf{n} \mathbf{q}_c dS \\ &= -k \int_{\partial\Omega_P} \mathbf{n} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2y \end{bmatrix} \mathbf{a}_c dS \\ &= -tk \int_0^{2\pi} \{R \cos \theta \quad R \sin \theta\} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2R \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2R \sin \theta \end{bmatrix} \mathbf{a}_c d\theta \\ &= -2\pi R^2 tk \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{a}_c \end{aligned} \quad (4.34)$$

essendo t lo spessore del sistema piano. Utilizzando la (4.30), si ottiene immediatamente:

$$Q_{\partial\Omega_P} = -2\pi R^2 tk \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{M}_c^{-1} \mathbf{T}_c \quad (4.35)$$

Il vettore

$$\mathbf{k}_P = -2\pi R^2 tk \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{M}_c^{-1} \mathbf{T}_c \quad (4.36)$$

¹⁴il caso in oggetto considera, per pura compattezza di notazione e senza per questo perdere di generalità, una costellazione composta da 4 nodi satellite; in questo caso, la presenza di un materiale anisotropo porterebbe ad un vettore flusso unitario, espresso dalla (4.32), in cui risulterebbero assenti i termini k_{xy} e k_{yx} ; se, come illustrato nei test di seguito riportati, la costellazione a 4 nodi registra buona accuratezza in presenza di un mezzo isotropo, per trattare correttamente l'anisotropia nella conduzione del calore si rende quindi necessaria una costellazione più ricca di satelliti

contiene i valori da inserire nella matrice fondamentale K del sistema risolvante

$$K T = Q \quad (4.37)$$

alla riga corrispondente all'identificativo del nodo polo nella numerazione globale. Le colonne in cui gli elementi di k_P vanno collocati corrispondono alle colonne di indice pari al numero identificativo di ogni singolo nodo della costellazione nella numerazione globale.

4.3.1.2 Instabilità

Oltre a richiedere una costellazione locale composta da un ben determinato numero di nodi satellite, l'interpolazione polinomiale locale del campo incognito risulta essere poco robusta rispetto alla disposizione geometrica della costellazione di punti su cui si appoggia. Particolari disposizioni dei nodi satellite attorno al polo non rendono infatti possibile l'interpolazione locale con la funzione polinomiale adottata. Che possano sussistere delle configurazioni geometriche inadeguate ad individuare una funzione interpolante in grado di cogliere i valori ai nodi è un fatto intuibile: se la funzione interpolante fosse di tipo lineare, occorrerebbero, evidentemente, tre punti non allineati per poterla "appoggiare" ai valori nodali¹⁵.

Talune disposizioni di punti rendono quindi il problema dell'interpolazione malcondizionato: in termini generali quando un problema è malcondizionato, piccole variazioni nei valori di ingresso si traducono in enormi errori nei valori ottenuti come risultato. Nel caso dell'interpolazione si ha la situazione in cui gli errori di macchina nella valutazione, ad esempio, della posizione geometrica dei punti provocano errori enormi nella stima dei valori della funzione interpolata e, in ultima analisi, nella stima dei valori delle temperature nodali.

L'inadeguatezza della disposizione della costellazione di punti rispetto alla funzione interpolante si traduce in un valore numerico elevato di una quantità detta "numero di condizionamento" della matrice M definito come¹⁶:

$$\mu(R) = \|M\| \|M^{-1}\| \quad (4.38)$$

Più il problema risulta ben condizionato, più il valore di μ risulta essere "contenuto".

A parità di conformazione della costellazione di punti, può poi presentarsi un altro problema: consideriamo a titolo di esempio una costellazione di 4 satelliti

¹⁵il problema è geometricamente visualizzabile con la disposizione di una superficie piana su tre appoggi: perché l'appoggio non sia instabile, i tre punti devono essere distinti e non allineati

¹⁶cfr. [65]

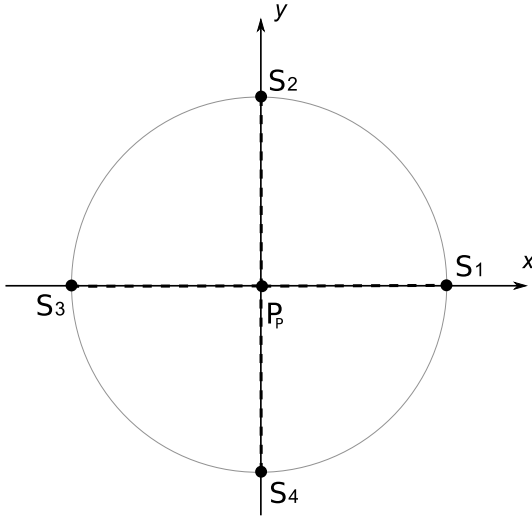


Figura 4.15. Costellazione di 4 satelliti posti a uguale distanza dal nodo polo e allineati a coppie secondo direzioni parallele agli assi del sistema di riferimento locale

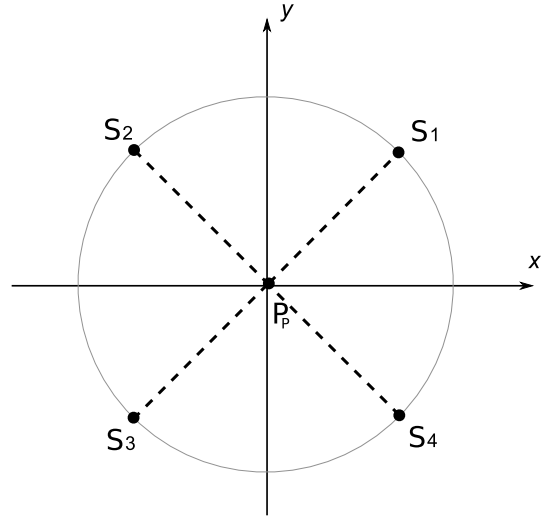


Figura 4.16. Costellazione di 4 satelliti posti a uguale distanza dal nodo polo e allineati a coppie secondo direzioni tra loro ortogonali e inclinate di $\pi/4$ rispetto agli assi del sistema di riferimento locale

disposti come in figura (4.15): nel sistema cartesiano locale centrato nel polo, la matrice M_C assume la forma:

$$M_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & d & 0 & d^2 & 0 \\ 1 & 0 & d & 0 & d^2 \\ 1 & -d & 0 & d^2 & 0 \\ 1 & 0 & -d & 0 & d^2 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

ruotando questa costellazione di punti di $\pi/4$, si ottiene la disposizione di figura (4.16); nel riferimento cartesiano locale la matrice dei coefficienti diviene ora:

$$M_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{d} & \sqrt{d} & d & d \\ 1 & -\sqrt{d} & \sqrt{d} & d & d \\ 1 & -\sqrt{d} & -\sqrt{d} & d & d \\ 1 & \sqrt{d} & -\sqrt{d} & d & d \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

In questo secondo caso il determinante della matrice M_C risulta nullo: questa seconda disposizione di punti risulta quindi inadatta. Dal punto di vista geometrico le due costellazioni sono equivalenti, risultando inalterata la posizione

mutua tra i vari punti della costellazione; quello che è cambiato nei due casi è la posizione relativa tra sistema di riferimento e costellazione di punti.

Questa osservazione suggerisce un metodo per affrontare tutti quei casi in cui la singolarità della matrice di interpolazione sia dovuta alla particolare disposizione tra sistema locale di riferimento e costellazione di punti: siccome il flusso di calore attraverso una superficie è invariante rispetto al riferimento, si può pensare di ruotare il riferimento locale attorno al polo in modo tale da rendere massimo il numero di condizionamento della matrice dei coefficienti dell'interpolazione.

Va infine sottolineato come, una volta individuata la rotazione del sistema locale, si debba provvedere ad esprimere in questo riferimento gli elementi della matrice dei coefficienti dell'interpolazione M ; poiché il bilancio tratta grandezze scalari, non vi sono, come invece sarà illustrato a proposito del problema elastico, ulteriori operazioni per riportare le grandezze coinvolte nel bilancio nel sistema di partenza

4.3.1.3 Alcuni test numerici

Al fine di verificarne l'accuratezza, l'approccio descritto è stato applicato alla soluzione della equazione di Laplace $\nabla^2(w) = 0$ su un dominio piano quadrato di lato unitario centrato nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano con assi paralleli ai lati; nel dominio sono stati posizionati dei punti secondo una griglia regolare parallela ai lati; da questa griglia, con spostamenti random e facendo in modo da avere un punto in ogni vertice e un certo numero di punti posizionati lungo ciascun lato¹⁷, si sono poi ottenute delle distribuzioni casuali di punti nel dominio.

Sui punti del contorno sono stati imposti i valori assunti dalla funzione armonica:

$$w_t(x,y) = e^x \cos y. \quad (4.41)$$

Come parametro di valutazione della precisione della soluzione numerica, viene utilizzato il valore dello scarto quadratico medio rispetto alla soluzione teorica:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_i} (w_{t,i} - w_i)^2}{N_i}} \quad (4.42)$$

essendo N_i il numero di nodi interni (quelli su cui non sono stati imposti i valori della funzione soluzione del problema), $w_{t,i}$ il valore assunto dalla soluzione teorica nel punto i e w_i il valore ottenuto dalla soluzione numerica nello stesso punto.

¹⁷per i punti posizionati sui lati lo spostamento avviene lungo il lato stesso mentre i punti posizionati sui vertici non subiscono alterazioni di posizione

Il problema così posto è stato risolto con la procedura meshless ad interpolazione polinomiale sopra descritta, implementata con riferimento a costellazioni locali composte da diverso numero di nodi (ossia con differenti polinomi di interpolazione locale):

$$\begin{aligned} T_4 &= a + bx + cy + dx^2 + ey^2 \\ T_5 &= a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 \\ T_8 &= a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + gx^2y + hxy^2 + ix^2y^2 \end{aligned} \quad (4.43)$$

ove si è inteso indicare con il pedice il numero dei nodi satellite.

Come regione tributaria del nodo i è stato assunto un cerchio di raggio pari a metà del valore medio della distanza media dei satelliti dal nodo polo [66]. Le espressioni della i -esima riga della matrice fondamentale (esprime il flusso netto attraverso la superficie di confine della regione tributaria del polo) di cui alla formula (4.36) sono, rispettivamente:

$$\begin{aligned} k_{P,4} &= -tk\pi R^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{M}_C^{-1} \\ k_{P,5} &= -tk\pi R^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{M}_C^{-1} \\ k_{P,8} &= -tk\pi R^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & R^2 \end{bmatrix} \mathbf{M}_C^{-1} \end{aligned} \quad (4.44)$$

La stima dell'ordine di convergenza, ossia del decrescere dell'errore al diminuire di una misura significativa della distanza dei punti, è stata effettuata con riferimento ad una griglia regolare di punti, situazione in cui il passo di griglia dà una misura esatta della dimensione associata alla distribuzione di punti. La tabella (4.4) riporta i valori ottenuti per il parametro δ con passi della griglia man mano ridotti:

passo di griglia	errore medio δ		
	4 satelliti	5 satelliti	8 satelliti
0.5	0.00376808	0.00376808	0.00384507
0.2500	0.00078737	0.00078737	0.00062571
0.1250	0.00017645	0.00017645	0.00013119
0.0625	0.00004159	0.00004159	0.00003041

Tabella 4.4. Valore dell'errore medio δ per i punti interni al dominio al variare del passo della regolare di punti, con differenti composizioni della costellazione locale.

Questi stessi valori, riportati in scala logaritmica nel grafico di figura (4.17), evidenziano come l'ordine di convergenza, per le varie interpolazioni sia pari a 2;

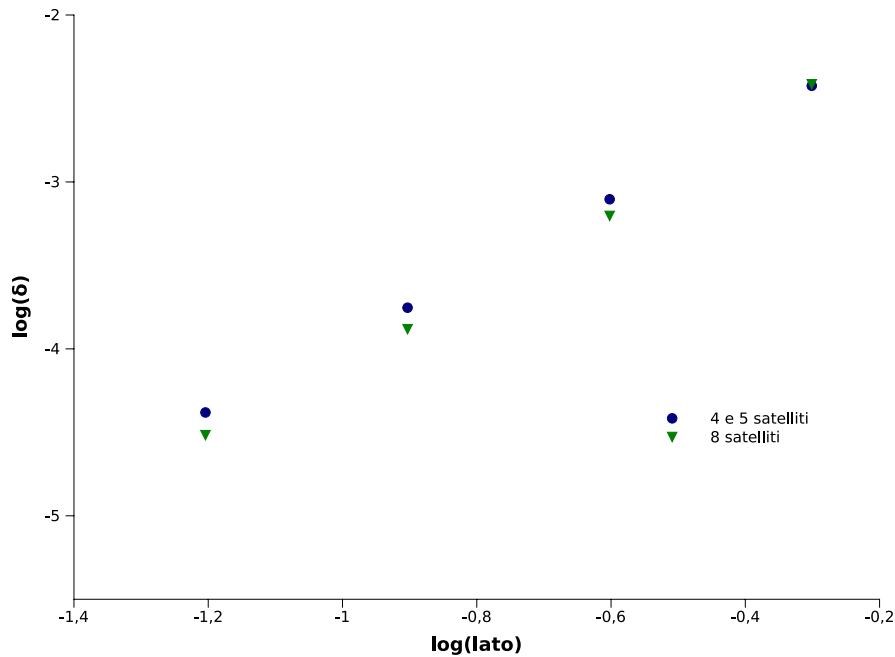


Figura 4.17. Errore medio rispetto al passo di griglia per le implementazioni con 4,5 e 8 nodi satellite

relativamente alla griglia regolare di punti, va rilevata la sostanziale equivalenza delle soluzioni ottenute utilizzando 4 e 5 satelliti, per le quali si ottengono gli stessi valori di scarto quadratico medio; l'uso di una costellazione composta di 8 satelliti registra invece, a parità di ordine di convergenza ottenuto, un aumento di precisione.

4.3.2 Sistemi piani deformabili

Nei paragrafi seguenti verrà illustrata l'estensione all'ambito dello studio dei corpi deformabili in regime di piccoli spostamenti dell'approccio meshless ad interpolazione locale polinomiale descritto in precedenza.

Si consideri dunque un sistema elastico piano di geometria nota; sia il materiale omogeneo e isotropo e caratterizzato da comportamento elastico lineare con modulo di elasticità E e modulo di contrazione trasversale ν . Il corpo sia assoggettato a un sistema di forze e di vincoli, noti, tali da generare uno stato piano di sollecitazione (di sforzo oppure di deformazione). Posizionati all'interno della geometria del corpo un certo numero di punti ("nodi") riferiti ad un riferimento cartesiano globale, lo scopo è determinare le componenti del vettore spostamento in ciascuno punto.

La chiave del metodo è la scrittura del bilancio delle forze ad ogni nodo: definita una regione tributaria Ω_i associata ad ogni nodo i , si impone l'equivalenza tra le forze di volume B_{Ω_i} agenti su tale regione e le forze di superficie $T_{\partial\Omega_i}$ agenti sul suo contorno $\partial\Omega_i$:

$$\vec{B}_{\Omega_i} + \sum \vec{T}_{\partial\Omega_i} = 0 \quad (4.45)$$

L'equazione, vettoriale, contempla le componenti delle varie forze riferite al sistema di riferimento cartesiano globale.

Considerato un generico nodo P_p interno al dominio si individui, tra in nodi prossimi, una costellazione di nodi satellite S_i ; per semplicità di illustrazione si assumerà nel seguito che la costellazione sia composta da 5 satelliti; si adotti inoltre un sistema di riferimento cartesiano locale con origine nel nodo polo e assi paralleli al sistema di riferimento globale

4.3.2.1 Interpolazione locale

Nell'intorno del nodo polo il campo degli spostamenti viene approssimato con

$$\begin{cases} u(x,y) = a_1 + a_3x + a_5y + a_7x^2 + a_9xy + a_{11}y^2 \\ v(x,y) = a_2 + a_4x + a_8x^2 + a_6y + a_{10}xy + a_{12}y^2 \end{cases} \quad (4.46)$$

4.3.2.2 Deformazioni

Le componenti del tensore delle deformazioni vengono ricavate tramite le opportune derivate delle componenti dello spostamento:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{x,y} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} a_9 y + 2 a_7 x + a_3 \\ 2 a_1 y + a_{10} x + a_6 \\ \frac{2 a_{11} y + a_{10} y + a_9 x + 2 a_8 x + a_5 + a_4}{2} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.47)$$

4.3.2.3 Sforzi

Per un materiale isotropo a comportamento elastico lineare il legame tra sforzi e deformazioni è descritto dalla relazione lineare:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{x,y} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{x,y} \end{Bmatrix} \quad (4.48)$$

da cui, tramite le (4.47)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{x,y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{E (a_9 \sin \theta R + 2 a_7 \cos \theta R + a_3)}{1-\nu^2} + \frac{\nu E (2 a_{12} \sin \theta R + a_{10} \cos \theta R + a_6)}{1-\nu^2} \\ \frac{\nu E (a_9 \sin \theta R + 2 a_7 \cos \theta R + a_3)}{1-\nu^2} + \frac{E (2 a_{12} \sin \theta R + a_{10} \cos \theta R + a_6)}{1-\nu^2} \\ \frac{(1-\nu) E (2 a_{11} \sin \theta R + a_{10} \sin \theta R + a_9 \cos \theta R + 2 a_8 \cos \theta R + a_5 + a_4)}{4 (1-\nu^2)} \end{Bmatrix} \quad (4.49)$$

4.3.2.4 Bilancio delle forze al nodo

Come fatto in precedenza si assume come regione tributaria del nodo polo una circonferenza di centro il polo stesso e di raggio R ; il valore di R è di principio arbitrario, e viene qui assunto pari alla metà del valore medio della distanza di nodi satellite dal polo [66]. Va qui ricordato che in presenza di forze di volume, le regioni tributarie devono coprire, nel loro insieme, l'intero dominio studiato; in caso contrario, laddove restino dei "buchi", parte dei carichi, non venendo raccolta da alcuna regione tributaria e non venendo quindi computata in alcun bilancio, resterebbe trascurata.

Per un nodo interno la regione tributaria si estenderà appieno attorno al nodo; se il nodo giace invece sul contorno del solido in esame, la regione tributaria sarà la sola parte del cerchio contenuta nel solido.

Per esprimere le componenti delle forze di superficie e agenti sul contorno della regione tributaria risulta conveniente adottare un riferimento in coordinate polari centrate nel nodo polo e con asse principale parallelo e concorde con l'asse delle ascisse del riferimento globale. Si ha, evidentemente:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad (4.50)$$

In questo riferimento polare locale le componenti del tensore degli sforzi divengono:

$$\sigma_x = \frac{E (a_9 \sin \theta R + 2 a_7 \cos \theta R + a_3)}{1 - \nu^2} + \frac{\nu E (2 a_{12} \sin \theta R + a_{10} \cos \theta R + a_6)}{1 - \nu^2} \quad (4.51)$$

$$\sigma_y = \frac{\nu E (a_9 \sin \theta R + 2 a_7 \cos \theta R + a_3)}{1 - \nu^2} + \frac{E (2 a_{12} \sin \theta R + a_{10} \cos \theta R + a_6)}{1 - \nu^2} \quad (4.52)$$

$$\tau = \frac{(1 - \nu) E (2 a_{11} \sin \theta R + a_{10} \sin \theta R + a_9 \cos \theta R + 2 a_8 \cos \theta R + a_5 + a_4)}{4 (1 - \nu^2)} \quad (4.53)$$

La risultante delle forze di superficie agenti sul contorno della regione tributaria si ottiene integrando opportunamente le tensioni:

$$F_x = \int_0^{2\pi} R (\sigma_x \cos \theta + \tau \sin \theta) d\theta \quad (4.54)$$

$$F_y = \int_0^{2\pi} R (\sigma_y \sin \theta + \tau \cos \theta) d\theta \quad (4.55)$$

da cui:

$$F_x = [(2 a_{11} - 3 a_{10}) \nu - 8 a_7 - 2 a_{11} - a_{10}] \frac{E}{4(\nu^2 - 1)} \pi R^2 \quad (4.56)$$

$$F_y = - [(3 a_9 - 2 a_8) \nu + a_9 + 2 a_8 + 8 a_{12}] \frac{E}{4(\nu^2 - 1)} \pi R^2 \quad (4.57)$$

Nodo di bordo: la regione tributaria del nodo polo deve essere interna al dominio studiato. Per questa ragione, quando il nodo polo giaccia sul bordo, la sua regione tributaria non lo circonda completamente, ma solamente per quella parte che risulta interna al dominio.(figura 4.14).

4.3.2.5 Test sulla trave di Timoshenko

L'indagine sulla precisione dell'implementazione è stata condotta relativamente al problema della trave di Timoshenko, per il quale si dispone di una soluzione analitica di confronto.

Due differenti test sono stati condotti relativamente allo stesso problema utilizzando una costellazione locale composta da 4 e da 8 satelliti (ossia una costellazione composta da 5 o da 9 nodi).

Geometria, proprietà materiali e carico usati nel test numerico sono riportati in tabella (4.5); per riprodurre con esattezza le condizioni di validità della soluzione teorica, su tutti i punti del contorno sono stati imposti i valori di spostamento previsti dalle equazioni (4.13) nella posizione corrispondente. Come metrica di precisione è stato considerato il valore quadratico medio del modulo della differenza (vettoriale) tra spostamento numerico e spostamento teorico in ciascuno dei punti non vincolati:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{N_i} [(u_{i,num} - u_{i,t})^2 + (v_{i,num} - v_{i,t})^2]}{N_i}} \quad (4.58)$$

avendo indicato con

- N_i il numero dei nodi interni (dunque non vincolati, e per cui ha senso il confronto con la soluzione teorica);
- con u e con v le componenti del vettore spostamento secondo la direzione x e y , rispettivamente, del sistema di riferimento globale;
- con il pedice $_{num}$ un valore di soluzione numerica;
- con il pedice $_t$ un valore di soluzione teorica;

Il calcolo è stato condotto distribuendo dei punti all'interno del dominio secondo una griglia regolare equispaziata; i valori di δ al variare del passo di griglia sono riportati in tabella (4.6) e, in scala logaritmica, in figura (4.18).

parametro	valore	unità di misura	passo di griglia	errore medio δ	
				4 satelliti	8 satelliti
L	8	m	1	5.88E-004	
D	2	m	- 0.5	5.3751E-004	4.78E-004
E	1e3	GPa	0.25	4.865E-004	4.34E-004
ν	0.25	-	0.125	4.7666E-004	4.24E-004
P	2	N			

Tabella 4.5. Parametri descrittivi il problema della trave di Timoshenko usato per il confronto numerico

Tabella 4.6. Valore dell'errore medio δ per i punti interni al dominio al variare del passo della griglia di punti

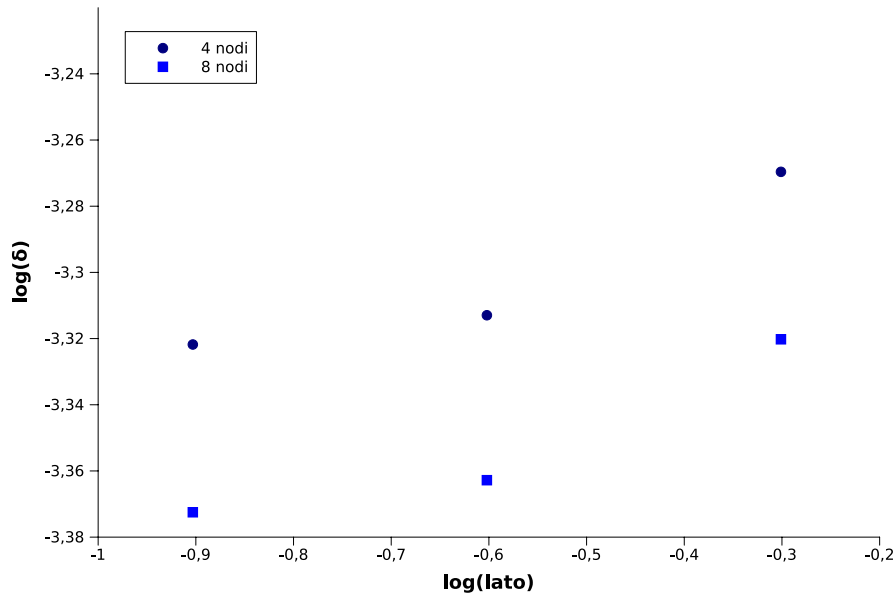


Figura 4.18. Test della trave di Timoshenko: errore medio rispetto al passo di griglia in scala logaritmica con approccio CM meshless a interpolazione polinomiale.

A scopo esemplificativo della generalità dell'approccio, si riportano in figura (4.19) e (4.20) le immagini raffiguranti il campo di spostamenti ottenuto con una distribuzione casuale di punti; la distribuzione dei punti è stata ottenuta con variazioni di posizionamento casuali compatibili con la geometria applicate ad una griglia equispaziata di partenza. Va osservato che, variando la distanza media locale dei punti nelle costellazioni man mano create, una condizione del genere non si presta a confronti numerici sistematici, mancando un parametro di qualificazione attendibile della densità dei punti¹⁸.

4.4 Interpolazione locale con funzioni di base radiale

Nel paragrafo precedente è stata presentato un approccio meshless che, muovendo da alcune considerazioni attorno all'equazione di bilancio sulle regioni tributarie associate ad ogni nodo, costruisce un sistema algebrico risolvibile senza richiedere la costruzione di una mesh, nemmeno a livello locale: fissata l'attenzione su un nodo, si individua un opportuno gruppo di nodi circostanti; con questo

¹⁸manca qui una dimensione rappresentativa della "dimensione di cella" e la distanza media dei satelliti dal polo è risultato essere un parametro con fluttuazioni eccessive per risultare attendibile, in misura tanto più marcata all'aumentare della distorsione della distribuzione dei punti

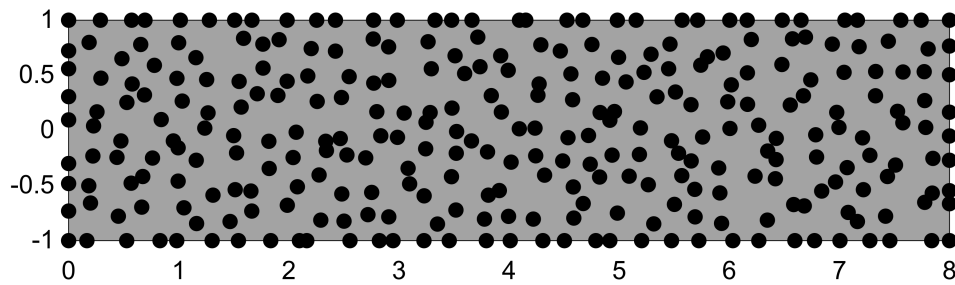


Figura 4.19. Test della trave di Timoshenko: distribuzione casuale di punti generata dalla griglia regolare equispaziata

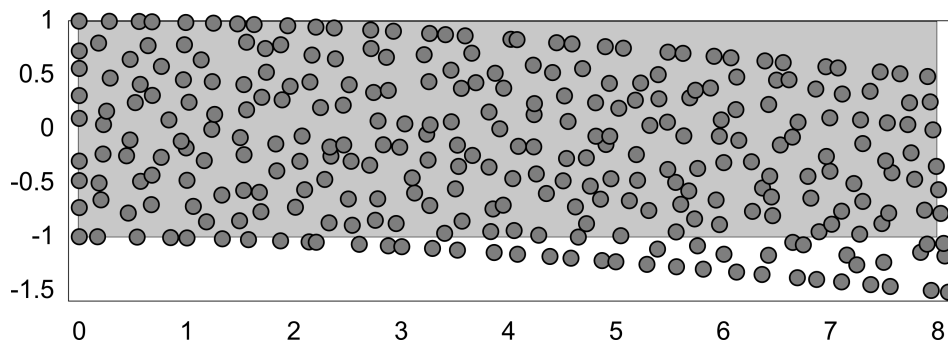


Figura 4.20. Test della trave di Timoshenko: campo di spostamenti ottenuto su una distribuzione casuale dall'approccio meshless CM ad interpolazione polinomiale

insieme di punti si definisce una interpolazione polinomiale dei valori nodali della variabile di configurazione del campo studiato; la regione tributaria del nodo in esame viene definita attorno a ciascun nodo, e, per semplicità di espressione formale dell'equazione di bilancio, viene assunta con una forma geometrica regolare e semplice; le grandezze coinvolte nell'equazione di bilancio sono ricavate tramite le leggi costitutive e le equazioni di struttura a partire da una funzione che interpola i valori nodali della variabili di configurazione.

Il vantaggio di questo approccio è indubbiamente quello di non richiedere alcuna definizione, nemmeno a livello locale, di connettività tra i punti: non occorre ordinare i nodi per costruire un set di celle che condividano tutte il nodo in esame, né è necessario alcun controllo circa la qualità delle celle locali così create

per escludere eventuali celle distorte. Un ultimo vantaggio rispetto alla formulazione meshless basata sulla creazione di una mesh locale, ha a che fare con la copertura del dominio ottenuta con l'insieme delle regioni tributarie locali: in presenza di sorgenti distribuite (sorgenti di calore distribuite, forze di volume, ...) è infatti necessario che l'insieme delle regioni tributarie definite localmente copra l'intero dominio, in modo che nessuna sua porzione (e dunque nessun termine sorgente) venga tralasciata. Questo aspetto non è banale quando le regioni tributarie di nodo siano definite dagli elementi locali di un complesso primale locale. L'interpolazione polinomiale locale, invece, usa una regione tributaria svincolata dalla disposizione della costellazione di punti individuata; in particolare essendo completamente libera l'estensione della regione tributaria, la copertura dell'intero dominio è "controllabile".

A fronte di questi vantaggi, l'interpolazione locale dei valori nodali con una funzione polinomiale ha però due fondamentali inconvenienti:

- il numero di nodi che compongono la costellazione è fisso, dipendendo dal polinomio adottato, e non può venire variato che per intervalli fissati; si perde in questo modo la possibilità di migliorare l'approssimazione arricchendo la costellazione dei nodi in dipendenza di fattori locali;
- la disposizione geometrica dei punti scelti non è sempre compatibile con una accettabile accuratezza della interpolazione: la matrice di interpolazione (o di collocazione) può risultare singolare per particolari disposizioni dei nodi della costellazione, rendendo laboriosa la scelta dei punti "adatti".

Rispetto a queste limitazioni una possibile soluzione proviene dalla adozione delle Funzioni di Base Radiale (RBF) per l'interpolazione locale delle variabili di configurazione.

Le RBF, introdotte per risolvere problemi di interpolazione multidimensionali, costruiscono la funzione approssimante come combinazione lineare di un certo numero di funzioni che hanno come argomento reale positivo.

Si immagini che della funzione (incognita):

$$f : R^n \longrightarrow R \quad (4.59)$$

siano noti solo N valori in altrettanti punti del suo dominio

$$f(x_i) = d_i \quad x_i \in R^n, i = 1, \dots, N \quad (4.60)$$

Si desidera individuare una funzione y definita in R^n a valori reali che approssimi la funzione incognita f , assumendo i valori noti nei punti dati:

$$y : R^n \longrightarrow R : y(x_i) = d_p \quad i = 1, \dots, N \quad (4.61)$$

L'idea delle RBF è quella di costruire la funzione approssimante y come somma di N valori assunti da una funzione reale di argomento la norma $\|x - x_i\|$:

$$y(x) = \sum_{i=1}^P w_i \phi(\|x - x_i\|) \quad (4.62)$$

dove

- $w_i \in R$ sono detti *pesi*;
- x_i , punti in cui sono noti gli N valori d_i , sono detti *centri*;
- $\phi(r)$ è una funzione a valori reali definita in R^+ ;

Circa la funzione $\phi(r)$ va precisato che le funzioni solitamente utilizzate sono:

- la funzione *spline*

$$\phi(r) = r^n \quad \text{con } n \text{ dispari}$$

- la funzione *thin plate spline*

$$\phi(r) = r^n \log r \quad \text{con } n \text{ pari}$$

- la funzione *gaussiana*

$$\phi(r) = e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad \sigma > 0;$$

- la funzione *multiquadratica inversa*

$$\phi(r) = \left(\frac{1}{r^2 + \sigma^2} \right)^{1/2} \quad \sigma > 0;$$

- la funzione *multiquadratica*

$$\phi(r) = (r^2 + \sigma^2)^{1/2} \quad \sigma > 0;$$

La funzione gaussiana e la funzione multiquadratica sono dette “funzioni localizzate” per esprimere il fatto che tendono a zero al tendere dell'argomento a infinito; il comportamento contrario ($\phi(r) \rightarrow 0$ per $r \rightarrow \infty$) della funzione multiquadratica viene descritto con l'appellativo “non locale”.

Assunta una funzione ϕ , per determinare i valori degli N coefficienti w_i si utilizza la condizione di interpolazione:

$$y(x_i) = d_p \quad i = \dots, N \quad (4.63)$$

ottenendo il sistema lineare:

$$\begin{bmatrix} \phi(r_{1,1}) & \phi(r_{1,2}) & \phi(r_{1,3}) & \dots & \phi(r_{1,n}) \\ \phi(r_{2,1}) & \phi(r_{2,2}) & \phi(r_{2,3}) & \dots & \phi(r_{2,n}) \\ \phi(r_{3,1}) & \phi(r_{3,2}) & \phi(r_{3,3}) & \dots & \phi(r_{3,n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi(r_{n,1}) & \phi(r_{n,2}) & \phi(r_{n,3}) & \dots & \phi(r_{n,n}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \dots \\ w_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \dots \\ d_n \end{Bmatrix} \quad (4.64)$$

avendo inteso indicare $r_{i,j} = \|x_j - x_i\|$; con evidente significato della notazione il sistema può scriversi in forma sintetica come:

$$\Phi \mathbf{w} = \mathbf{d} \quad (4.65)$$

La matrice Φ è una matrice quadrata di dimensione $N \times N$ ed è detta *matrice di interpolazione*. Si può dimostrare¹⁹ che esiste una classe C di funzioni di base radiale (che include la funzione gaussiana e le funzioni multiquadratiche) per cui se i punti di interpolazione $x_1, x_2, \dots, x_p \in R^M$ sono distinti, la matrice di interpolazione Φ è non singolare.

Inoltre per la funzione gaussiana²⁰ e per la funzione multiquadratica inversa, la matrice di interpolazione risulta anche essere definita positiva.

Dal punto di vista dell'applicazione qui trattata i principali vantaggi dell'adozione delle RBF per interpolare localmente i valori delle variabili di configurazione ai nodi della costellazione sono:

- stabilità del problema di interpolazione rispetto alla disposizione spaziale dei punti della costellazione per un'opportuna scelta delle funzioni di base radiale ϕ ;
- indipendenza dal numero di nodi che compone la costellazione locale (la funzione interpolante è somma delle singole funzioni di base radiale centrate nei vari punti della costellazione: questa natura additiva della interpolazione rende assolutamente libero e variabile di volta in volta il numero dei nodi scelti per comporre la costellazione locale);
- indipendenza dalle dimensioni del problema.

¹⁹cfr. [67]

²⁰cfr. [68]

L'idea di usare le RBF per l'interpolazione locale viene da quanto proposto in letteratura per metodologie meshless differenziali ([69],[70],[71]); molta letteratura sull'argomento, oltre che in ambito speculativo circa le loro proprietà matematiche ([72],[73]), viene da ambiti applicativi quale la manipolazione di immagini [74] e lo sviluppo di reti neurali [75] dove alcuni aspetti funzionali vengono affrontati con la concettualizzazione di problema di curve fitting.

Nei paragrafi seguenti verranno illustrate le applicazioni dell'interpolazione con RBF all'implementazione meshless del metodo delle celle: nella sostanza la procedura è del tutto identica a quella presentata per l'interpolazione polinomiale, con le uniche differenze, di carattere puramente implementativo, legate alla diversa costituzione della funzione interpolante

4.4.1 Interpolazione RBF di campi scalari

In questo paragrafo verrà presentata l'applicazione della interpolazione con le Funzioni di Base Radiale (RBF) nell'approccio meshless del Metodo delle Celle applicato ai problemi di conduzione termica in regime stazionario. La procedura è, come precisato in precedenza, assolutamente simile a quella seguita a proposito dell'interpolazione polinomiale.

Assunto un dominio di geometria e proprietà (conduttività termica k) note, si provveda a posizionarvi all'interno un conveniente numero di punti, di seguito denominati "nodi". La posizione di questi punti verrà riferita ad un sistema di riferimento cartesiano esterno XOY .

Preso in esame un nodo interno generico (chiamato convenzionalmente "nodo polo"), si selezionino N_C nodi prossimi disposti attorno al nodo polo: questi nodi selezionati prenderanno il nome di "nodi satellite" e, assieme al nodo polo, costituiranno la costellazione locale $\mathcal{C}$ di punti con cui verrà approssimato localmente il campo delle temperature attorno al nodo polo.

4.4.1.1 Interpolazione

Nella regione circostante il nodo polo, il campo delle temperature viene approssimato interpolando i valori nodali di temperatura della costellazione $\mathcal{C}$ con la funzione:

$$T(P)_C = \sum_{i=1}^{N_C} w_{i,C} \phi(\|P - P_i\|) \quad (4.66)$$

Per comodità implementativa verrà adottato un sistema di riferimento locale ottenuto traslando il sistema globale in modo tale da posizionarne l'origine nel

nodo polo. Come funzione di base radiale $\phi(r)$ si adottò, a scopo puramente esemplificativo, la funzione:

$$\phi(r) = (1 - r^2)^2; \quad (4.67)$$

essendo r la distanza euclidea rispetto al nodo polo.

Le condizioni di interpolazione permetteranno di esprimere i pesi w_i in termini di temperature nodali t_i avendosi (cfr. equazione (4.64)) il sistema di equazioni lineari:

$$\Phi_C \mathbf{w}_C = \mathbf{T}_C \quad (4.68)$$

da cui:

$$\mathbf{w}_C = \Phi_C^{-1} \mathbf{T}_C \quad (4.69)$$

La funzione approssimante è “appoggiata” ai valori nodali (incogniti) delle temperatura e i coefficienti $\mathbf{w}_C$ dell’interpolazione sono espressi, a meno della matrice Φ_C che contiene le informazioni sulla disposizione geometrica dei punti della costellazione, in termini del vettore delle temperature nodali $\mathbf{T}_C$.

La procedura, come per il caso dell’interpolazione polinomiale, esprimerà il vettore gradiente, derivando la funzione $T(P)$ ed esprimerà il vettore flusso di calore unitario tramite la legge costitutiva del materiale; infine, definita una regione tributaria attorno al nodo polo, il flusso di calore uscente attraverso la sua superficie di contorno sarà calcolato con un integrale di superficie della funzione che esprime il vettore flusso unitario.

Questo processo calcola un valore scalare (il flusso netto di calore uscente dalla superficie $\partial\Omega_P$ di confine della regione tributaria Ω_P del nodo polo P) elaborando la funzione che esprime il campo locale delle temperature attorno al polo; poiché gli operatori matematici che intervengono in questo processo (derivazione, integrazione, e operazioni algebriche) sono lineari, ne consegue che l’intero processo che calcola il flusso netto attraverso $\partial\Omega_P$ dalla funzione $T(x,y)$ è anch’esso lineare. Se dunque la funzione $T(x,y)$ viene espressa come somma di funzioni componenti T_i , il flusso totale Q può venire calcolato sommando i valori Q_i ottenuti applicando il processo ad ogni singola funzione addenda T_i .

Alla luce di questa considerazione tratteremo di seguito una sola delle funzioni che compongono la funzione approssimante, corrispondente alla funzione

$$T_i(x,y) = w_{i,C} (1 - r^2)^2 = w_{i,C} [1 - (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^2 \quad (4.70)$$

centrata nel nodo generico i della costellazione C

Le componenti del vettore gradiente della temperatura²¹ $\mathbf{g}_C$ in un punto $P(x,y)$ sono esprimibili in forma analitica derivando la funzione di interpolazione locale

²¹il pedice C si rende necessario riferendosi all’interpolazione locale della costellazione C

$T_i(x, y)$:

$$\begin{aligned} g_x &= \frac{\partial T_i(x, y)}{\partial x} = -4 [1 - (y - y_i)^2 - (x - x_i)^2] (x - x_i) w_{i,c} \\ g_y &= \frac{\partial T_i(x, y)}{\partial y} = -4 [1 - (y - y_i)^2 - (x - x_i)^2] (y - y_i) w_{i,c} \end{aligned} \quad (4.71)$$

Il flusso unitario di calore $\mathbf{q}$ è correlato con il vettore gradiente delle temperature a meno della conducibilità termica k del mezzo²²:

$$\mathbf{q}_c = -k \mathbf{g}_c. \quad (4.72)$$

Nell'intorno del polo P_p il calore che attraversa una superficie orientata S di versore normale $\mathbf{n}$ è dunque esprimibile come:

$$Q_S = \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_c \, dS = \int_S (q_x n_x + q_y n_y) \, dS \quad (4.73)$$

Definita una regione tributaria Ω_P attorno al nodo polo delimitata dalla superficie chiusa $\partial\Omega_P$, il bilancio di nodo impone l'equivalenza tra il flusso netto di calore uscente attraverso la superficie $Q_{\partial\Omega_P}$ e il calore generato Q_{Ω_P} all'interno del volume da essa racchiuso:

$$Q_{\Omega_P} = Q_{\partial\Omega_P} \quad (4.74)$$

essendo:

$$Q_{\partial\Omega_P} = -k \int_{\partial\Omega_P} (g_x n_x + g_y n_y) \, dS = Q_{\Omega_P}. \quad (4.75)$$

4.4.1.2 Bilancio al nodo polo

Attorno al nodo polo consideriamo come regione tributaria un quadrato di lato $2d$ con baricentro corrispondente al polo stesso; il valore di $2d$ è arbitrario, e viene qui assunto pari alla metà della distanza media dei nodi satellite dal nodo polo. Non appare superfluo ricordare che in presenza di sorgenti distribuite occorre che l'insieme delle regioni tributarie costruite attorno ai vari punti, di volta in volta considerati come "poli" di una costellazione locale, copra l'intero dominio. Il calcolo dei flussi di calore attraverso ogni lato della regione tributaria risulta così semplificato. Con riferimento alla figura (4.21) si ha infatti, essendo t lo spessore del sistema piano, che per il lato AB il vettore area corrispondente risulta

²²si suppone qui per semplicità che il mezzo abbia comportamento isotropo

essere $S_1 = \{2td, 0\}$ da cui:

$$\begin{aligned} Q_{i,1} &= -kt \int_{-d}^d g_x(d, y) dy \\ &= \frac{(24 d x_i - 24 d^2) y_i^2 + 24 d x_i^3 - 72 d^2 x_i^2 + (80 d^3 - 24 d) x_i - 32 d^4 + 24 d^2}{3} \end{aligned} \quad (4.76)$$

calcolando i termini:

$$\begin{aligned} Q_{i,2} &= -kt \int_{-d}^d g_y(x, d) dx \\ Q_{i,3} &= kt \int_{-d}^d g_x(-d, y) dy \\ Q_{i,4} &= kt \int_{-d}^d g_y(x, -d) dx \end{aligned} \quad (4.77)$$

conformemente all'orientazione delle singole superfici. Sommando i contributi di flusso calcolati per tutte e quattro le superfici si ottiene:

$$\begin{aligned} Q_{i,\partial\Omega_P} &= Q_{i,1} + Q_{i,2} + Q_{i,3} + Q_{i,4} \\ &= -kt \left[\frac{32d^2 (6y_i^2 + 6x_i^2 + 4d^2 - 3)}{3} \right] w_i \\ &= a_{i,P} w_i \end{aligned} \quad (4.78)$$

Il termine appena calcolato esprime il contributo della funzione radiale di centro i al flusso di calore $Q_{\partial\Omega_P}$ attraverso la superficie di contorno della regione tributaria Ω_P del nodo P assunto come polo. Considerando i contributi delle funzioni radiali di centro tutti i nodi della costellazione $\mathcal{C}$, si ha pertanto:

$$Q_{\partial\Omega_P} = [a_{1,P} \ a_{2,P} \ \dots \ a_{N,P}] \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_N \end{Bmatrix} = \mathbf{a}_P \mathbf{w}_C \quad (4.79)$$

e dunque, ricordando la (4.69):

$$Q_{\partial\Omega_P} = \mathbf{a}_P \Phi_C^{-1} \mathbf{T}_C \quad (4.80)$$

che esprime il flusso netto attraverso la superficie di contorno della regione tributaria del nodo polo in funzione delle temperature dei nodi che compongono la costellazione. Il vettore

$$\mathbf{k}_P = \mathbf{a}_P \Phi_C^{-1} \quad (4.81)$$

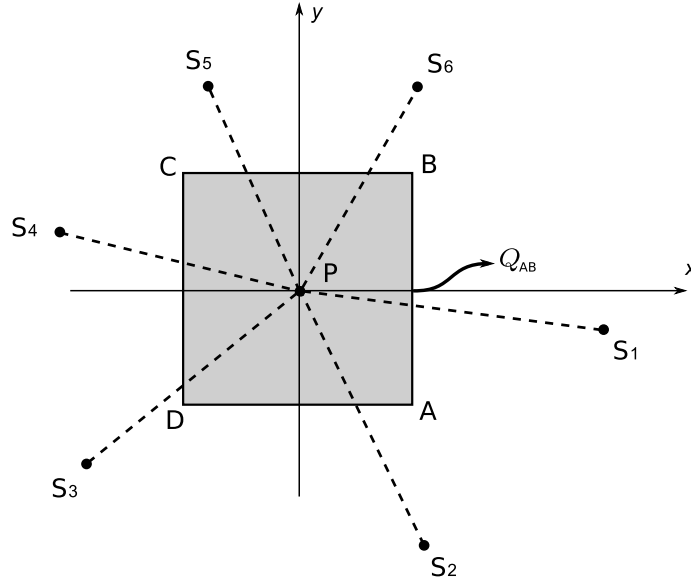


Figura 4.21. Regione tributaria quadrata attorno al generico nodo interno P

contiene i valori da collocare nella matrice fondamentale K del sistema che esprime la soluzione del problema

$$\mathbf{K} \mathbf{T} = \mathbf{Q} \quad (4.82)$$

alla riga corrispondente all'identificativo del nodo polo nella numerazione globale. Le colonne in cui gli elementi di $\mathbf{k}_P$ vanno collocati corrispondono alle colonne di indice pari al numero identificativo di ogni singolo nodo della costellazione, nella numerazione globale.

4.4.1.3 Alcuni test numerici

Al fine di verificarne l'accuratezza, l'approccio descritto è stato applicato alla soluzione della equazione di Laplace $\nabla^2(w) = 0$ su un dominio piano quadrato di lato unitario centrato nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano con assi paralleli ai lati; nel dominio sono stati posizionati dei punti secondo una griglia regolare, facendo in modo di avere un punto in ogni vertice e un certo numero di punti posizionati lungo ciascun lato.

Sui punti del contorno sono stati imposti i valori assunti dalla funzione armonica:

$$w_t(x,y) = e^x \cos y \quad (4.83)$$

soluzione del problema.

Come parametro di valutazione della precisione della soluzione numerica, viene utilizzato il valore

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_i} (w_{t,i} - w_i)^2}{N_i}} \quad (4.84)$$

essendo N_i il numero di nodi interni (quelli su cui non sono stati imposti i valori della funzione soluzione del problema), $w_{t,i}$ il valore assunto dalla soluzione teorica nel punto i e w_i il valore ottenuto dalla soluzione numerica nello stesso punto.

Il problema così posto è stato risolto con la procedura meshless con interpolazione RBF sopra descritta, implementata con riferimento a quattro diverse funzioni di base radiale $\phi(r)$:

$$\begin{aligned} \phi_A &= (1 - r^2)^2 \\ \phi_B &= (1 - r^4) \\ \phi_C &= e^{-r^2/4} \\ \phi_D &= \sqrt{2 + r^2} \end{aligned} \quad (4.85)$$

no satelliti	$\delta(\phi_A)$	$\delta(\phi_B)$	$\delta(\phi_C)$	$\delta(\phi_D)$
3	1.456290	0.913340	0.075073	0.011741
4	0.329283	0.001377	0.000062	0.000048
5	0.299443	0.002011	0.000075	0.000025
6	0.161390	0.001490	0.000068	0.000022
7	0.079458	0.000898	0.000065	0.000022
8	0.000139	0.000142	0.000050	0.000031

Tabella 4.7. Interpolazione con RBF: scarto quadratico medio δ per il passo griglia pari a $1/4$ per le varie funzioni di base radiale in dipendenza del numero dei satelliti della costellazione

Un test preliminare ha riguardato la sensibilità della soluzione rispetto al numero di nodi utilizzati nella costellazione. Assunta una distribuzione di punti regolare con passo di riferimento pari a $1/4$ del lato, si è valutato il parametro di precisione δ al variare del numero di nodi della costellazione tra 4 e 9 per ciascuna delle funzioni ϕ adottate. I risultati, esposti in tabella (4.7) e rappresentati in figura (4.22), evidenziano come, per le funzioni di base radiale B,C e D ci sia una sostanziale stabilità rispetto alla numerosità della costellazione adottata; per la funzione di base radiale A, al contrario, per ottenere accuratèzze paragonabili a

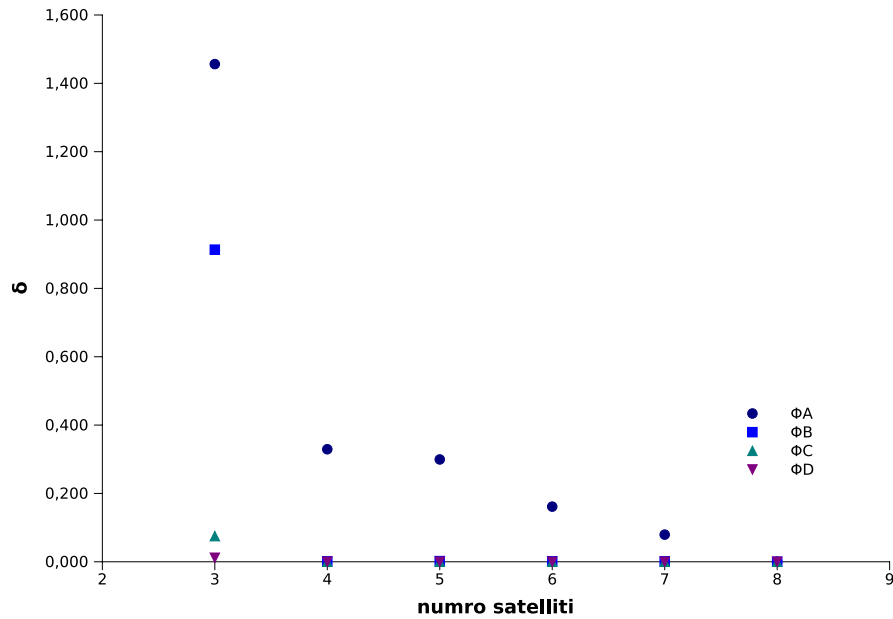


Figura 4.22. Interplazione meshless con RBF: errore quadratico medio al variare del numero dei satelliti con le varie funzioni di base radiale e passo di griglia pari a $1/8$

quelle proprie delle altre tre funzioni e stabili rispetto all'aggiunta di un ulteriore nodo nella costellazione, il numero dei satelliti deve essere di almeno 8.

I dati di tabella (4.8), riportati nel grafico di figura (4.23), riportano invece il valore di δ al variare del passo p della griglia di punti nelle loro disposizione regolare di origine.

lato	$\delta(\phi_A)$	$\delta(\phi_B)$	$\delta(\phi_C)$	$\delta(\phi_D)$
0.5	0.009267	0.006156	0.004561	0.004013
0.25	0.002386	0.001551	0.000815	0.000603
0.125	0.000583	0.000400	0.000175	0.000118
0.0625	0.000143	0.000096	0.000034	0.000022
0.03125	0.000035	0.000024	0.000010	0.000001

Tabella 4.8. Meshless con interpolazione RBF: scarto quadratico medio δ al variare del passo griglia per le varie funzioni di base radiale con costellazione composta da 8 satelliti

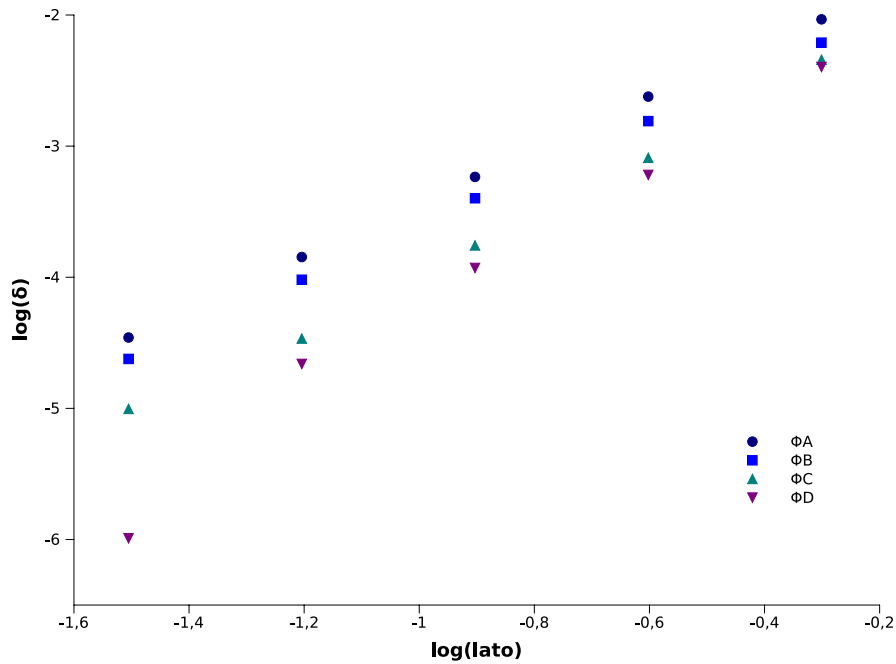


Figura 4.23. Meshless con interpolazione RBF: scarto quadratico medio al variare del lato, in scala logaritmica, per le quattro funzioni di base radiale

4.4.2 Interpolazione RBF di campi vettoriali

In questo paragrafo verrà presentata l'applicazione della interpolazione con le Funzioni di Base Radiale (RBF) nell'approccio meshless del Metodo delle Celle applicato allo studio della deformazione di sistemi elastici piani in regime di piccoli spostamenti. La procedura è assolutamente simile a quella seguita utilizzando l'interpolazione polinomiale.

Assunto un dominio di geometria e proprietà (modulo di elasticità E e coefficiente di Poisson ν) note, si provveda a posizionarvi all'interno un conveniente numero di punti, di seguito denominati "nodi". La posizione di questi punti verrà riferita ad un sistema di riferimento cartesiano esterno XOY .

Preso in esame un nodo interno generico (chiamato convenzionalmente "nodo polo"), si selezionino N_c di nodi prossimi disposti attorno al nodo: questi nodi selezionati prenderanno il nome di "nodi satellite", e, assieme al nodo polo, costituiranno la costellazione locale $\mathcal{C}$ di punti con cui verranno approssimati localmente i campi scalari delle componenti del vettore spostamento attorno al nodo polo.

4.4.2.1 Interpolazione

Le componenti del campo degli spostamenti costituiscono due campi scalari che verranno approssimati con funzioni di base radiale centrate nei nodi della costellazione. Adottando per semplicità di espressione formale, e senza che questo comporti perdita di generalità, un riferimento cartesiano locale $x_P y$ ottenuto traslando l'origine del sistema globale nel nodo polo:

$$\begin{aligned} u_{x,y} &= \sum_{i=1}^{N_C} w_{iu,C} \phi(r_i) \\ v_{x,y} &= \sum_{i=1}^{N_C} w_{iv,C} \phi(r_i) \end{aligned} \quad (4.86)$$

essendo r_i il modulo del vettore posizione del punto $P = (x, y)$ dal nodo P_i della costellazione $\mathcal{C}$:

$$r_i = \|P - P_i\| = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \quad (4.87)$$

Come funzione di base radiale ϕ si adotterà, a scopo di illustrazione, la funzione:

$$\phi(r_i) = (1 - r_i^2)^2 \quad (4.88)$$

I pesi delle due interpolazioni RBF vengono espressi in termini componenti nodali del vettore spostamento (che costituiscono l'incognita del problema) applicando la condizione di interpolazione, e ottenendo i sistemi di equazioni lineari:

$$\Phi_C \mathbf{w}_C = \mathbf{u}_C \quad (4.89)$$

da cui:

$$\mathbf{w}_C = \Phi_C^{-1} \mathbf{u}_C \quad (4.90)$$

dove si sono raccolti le componenti di spostamento nodale e i pesi nei vettori:

$$\mathbf{u}_C = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \\ v_N \end{Bmatrix} \quad \mathbf{w}_C = \begin{Bmatrix} w_{1u} \\ w_{1v} \\ w_{2u} \\ \vdots \\ w_{Nu} \\ w_{Nv} \end{Bmatrix} \quad (4.91)$$

avendosi quindi:

$$\Phi_C = \begin{bmatrix} \phi(r_{1,1}) & 0 & \phi(r_{1,2}) & 0 & \cdots & \phi(r_{1,N}) & 0 \\ 0 & \phi(r_{1,1}) & 0 & \phi(r_{1,2}) & \cdots & 0 & \phi(r_{1,N}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \phi(r_{N,1}) & 0 & \phi(r_{N,2}) & 0 & \cdots & \phi(r_{N,N}) & 0 \\ 0 & \phi(r_{N,1}) & 0 & \phi(r_{N,2}) & \cdots & 0 & \phi(r_{N,N}) \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

Come per il caso dell'interpolazione polinomiale, le componenti dello spostamento verranno opportunamente derivate per esprimere le componenti del tensore delle deformazioni con cui, a mezzo della legge costitutiva del materiale, verranno espresse le componenti del tensore degli sforzi; definita una regione tributaria attorno al nodo polo, le componenti della forza risultante agente sulla sua superficie di contorno sarà calcolata integrando opportunamente il prodotto del tensore σ per il versore normale alla superficie n .

Questo processo calcola due valori scalari (le componenti della forza netta agente sulla superficie $\partial\Omega_P$ di confine della regione tributaria Ω_P del nodo polo P) elaborando le funzioni che esprimono i campi locali delle componenti di spostamento nell'intorno del polo; poiché gli operatori matematici che intervengono in questo processo (derivazione, operazioni algebriche e integrazione) sono lineari, ne consegue che l'intero processo è anch'esso lineare. Se dunque la funzione $u(x,y)$ viene espressa come somma di funzioni componenti u_i , la forza totale $F_{\partial\Omega}$ può venire calcolata sommando i valori $F_{i,\partial\Omega}$ ottenuti applicando il processo ad ogni singola funzione addenda u_i .

Alla luce di questa considerazione tratteremo di seguito una sola delle funzioni che compongono la funzione approssimante:

$$\begin{aligned} u_i(x,y) &= w_{iu,C} (1 - r_i^2)^2 = w_{iu,C} [1 - (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^2 \\ v_i(x,y) &= w_{iv,C} (1 - r_i^2)^2 = w_{iv,C} [1 - (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^2 \end{aligned} \quad (4.93)$$

centrata nei nodi generico i della costellazione C

4.4.2.2 Deformazioni

Le componenti del tensore delle deformazioni vengono ricavate direttamente tramite le opportune derivate delle componenti dello spostamento:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{x,y} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} -4 (x - x_i) (-(y - y_i)^2 - (x - x_i)^2 + 1) w_{iu} \\ -4 (y - y_i) (-(y - y_i)^2 - (x - x_i)^2 + 1) w_{iv} \\ -4 (x - x_i) (-(y - y_i)^2 - (x - x_i)^2 + 1) w_{iu} + \\ -4 (y - y_i) (-(y - y_i)^2 - (x - x_i)^2 + 1) w_{iv} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.94)$$

4.4.2.3 Sforzi

Per un materiale isotropo a comportamento elastico lineare il legame tra sforzi e deformazioni è come noto descritto dalla relazione lineare:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{x,y} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{x,y} \end{Bmatrix} \quad (4.95)$$

da cui, tramite le (4.94)

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -w_{iv} \frac{4\nu(y-y_i)[1-(y-y_i)^2-(x-x_i)^2]E}{1-\nu^2} + \\ &\quad -w_{iu} \frac{4(x-x_i)[1-(y-y_i)^2-(x-x_i)^2]E}{1-\nu^2} \\ \sigma_y &= -w_{iv} \frac{4(y-y_i)[1-(y-y_i)^2-(x-x_i)^2]E}{1-\nu^2} + \\ &\quad -w_{iu} \frac{4\nu(xu-x_i)[1-(yu-y_i)^2-(xu-x_i)^2]E}{1-\nu^2} \\ \tau_{x,y} &= w_{iv} \frac{4(x-x_i)[1-(y-y_i)^2-(x-x_i)^2](1-\nu)E}{2(1-\nu^2)} + \\ &\quad -w_{iu} \frac{4(y-y_i)[1-(y-y_i)^2-(x-x_i)^2](1-\nu)E}{2(1-\nu^2)} \end{aligned} \quad (4.96)$$

4.4.2.4 Bilancio delle forze al nodo

Non appare superfluo ricordare che in presenza di sorgenti distribuite occorre che l'insieme delle regioni tributarie costruite attorno ai vari punti, di volta in volta considerati come "poli" di una costellazione locale, copra l'intero dominio.

Come regione tributaria del nodo polo si assuma un quadrato di lato $2d$ con baricentro corrispondente al polo stesso; la dimensione del lato è, come detto in precedenza, assolutamente arbitraria, e verrà qui assunto convenzionalmente pari al valore della distanza media dei nodi satellite del nodo polo [66]; va ricordato però che in presenza di sorgenti distribuite (forze di volume), affinché nessuna loro porzione venga tralasciata nella scrittura dei bilanci, l'insieme delle regioni tributarie dei vari nodi deve coprire tutto il dominio in esame, pena l'errato computo delle forze agenti.

Per un nodo interno, la regione tributaria si estenderà appieno attorno al nodo; se il nodo giace invece sul contorno del solido in esame, la regione tributaria sarà

la sola parte del cerchio contenuta nel solido.

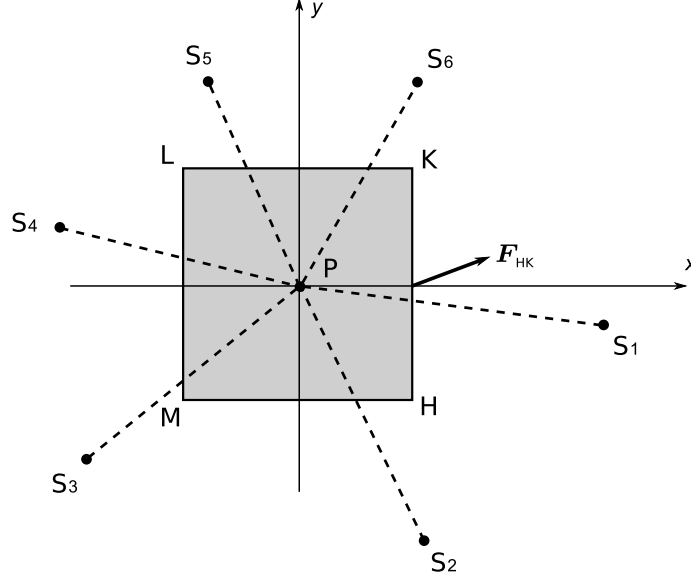


Figura 4.24. Costellazione e regione tributaria per il bilancio delle forze al generico nodo P_P

Il calcolo delle forze di superficie agenti su ogni lato della regione tributaria risulta così semplificato. La forza $\mathbf{F}$ agente su una superficie orientata A è espressa dalla relazione di Cauchy:

$$\mathbf{F} = \int_A \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{n} dA \quad (4.97)$$

essendo $\mathbf{n}$ il versore normale alla superficie e $\boldsymbol{\Sigma}$ il tensore degli sforzi, qui inteso nella notazione matriciale:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}. \quad (4.98)$$

Con riferimento alla figura (4.24) si ha infatti, essendo t lo spessore del sistema piano, che per il lato HK che il vettore area corrispondente risulta essere $\mathbf{S}_1 = \{2td, 0\}$ da cui:

$$\begin{aligned} F_{x,HK} &= t \int_{-d}^d \sigma_x(d,y) dy \\ F_{y,HK} &= t \int_{-d}^d \tau_{xy}(d,y) dy \end{aligned} \quad (4.99)$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned}
 F_{x,HK} &= -\frac{8[3d(x_i - d)y_i^2 + 3d x_i^3 - 9d^2 x_i^2 + (10d^2 - 3)d x_i - 4d^4 + 3d^2] A}{3} w_{iv} \\
 &\quad + 8[(-d x_i^2 + 2d^2 x_i - 2d^3 + d)y_i - d y_i^3] B w_{iv} \\
 F_{x,HK} &= 8d[(1 - x_i^2 + 2d x_i - 2d^2)y_i - y_i^3] C w_{iv} \\
 &\quad - \frac{8[3d(x_i - d)y_i^2 + 3d x_i^3 - 9d^2 x_i^2 + (10d^2 - 3)d x_i - 32d^4 + 3d^2] C}{3} w_{iv}
 \end{aligned} \tag{4.100}$$

avendo indicato con

$$A = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad B = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \quad C = \frac{E(1 - \nu)}{2(1 - \nu^2)}. \tag{4.101}$$

Calcolando i contributi relativi agli altri tre lati del quadrato, sommando opportunamente e considerando il contributo di tutte le funzioni ϕ_i che compongono l'approssimazione locale del campo degli spostamenti, si perviene all'espressione:

$$\begin{aligned}
 F_{x,\partial\Omega_P} &= \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{16d^2[(9y_i^2 + 3x_i^2 + 4d^2 - 3)C + (3y_i^2 + 9x_i^2 + 4d^2 - 3)A]}{3} w_{iu} + \right. \\
 &\quad \left. + 32d^2 x_i y_i (C + B) w_{iv} \right\} \\
 F_{y,\partial\Omega_P} &= \sum_{i=1}^N \left\{ 32d^2 x_i y_i (C + B) w_{iu} + 16 \left(y_i^2 + 3x_i^2 + \frac{4}{3}d^2 - 1 \right) d^2 C + \right. \\
 &\quad \left. + 16 \left(3y_i^2 + x_i^2 + \frac{4}{3}d^2 - 1 \right) d^2 A w_{iv} \right\}
 \end{aligned} \tag{4.102}$$

componenti della forza netta agente sulla superficie di contorno $\partial\Omega_P$ in equilibrio con le forze di volume "raccolte" dalla regione tributaria Ω_P .

Essendo P l'identificativo del polo nella numerazione globale dei nodi i termini delle sommatorie andranno riportati nelle righe $2P - 1$ (per $F_{x,\partial\Omega_P}$) e $2P$ (per $F_{y,\partial\Omega_P}$) alle colonne corrispondenti individuate dagli identificativi dei nodi della costellazione.

4.4.2.5 Test numerici

Al fine di valutarne la precisione numerica, l'approccio proposto è stato applicato alla soluzione di un problema di elasticità piana noto come "trave di Timoshenko".

Geometria, proprietà materiali e carico usati nel test numerico sono riportati in

tabella (4.9); per riprodurre con esattezza le condizioni di validità della soluzione teorica, su tutti i punti del contorno sono stati imposti i valori di spostamento previsti dalle equazioni (4.13) nella posizione corrispondente. Come metrica di precisione è stato considerato il valore quadratico medio del modulo della differenza (vettoriale) tra spostamento numerico e spostamento teorico in ciascuno dei punti non vincolati:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{N_i} [(u_{i,num} - u_{i,t})^2 + (v_{i,num} - v_{i,t})^2]}{N_i}} \quad (4.103)$$

avendo indicato con

- N_i il numero dei nodi interni (dunque non vincolati, e per cui ha senso il confronto con la soluzione teorica);
- con u e con v le componenti del vettore spostamento secondo la direzione x e y , rispettivamente, del sistema di riferimento globale;
- con il pedice $_{num}$ un valore di soluzione numerica;
- con il pedice $_t$ un valore di soluzione teorica;

Il calcolo è stato condotto considerando costellazioni locali composte da 8 nodi, e utilizzando una distribuzione di punti all'interno del dominio secondo una griglia regolare equispaziata; i valori di δ al variare del passo di griglia sono riportati in tabella (4.10) e, in scala logaritmica, in figura (4.25).

parametro	valore	unità di misura
L	8	m
D	2	m
E	1e3	GPa
ν	0.25	-
P	2	N

Tabella 4.9. Parametri descrittivi il problema della trave di Timoshenko usato per il confronto numerico

lato	δ
1	1.97E-006
0.5	4.04E-007
0.25	6.59E-008
0.125	9.06E-009

Tabella 4.10. Valore dell'errore medio δ per i punti interni al dominio al variare del passo della griglia di punti

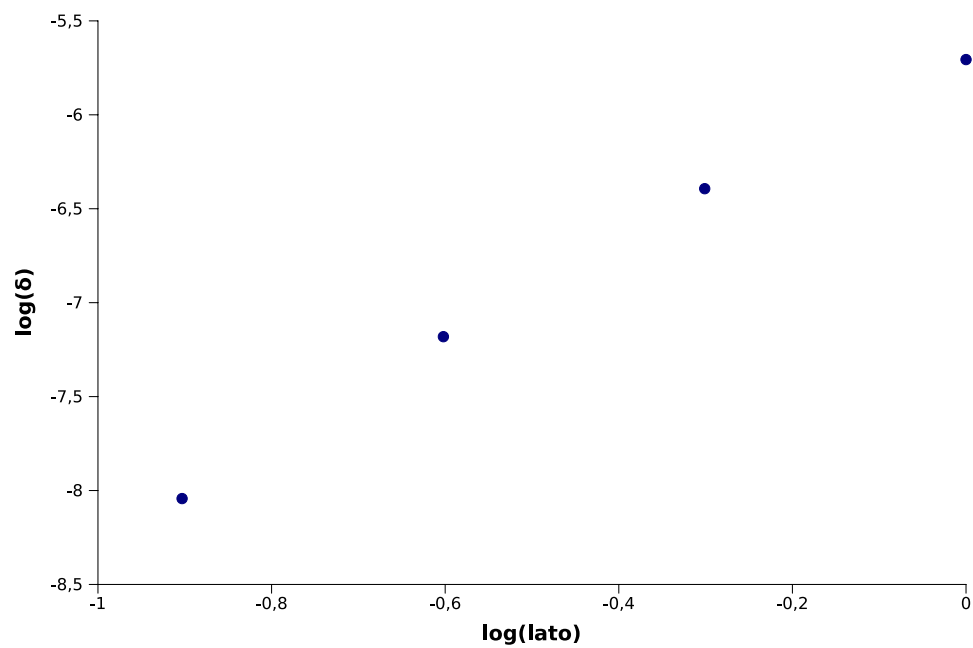


Figura 4.25. Test della trave di Timoshenko: errore medio rispetto al passo di griglia in scala logaritmica con approccio CM meshless interpolazione RBF.

Capitolo 5

Applicazione esplorativa della formulazione Meshless a celle locali con il Metodo delle Celle

Nel capitoli precedenti sono stati esplorati alcuni sviluppi basati sul Metodo delle Celle: la formulazione quadratica per problemi scalari e vettoriali tridimensionali e alcuni approcci meshless.

Lo sviluppo e la verifica dell'interpolazione quadratica con il CM ha confermato le potenzialità del Metodo in ambito tecnico-applicativo: gli acclarati vantaggi propri dalla formulazione discreta diretta alla base del CM (manifesti, ad esempio, nelle applicazioni di elasto-dinamica e nei problemi di frattura) sono disponibili con una implementazione caratterizzata da precisioni di calcolo non inferiori a quelle raggiungibili dall'affermato Metodo degli elementi Finiti.

Gli approcci meshless proposti aprono peraltro interessanti prospettive: i vantaggi dell'assenza di una fase di mesh (o di remeshing) appaiono accessibili senza le difficoltà nell'imposizione delle condizioni al contorno e senza i problemi di complessità formale che affliggono molti degli approcci meshless di tipo differenziale. Gli studi esplorativi circa le implementazioni meshless assumono particolare interesse nell'ambito della ricerca di una metodologia di analisi automatica del comportamento meccanico dei segmenti ossei: nell'intento di sviluppare una procedura di modellazione numerica automatizzata basata direttamente sulle immagini cliniche, l'eliminazione della fase di creazione della mesh, operazione attualmente ancora semi-automatica, consentirebbe un significativo passo in avanti nella prospettiva delle applicazioni cliniche.

La verificata equivalenza tra CM e FEM con interpolazione quadratica resta, in questo ambito, un elemento di carattere accademico, non apportando innovazione o immediatamente percepibili progressi di carattere metodologico nella "filiera" di modellazione basata sui dati diagnostici. In assenza di un guadagno in

termini di precisione prevalgono i vantaggi offerti da un metodo consolidato e per cui sono disponibili svariati strumenti di calcolo avanzati, collaudati e affidabili.

Gli approcci meshless propongono invece un “salto” qualitativo nel processo di modellizzazione, rendendo idealmente possibile una riduzione del tempo di analisi e un’ulteriore automazione del processo, verificate ovviamente che siano accuratezza, generalità e robustezza, altri requisiti essenziali di cui si è discusso nel capitolo 3.

In questo capitolo verrà quindi descritta l’applicazione di una metodologia meshless del CM allo studio della deformazione di un segmento osseo in vitro, problema di riferimento per la valutazione di accuratezza del modello in un contesto affine a quello reale sia per complessità geometrica che per comportamento materiale [76].

L’obiettivo è quello di accertare la validità dell’implementazione nello specifico contesto delle applicazioni di meccanica dell’osso, verificando l’accuratezza dei risultati rispetto sia alle misure sperimentali che ai valori predetti da un modello FEM accoppiato di riferimento. La prospettiva dello studio è, come detto, l’applicazione clinica, ambito che impone metodologie di indagine:

- robuste rispetto alle singolarità e agli artefatti della sorgente di informazione circa geometria e proprietà materiali;
- automatiche nella loro realizzazione, riducendo (idealmente eliminando) le fasi di manipolazione manuale oltre dalla definizione di carichi e vincoli;
- generali nella loro applicazione, non contenendo elementi restrittivi l’applicabilità a specifici siti anatomici.

Questi requisiti indirizzano lo studio applicativo verso una costruzione del modello numerico basata direttamente sui dati delle immagini medicali (i dataset CT specificamente), che sono lo strumento di indagine in grado di fornire informazioni circa la morfologia e la distribuzione di densità dei tessuti ossei trattati. Peraltro uno dei maggiori limiti della procedura, oggi di riferimento, basata sul FEM è rappresentato dall’estrema onerosità in termini di tempo e di risorse qualificate necessarie per la preparazione di ogni singolo modello: la fase di *pre-processing* (scontornamento del dataset CT, definizione matematica della superfici di contorno dell’osso, generazione della mesh, mappatura delle proprietà materiali) è solo in parte completata con processi automatici e richiede un controllo attento e continuo da parte di competenze qualificate. Per superare questo ostacolo all’applicazione su vasta scala di questa procedura, realizzando un processo di tempistiche compatibili con le esigenze della pratica clinica, è indispensabile individuare una procedura quanto più possibile automatizzata in cui le manipolazioni “manuali” siano ridotte al minimo necessario.

Un'idea immediata è quindi quella di non manipolare minimamente il dataset CT di partenza, provvedendo al più alla sola selezione della regione di interesse per evitare un inutile appesantimento computazionale. Vanno ora sottolineate due circostanze importanti: i dataset CT offrono dei valori scalari (le unità HU) in punti disposti secondo una griglia di punti a spaziatura regolare: con riferimento all'immagine di figura (5.1) la spaziatura risulta costante nel piano xy , avendo le immagini tutte la stessa risoluzione Δx , Δy , e può risultare variabile lungo l'asse longitudinale di scansione z , potendo variare la distanza che separa due immagini adiacenti). La seconda circostanza importante è che i valori di HU del dataset variano da punto a punto. Come illustrato nel dettaglio nel seguente paragrafo 5.2.5, le unità HU sono correlabili con la densità minerale, e questa è a sua volta correlabile con un valore di modulo di elasticità: si ha quindi disponibile una mappatura di valori di modulo di elasticità, variabile da punto a punto, sui punti di una griglia regolare.

Figura 5.1. Apparecchiatura per scansione CT: la scansione, dopo opportune rielaborazioni, fornisce una pila di immagini registrate rispetto ad un sistema di riferimento disposto come indicato in figura

5.1 La selezione delle metodologia meshless applicata

Nel capitolo precedente sono stati proposti tre differenti approcci meshless. Di questi solamente il primo (quello basato sulla creazione di un complesso di celle

locale) si è verificato adatto ad un'applicazione con le direzioni sopra specificate (costruzione diretta del modello sulla griglia regolare di punti del dataset CT):

- l'approccio con interpolazione polinomiale costringe, nei problemi tridimensionali, all'adozione di polinomi interpolanti che o producono una matrice di interpolazione singolare quando i punti sono disposti su una griglia regolare, o hanno un elevato grado (parziale e totale), con significativa complessità algebrica della formulazione e (per distribuzioni regolari dei punti) asimmetria nella distribuzione dei satelliti rispetto al polo;
- l'approccio con interpolazione RBF, certamente più agile in termini di selezione della costellazione, è risultato avere una complessità formale eccessiva per gli strumenti di manipolazione simbolica disponibili relativamente al calcolo dell'espressione analitica della equazione di bilancio al nodo: in altri termini l'espressione algebrica dell'integrazione delle tensioni sulla superficie di una regione tributaria anche di forma elementare è risultata eccessivamente complessa per risorse algoritmiche e computazionali dei manipolatori simbolici disponibili¹.

L'approccio meshless a celle locali è dunque il candidato per l'applicazione di test. Nel caso tridimensionale la mesh locale costruita attorno ad ogni nodo è composta da tetraedri, aventi vertice nel nodo polo e gli altri tre vertici nei nodi primi vicini. La disposizione regolare dei punti sulla griglia strutturata del dataset CT fa assumere a questa mesh una conformazione di semplice definizione, come illustrato in figura (5.2)

L'applicazione di questa metodologia ha però individuato problemi numerici legati alla non simmetria della matrice di rigidità del sistema risolvibile; questa asimmetria origina dalla disomogeneità delle proprietà dei materiali associate alle celle locali di ciascun nodo: alle celle della mesh locale di tetraedri costruita attorno ad un nodo va infatti associato un valore di modulo di elasticità E che sia in qualche modo legato ai valori dei nodi su cui la mesh locale si appoggia; qualunque strategia si adotti per individuare questo valore (media dei valori ai nodi della costellazione, media pesata, valore associato al nodo polo...) si ha comunque che in ogni mesh locale sono presenti valori di E differenti da quelli associati alle celle delle mesh locali adiacenti; anche se la griglia è regolare, e anche se dunque la relazione "polo satellite" risulta simmetrica, le forze di superficie calcolate sull'elemento di separazione tra due nodi affiancati è diversa quando venga calcolata relativamente alla mesh dell'uno o dell'altro nodo, fatto

¹sono stati utilizzati i programmi open source di Computer Algebra System (CAS): *Maxima* (<http://maxima.sourceforge.net/>), *Mathomatic* (<http://www.mathomatic.org/math/>) e il pacchetto "Symbolic" della suite open source *Octave-Forge* (<http://octave.sourceforge.net/>).

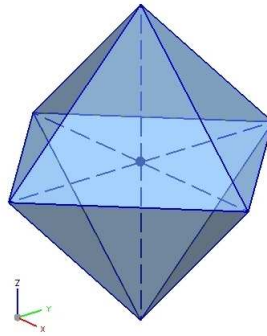


Figura 5.2. Mesh locale costituita da tetraedri a 4 nodi appoggiati al nodo polo e ai nodi primi vicini

questo che produce un'asimmetria nella matrice di rigidezza globale.

Si è verificato che realizzando una mediazione delle forze agenti sulla superficie di interfaccia tra due nodi vicini, considerata appartenente alle regioni tributarie dei due nodi, il calcolo andava a buon fine, producendosi stabilmente un risultato coerente. L'idea è quella di considerare, nel bilancio delle forze agenti sul contorno della regione tributaria, la media delle forze che si scambiano mutualmente polo e satellite, mediando i due valori riferiti alla stessa superficie quando la relazione polo-satellite viene rovesciata. Facendo riferimento alla figura (5.3) si consideri il nodo P , la sua mesh locale di quattro triangoli, e la regione tributaria; fissando in particolare l'attenzione sul lato AB :

- sia F_{AB}^P la forza agente su AB quando calcolata relativamente alla interpolazione dei valori di spostamento nodale della cella PQS ;
- sia F_{AB}^Q la forza agente su AB quando calcolata relativamente alla interpolazione dei valori di spostamento nodale della cella PQR ;

Nel bilancio delle forze agenti sulla regione tributaria del nodo A , relativamente al lato AB , si considera non già F_{AB}^P quanto piuttosto il valore medio $1/2 (F_{AB}^P + F_{BA}^Q)$. Si tratta di fatto di considerare lo stesso elemento di superficie come appartenente ai due campi di interpolazione locale degli spostamenti nodali costituiti dalle celle locali dei due nodi affacciati, separati dalla superficie in esame.

L'idea, di implementazione immediata nel caso di punti disposti su griglie regolari, è generalizzabile, con la sola (non banale) condizione di rispettare il carattere mutuo del rapporto "polo-satellite" tra tutti i nodi vicini.

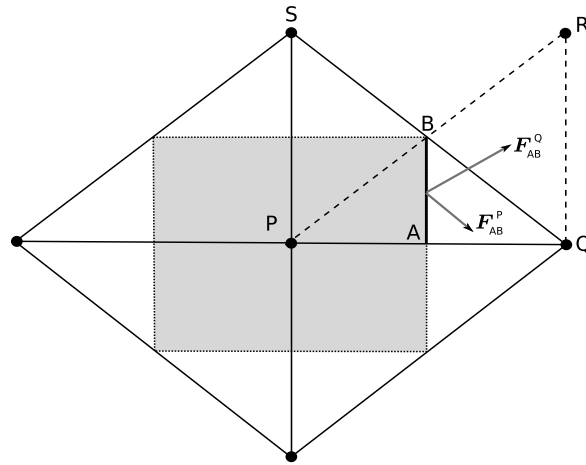


Figura 5.3. Mediazione delle forze sulla superficie di contorno della regione tributaria del nodo P : la forza agente sul lato AB è assunta pari alla media tra F_{AB}^P (calcolata relativamente all'interpolazione degli spostamenti nodali della cella PQS) e F_{AB}^Q (calcolata relativamente all'interpolazione degli spostamenti nodali della cella PQR); la cella PQR appartiene alla mesh locale del nodo Q

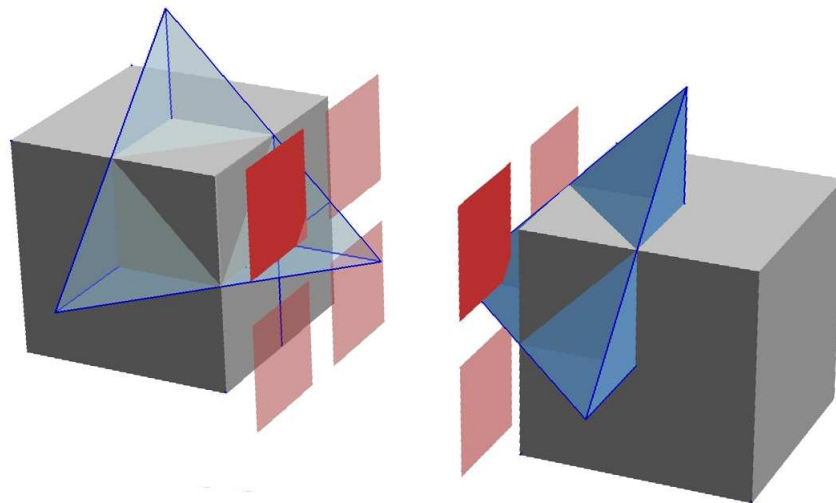


Figura 5.4. Regioni tributarie di due nodi vicini distanziate per chiarezza di rappresentazione: la superficie di confine tra i due nodi adiacenti è stata divisa nelle quattro porzioni di pertinenza di altrettanti tetraedri dei due complessi locali affacciati.

Nel caso tridimensionale, e per disposizioni regolari di punti (caso corrispondente alla situazione del dataset CT) una scelta immediata è quella di considerare come regione tributaria di ciascun nodo il corrispondente poliedro di Voronoi (che in questo caso è un parallelepipedo le cui facce sono passanti per i punti medi dei segmenti congiungenti ciascun nodo con i nodi primi vicini secondo le direzioni di allineamento della griglia). Costruita la mesh locale di tetraedri, la mediazione delle forze avviene sulla superficie di interfaccia tra un nodo e il nodo vicino. Questa superficie rientra nella “pertinenza” di quattro differenti tetraedri della mesh locale di ciascuno dei due nodi: su ognuna delle quattro porzioni di superficie si calcola la forza agente relativamente all’interpolazione del campo di spostamenti dei tetraedri di riferimento appartenenti alle mesh locali dei due nodi in esame. Questa procedura, adottata e valutata nella sua applicazione nel prosieguo di questa tesi, viene qui denominata Meshless Cell Method (MCM).

Va rilevato come questa procedura non sia affatto semplice in termini algoritmici per una disposizione arbitraria di punti nello spazio. Nel caso specifico dell’applicazione, però, la fortunata circostanza dell’allineamento dei punti rende il processo di mediazione delle forze molto semplice.

Un’altro elemento che risulta qui significativo sottolineare è come questa procedura conservi comunque la sua *raison d’être* nella filosofia meshless: i tetraedri sono qui delle “infrastrutture” per l’interpolazione locale del campo degli spostamenti nella regione di spazio a loro associata; in questa regione le forze di superficie sono calcolate con riferimento all’interpolazione del corrispondente tetraedro anche in punti ad esso esterni. In questo senso si può considerare l’MCM come una sorta di *cross-over* tra la procedura a celle locali (in cui si considera solamente la regione di spazio interna ad ogni cella) e quella ad interpolazione polinomiale descritte nel capitolo 4. Replicando i test della trave di Timoshenko con le stesse modalità e parametri di cui al paragrafo 4.2.2.1, si sono ottenuti i risultati riportati in tabella (5.5) e nel grafico di figura (5.6), che testimoniano la validità, in termini di precisione numerica, della procedura.

5.2 Il test esplorativo

L’algoritmo MCM è stato valutato riproducendo un’indagine accoppiata numerico-sperimentale condotta con misure di deformazione in campo elastico su un segmento osseo in vitro [77]: un femore umano è stato sottoposto a delle prove di carico secondo differenti configurazioni, misurando di volta in volta le deformazioni sulla sua superficie in punti anatomicamente significativi. Le prove erano state replicate con un modello FEM costruito con la procedura standardizzata a partire da una acquisizione CT: la comparazione tra le misure sperimentali delle

lato	δ
1	9.06E-004
0.5	1.75E-004
0.25	4.09E-005
0.125	1.05E-005

Figura 5.5. Test della trave di Timoshenko per l'implementazione meshless a celle locali con simmetrizzazione: valore dello scarto quadratico medio δ per i tra soluzione numerica e soluzione teorica nei punti interni al dominio al variare del passo della griglia di punti

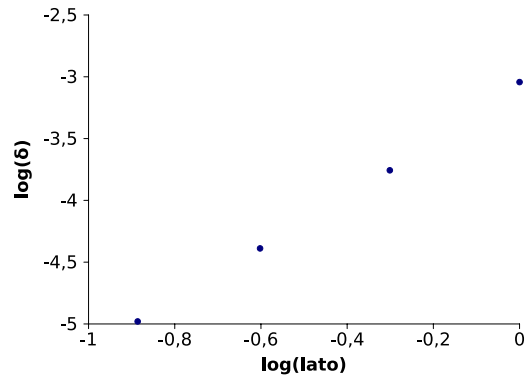


Figura 5.6. Test della trave di Timoshenko per l'implementazione meshless a celle locali con simmetrizzazione: dati di tabella (5.5) in scala logaritmica di errore e passo di griglia

deformazioni superficiali e i valori predetti dal modello numerico nei punti corrispondenti ha costituito la base di valutazione dell'accuratezza dell'intera procedura di modellizzazione numerica. Questo esperimento ha dunque costituito una prima importante doppia verifica dell'approccio MCM: la valutazione di accuratezza è avvenuta per confronto con le misure sperimentali mentre i risultati ottenuti dal FEM, a livello aggregato, hanno costituito una base di valutazione comparativa rispetto alla procedura di simulazione di riferimento.

5.2.1 L'esperimento di riferimento

Su un femore destro proveniente da un donatore maschio di 51 anni (peso 75 kg, altezza 175 cm) sono state applicate 13 rosette estensimetriche triassiali posizionate su ciascuno dei quattro aspetti anatomici (anteriore, posteriore, mediale, laterale), su quattro diversi livelli in direzione prossimale-distale (testa, collo, metafisi, diafisi). Nella regione diafisaria sono stati applicati soltanto due estensimetri (in posizione laterale e mediale, ove si suppone si misurino deformazioni più significative) per limitare il numero di canali di acquisizione. L'applicazione di un estensimetro nell'aspetto laterale del collo è stata parimenti omessa, a causa dell'estrema irregolarità della superficie. Si faccia riferimento alla figura (5.7) per un'identificazione più chiara del posizionamento dei sensori. La superficie di applicazione di ciascuno dei sensori è stata preparata secondo una procedura validata in letteratura [78] per le prove su campioni idratati di osso cadaverico. Le

13 rosette estensimetriche applicate erano del modello KFG-3-120-D1711L3M2S (Kyowa, Tokyo, Japan), aventi una lunghezza di griglia di 3 mm. La tensione applicata stata limitata a 0.5 V per griglia, per evitare effetti di surriscaldamento. Le deformazioni sono state acquisite ad una frequenza di 10 Hz, con un filtro passa-basso in frequenza fissato a 1 Hz.

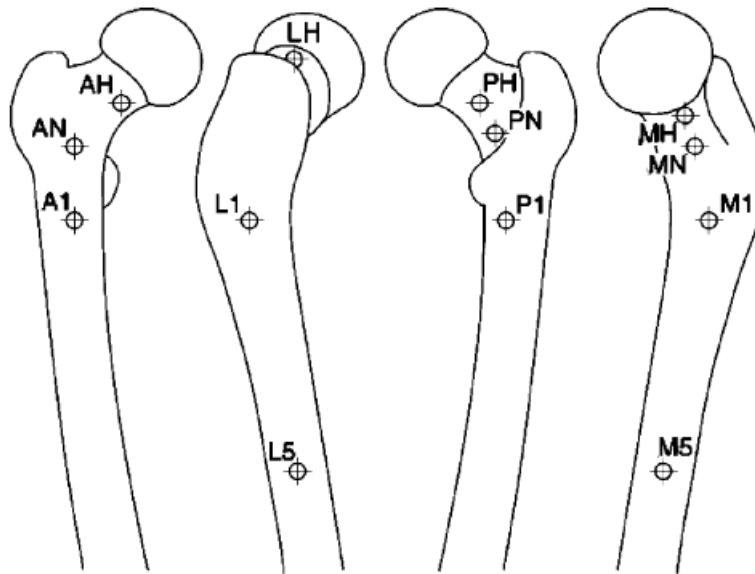


Figura 5.7. Schema della disposizione degli estensimetri; da sinistra: vista anteriore, laterale, posteriore, mediale

La parte distale del femore è stata inclusa in una base di afferraggio di PM-MA², per realizzare un vincolo ad incastro nel posizionamento sulla macchina di carico secondo gli schemi di seguito descritti. La macchina di prova era equipaggiata con una cella di carico di portata 5kN (Mod. 8502, Instron, Canton, MA, USA). Il campione è stato montato sulla cella di carico per mezzo di una piattaforma che consente l'inclinazione del campione secondo diversi angoli di prova. Il carico veniva trasmesso dall'attuatore attraverso slitte a basso attrito per evitare la trasmissione di indesiderate componenti orizzontali di carico. Uno schema dell'applicazione del carico riportato in figura (5.8).

Lo schema di carico complessivo prevedeva l'applicazione sulla testa femorale di una forza pari a circa il peso corporeo (800 N, per evitare condizioni di

²polimetilmetacrilato

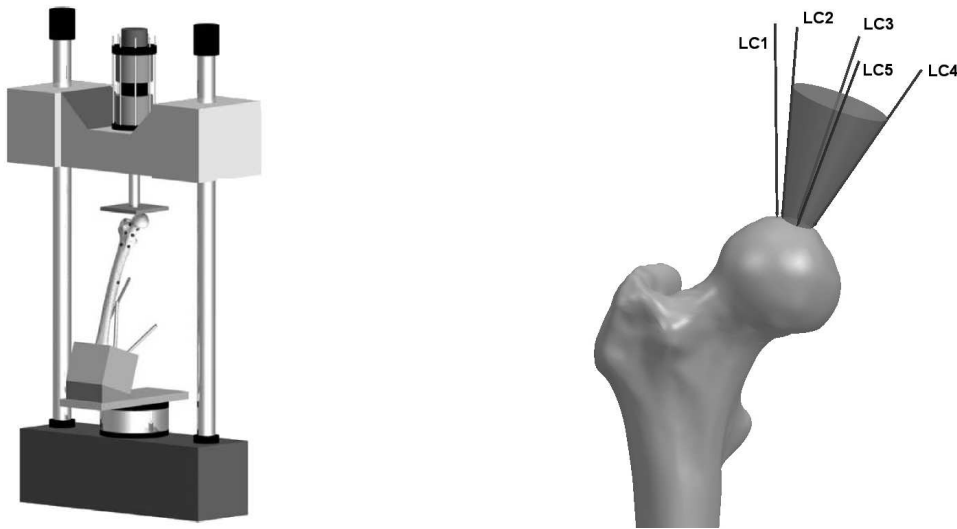


Figura 5.8. Rappresentazione schematica del campione montato sulla macchina di prova in posizione di flessione a 18° e rappresentazione schematica delle configurazioni di carico; il carico è applicato verticalmente (neutral - LC1) e con diverse inclinazioni rispetto all'asse biomeccanico: nel piano frontale (adduzione) 3° (LC2) e 24° (LC4) e nel piano sagittale 3° (estensione - LC3) e 18° (flessione - LC5)

danno meccanico nel campione) secondo 5 diverse configurazioni di carico corrispondenti alle direzioni estreme raggiunte dalla forza di reazione all'anca nello svolgimento di normali azioni motorie [79]. La prova è stata condotta in controllo di carico, consentendo così lo sviluppo di eventuali effetti di creep; il carico massimo, raggiunto quasi-staticamente con incrementi di 100 N , è stato mantenuto per circa 30 secondi. Sono state eseguite cinque ripetizioni di misura ad intervalli di almeno 10 minuti per consentire il recupero di eventuali effetti viscoelastici indotti. La procedura descritta ha consentito di misurare con ottima ripetibilità le deformazioni, controllare la linearità della risposta all'applicazione del carico, quantificare l'entità di fenomeni viscoelastici e dell'eventuale insorgenza di deformazioni irreversibili.

Le condizioni di prova erano le seguenti: temperatura $29\text{--}31^\circ\text{C}$, umidità relativa 40%. Il campione era tenuto costantemente avvolto in panni impregnati di soluzione salina.

I dati grezzi uscenti dalle griglie estensimetriche sono stati preliminarmente esaminati con il criterio di Chauvenet per l'eliminazione di dati inattendibili, che però sono risultati assenti. La ripetibilità tra le misure è risultata ottima, così come il test di linearità delle deformazioni di ciascun estensimetro in funzione del carico applicato. Sono state quindi calcolate le medie delle cinque ripetizioni di

misura per ciascun canale di ciascun estensimetro.

5.2.2 Il dataset CT

Il femore è stato sottoposto a tomografia computerizzata (scanner HiSpeed, General Electric Co., USA, parametri di scansione: 120 kV_p , 180 mA , tipici di un normale esame clinico) dopo essere stato scongelato ed immerso in acqua per prevenire artefatti di indurimento del fascio di radiazioni. È stato applicato un protocollo di scansione assiale, con spessore del fascio 1 mm e distanza assiale tra scansioni successive pari a 2 mm nella regione prossimale (dalla testa al piccolo trocantere) e di 4 mm nella regione diafisaria e distale. Il valore dimensionale del pixel è risultato di 0.46 mm .

5.2.3 Il modello FEM subject specific

Il modello ad elementi finiti è stato generato a partire dal dataset CT seguendo una procedura che può essere così schematizzata:

- estrazione del modello virtuale della superficie tridimensionale dell'osso;
- generazione della mesh di elementi finiti;
- mappatura delle proprietà meccaniche (modello costitutivo elastico isotropo disomogeneo) del tessuto osseo sulla mesh.

Per quanto riguarda il primo passo, i contorni esterni della superficie del campione sono stati estratti dalle sezioni tomografiche a mezzo di un software semiautomatico basato su un algoritmo di identificazione dei bordi [80]. I contorni così ottenuti sono stati interpolati per ottenere la superficie esterna del femore usando una triangolazione di Delaunay [5]. La superficie tridimensionale tassellizzata così ottenuta è stata convertita in un modello NURBS (Non Uniform Rational B-Spline) con il software di reverse engineering Geomagic Studio (v. 6, Raindrop Geomagic Inc., USA).

Il secondo passo di modellazione è stato realizzato generando in maniera automatica con il pacchetto software HyperMesh (Altair Engineering, Inc, USA) che implementa un algoritmo advancing-front, una mesh di tetraedri a dieci nodi del femore. È stata posta attenzione a che sulla superficie del modello fosse generato uno strato regolare di tetraedri in modo da minimizzare l'inevitabile effetto di volume parziale che tende a sottostimare la densità (e quindi il modulo elastico) assegnata al modello nelle regioni di confine e particolarmente nella zona del collo, a causa dell'inclinazione relativa in tale zona della superficie e del fascio di



Figura 5.9. Modello virtuale tridimensionale (NURBS) del femore

radiazione incidente. La regione condilare non è stata inclusa nel modello FEM, perché non si è ritenuto necessario modellare la zona inclusa in PMMA, stimando sufficiente il vincolo fisso dei nodi giacenti al livello prossimale del blocco. La mesh ottenuta è risultata di 76026 elementi e 118970 nodi.

La mappatura delle proprietà meccaniche del tessuto osseo sugli elementi della mesh è avvenuta con il software BoneMat [81]. Il software attribuisce ad ogni elemento della mesh un valore di modulo di elasticità sulla base dei valori di unità HU lette nel dataset CT nella regione di spazio occupata dall'elemento. Oltre al dataset CT, il software richiede come input l'equazione di calibrazione densitometrica (legame HU - densità) dell'acquisizione CT e la relazione costitutiva (legame densità - modulo elastico), entrambe descritte nel seguente paragrafo (5.2.5). Il modello FEM risulta quindi elastico lineare isotropo nel comportamento materiale di ciascun elemento, ma disomogeneo nella distribuzione dei moduli di elasticità.

5.2.3.1 Condizioni al contorno

Per riprodurre le condizioni di vincolo della prova sperimentale, sono stati impediti gli spostamenti di tutti i nodi superficiali corrispondenti alle regioni del segmento osseo immerse nel blocco di PMMA. Il carico è invece stato applicato al nodo di vertice più prossimo alla posizione registrata del punto di applicazione del carico in ciascuna configurazione di sollecitazione.

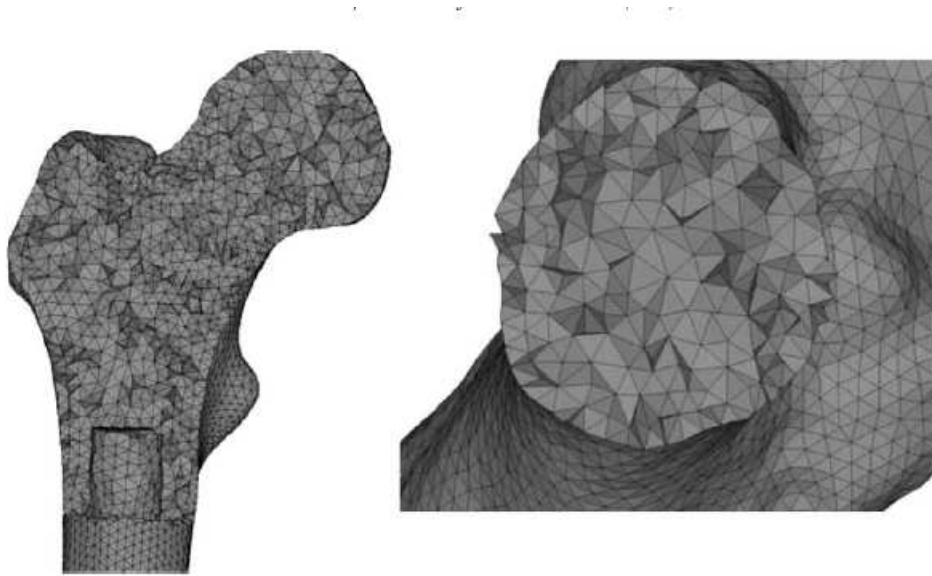


Figura 5.10. Sezione coronale (a sinistra) e trasversale (a destra) del modello ad elementi finiti.

5.2.4 Il modello MCM

Il modello MCM è stato generato utilizzando come nodi i punti della griglia della scansione CT, senza alcuna operazione di segmentazione.

La costruzione del modello è stata diretta: selezionata la regione di interesse (con quota a partire dal piano di imposta della base di PMMA) l'unica fase di preprocessing è stata un sottocampionamento (*subsampling*) su una griglia regolare di passo 2 mm, riducendo il numero di punti in ragione delle limitazioni di memoria del calcolatore disponibile per condurre l'analisi. Ai punti a quota minima (corrispondente al piano di imposta della base di PMMA del femore) sono stati imposti spostamenti nulli, replicando le condizioni di vincolo delle prove di carico sperimentali. Il carico corrispondente a ciascuna condizione di sollecitazione è stato applicato al nodo del dataset CT più prossimo alla posizione registrata del

punto di applicazione del carico sperimentale.

Attorno ad ogni nodo del dataset è stata costruita la mesh locale di tetraedri costruiti con i nodi prossimi nelle direzioni di allineamento della griglia di punti. A tutte le celle della mesh locale è stato associato un valore unico di modulo di elasticità caratterizzante il legame costitutivo elastico lineare isotropo ad esse associato. Il valore del modulo di elasticità è stato determinato come media pesata dei valori determinati ai vertici (tramite le relazioni illustrate nel paragrafo 5.2.5) e attribuendo al nodo polo peso doppio rispetto ai nodi satellite.

La soluzione del sistema di equazioni lineari ottenuto dall'assemblaggio dei bilanci delle forze ai vari nodi è stata ottenuta con un codice realizzato all'uopo in linguaggio C utilizzando la libreria PETSc³ per la soluzione di sistemi di equazioni lineari.

5.2.5 La definizione delle proprietà materiali

I valori di modulo di elasticità E sono stati derivati dalle informazioni del dataset CT tramite due operazioni:

- la relazione di calibrazione densitometrica del dataset CT, che correla i valori di Hounsfield Unit (HU) con valori di densità minerale (*ash density*) individuata in fase di acquisizione della tomografia tramite lo "European Spine Phantom" [82]:

$$\rho_{ash} = 0.0007851 HU + 0.1439277 \quad \left[\frac{g}{cm^3} \right] \quad (5.1)$$

- la relazione tra densità minerale e modulo di elasticità, assunta dalla letteratura [83]:

$$E = 10.5e3 \rho_{ash}^{2.29} \quad [GPa] \quad (5.2)$$

Il modulo di Poisson è stato assunto pari a 0.3 [84].

5.2.6 Determinazione dell'accuratezza dei modelli numerici

Le misure risultanti (26) sono state utilizzate per la validazione delle deformazioni principali calcolate dai modelli numerici.

³<http://www.mcs.anl.gov/petsc/petsc-as/>

5.2.6.1 Modello FEM:

Per il modello FEM il calcolo dei valori principali di deformazione è avvenuto individuando le due direzioni principali di tensione cui corrispondessero valori di tensione più lontani dallo zero (ossia escludendo la direzione principale con minore valore di tensione associato). Si suppone infatti uno stato di stress piano sulla superficie, condizione usualmente verificata nella simulazione numerica dove una delle tensioni principali calcolate è solitamente assai prossima allo zero. Si calcolano a questo punto le deformazioni principali corrispondenti, da utilizzare per il confronto con le misure sperimentali. Va sottolineato come esse non corrispondano necessariamente ai valori principali di deformazione minimo e massimo poiché, contrariamente allo stato di tensione, non è possibile ipotizzare l'esistenza di uno stato di deformazione piano: in questa condizione i valori di deformazione principale minimo o massimo potrebbero corrispondere a direzioni non tangenti alla superficie.

Nella fase di preparazione della mesh è stata posta attenzione a che un nodo corrispondesse alla posizione di centro-griglia (digitalizzata e riportata sul modello) di ciascun estensimetro. A causa della presenza di elevati gradienti sia di densità che di stress nella maggior parte delle posizioni in cui sono stati posizionati gli estensimetri, le tensioni principali usate per il confronto con le misure sperimentali sono state mediate sui nodi di superficie corrispondenti all'area sensibile di ciascun estensimetro.

5.2.6.2 Modello MCM

Nel modello MCM viene determinato il vettore spostamento in ogni punto del dataset CT. All'interno di ogni voxel è quindi individuabile un campo di spostamenti continuo interpolando con una funzione trilineare i valori di spostamento ai vertici. I valori di deformazione nei punti corrispondenti agli estensimetri sono stati quindi calcolati derivando il campo di spostamenti del voxel contenente il punto corrispondente all'estensimetro; i valori principali di deformazione adottati sono quelli corrispondenti alle direzioni di tensione minima e massima, conformemente alla procedura sopra descritta a proposito del modello FEM.

5.2.6.3 Metrica di accuratezza

L'accuratezza delle predizioni numeriche rispetto alle misure di deformazione ricavate sperimentalmente è stata verificata nel modo seguente:

- è stata realizzata una regressione lineare tra parametri omologhi (numerici vs. sperimentali); la bontà della predizione in questo caso è individuata dal valore di correlazione R^2 e dai parametri coefficiente angolare ed intercetta

della retta di regressione individuata; in condizioni ideali di accordo tra modello numerico e dati sperimentali, vi dovrebbe essere perfetta linearità nella relazione ($R^2 = 1$), con pendenza pari ad uno (equivalente qui ad una corretta stima della rigidezza) ed intercetta pari a zero (assenza di errore sistematico di sovra o sottostima dei dati sperimentali);

- vengono calcolati alcuni parametri derivati dalle stime puntuali di errore nella predizione: l'errore quadratico medio (RMSE), il suo valore percentuale rispetto al massimo valore di misura sperimentale, l'errore massimo e analogamente il suo valore percentuale rispetto al massimo valore misurato.

Come ulteriore elemento di valutazione, volto ad delineare le differenze di comportamento tra MCM e FEM, sono stati confrontati i valori dello spostamento calcolati dai due modelli in due punti anatomicamente ben identificabili: il centro della testa del femore e il punto posteriore del piccolo trocantere.

5.3 Risultati

Verificato che non sussistesse dipendenza tra la condizione di carico e le differenze tra valori di deformazione sperimentali e quelli predetti dal modello MCM (ANOVA fattoriale con P-value > 0.9), i valori di deformazione sono stati considerati in maniera aggregata per tutte le condizioni di carico e analizzati nel loro complesso.

I valori principali di deformazione predetti dal modello MCM manifestano un'elevata correlazione con i valori sperimentali ($R^2 = 0.85$). La pendenza della retta di regressione (valori numerici vs. sperimentali) è risultata maggiore dell'unità ma il valore dell'intercetta è risultato significativamente prossimo allo 0, come riportato e illustrato nel grafico di figura (5.11) dove, per comparazione, sono riportati anche i valori ottenuti con il modello FEM e la relativa retta di regressione. Gli indicatori di accuratezza globale sono risultati essere soddisfacenti, essendo il valore di errore massimo pari al 40% e l'errore quadratico medio pari al 16%, come riportati in tabella (5.1). Nella tabella (5.2) sono riportate le componenti dello spostamento estratte dai due modelli MCM e FEM nei due punti di controllo; i valori suggeriscono un comportamento analogo dei due modelli avendo gli spostamenti predetti la stessa direzione e ampiezze paragonabili. A questo livello il modello MCM appare sistematicamente più rigido del corrispondente modello FEM.

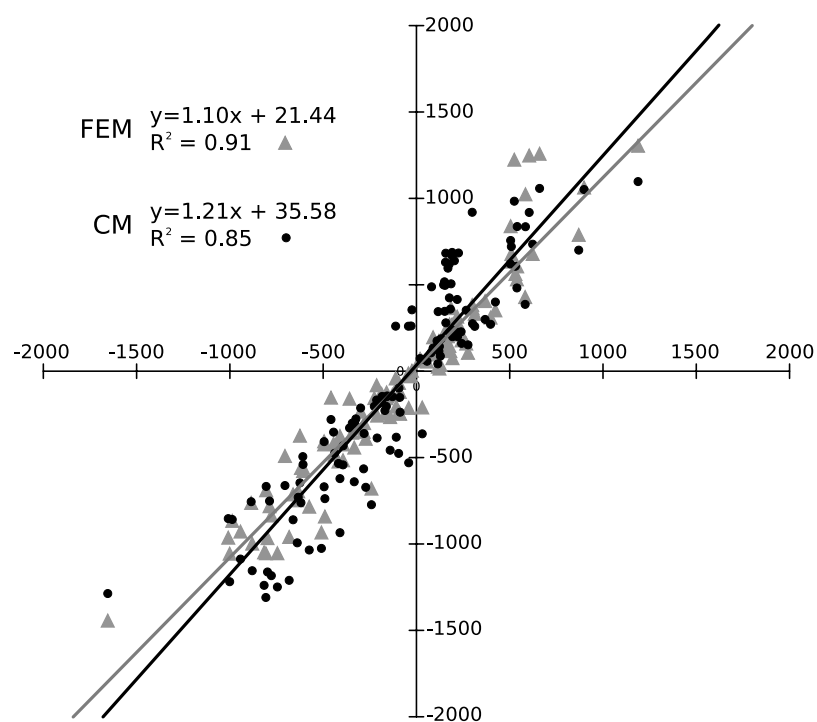


Figura 5.11. Retta di regressione dei valori di deformazione predetti ($\mu\epsilon$, asse y) rispetto ai valori sperimentali ($\mu\epsilon$, asse x) per MCM e FEM

strain correlation	MCM	FEM
R^2	0.85	0.91
pendenza	1.21	1.10
intercetta	36	21
RMSE	258	163
RMSE %	15.6%	9.8%
Max. err.	621	699
Max. err. %	35.5%	42.3%

Tabella 5.1. Parametri della retta di regressione e valori degli indicatori di accuratezza globale per le predizioni MCM e FEM: dati aggregati relativi a tutte le condizioni di carico

	Condizione di Carico									
	LC1		LC2		LC3		LC4		LC5	
	CM	FEM	CM	FEM	CM	FEM	CM	FEM	CM	FEM
Piccolo trocantere										
U_x [mm]	-2.3	-2.7	-1.4	-1.7	-2.3	-2.8	4.2	5.2	-1.7	-2.2
U_y [mm]	-0.3	-0.4	-0.3	-0.4	0.6	0.6	-0.2	-0.2	-5.1	-6.0
U_z [mm]	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.4	-0.5
$ U $ [mm]	2.3	2.8	1.4	1.7	2.4	2.9	4.2	5.2	5.3	6.4
Centro d'anca										
U_x [mm]	-2.3	-3.9	-2.1	-2.5	-3.3	-4.0	5.3	6.6	-2.5	-3.2
U_y [mm]	-0.4	-0.5	-0.4	-0.5	0.8	0.9	-0.4	-0.3	-6.9	-8.2
U_z [mm]	-0.7	-0.9	-0.5	-0.6	-0.7	-0.9	0.7	1.0	-0.7	-0.9
$ U $ [mm]	3.3	4.0	2.2	2.6	3.5	4.2	5.4	6.7	7.4	8.9

Tabella 5.2. valori dello spostamento al piccolo trocantere e al centro d'anca predetti dai modelli MCM e FEM nelle 5 condizioni di carico

Capitolo 6

Validazione della formulazione Meshless a celle locali con il Metodo delle Celle

Nel capitolo precedente è stata illustrata una prima valutazione esplorativa dell'applicazione dell'approccio meshless con il CM a celle locali (MCM) nella predizione dello stato di deformazione di segmenti di ossa lunghe. La valutazione è avvenuta replicando un test meccanico condotto in vitro su un femore umano con un modello numerico costruito direttamente da un dataset CT; il modello, registrato spazialmente rispetto al riferimento sperimentale, replicava le condizioni di carico e di vincolo del test meccanico: la valutazione è avvenuta per comparazione dei valori di deformazione registrati sperimentalmente in punti anatomicamente significativi con i valori predetti dal modello numerico nei medesimi punti. Un ulteriore elemento di valutazione è stato il confronto con le predizioni di un analogo modello FEM, replicante il medesimo esperimento, ed eseguito secondo una procedura standard precedentemente validata rispetto alle misure sperimentali.

In questo primo test è emersa una buona corrispondenza delle predizioni del modello MCM con i valori sperimentali; gli elementi usati come valutazione (coefficiente angolare e intercetta della retta di regressione dati numerici rispetto ai valori sperimentali, errore medio e massimo delle predizioni numeriche rispetto ai valori misurati) sono risultati confrontabili con quelli caratterizzanti il modello FEM validato.

Questa prima valutazione è risultata incoraggiante l'ipotesi che l'MCM possa costituire un processo di modellazione automatico e accurato, potenzialmente utile per la predizione dello stato di sollecitazione in segmenti ossei in vivo. Benché il confronto abbia riguardato 13 differenti siti di misura delle deformazioni in 5 distinte condizioni di sollecitazione, il test conserva ancora un valore puramente

indicativo, avendo due sostanziali limitazioni:

- è stato condotto su un singolo esemplare di femore “normale” sia sotto il profilo anatomico che sotto il profilo delle condizioni di mineralizzazione;
- è stato realizzato costruendo il modello MCM su un dataset CT sottocampionato, perdendo con questo sia dettaglio di definizione geometrica del segmento osseo, che accuratezza nella mappatura delle proprietà materiali.

Affinché una procedura di modellazione numerica possa ambire a costituire elemento orientativo nella pratica clinica, imprescindibile è la valutazione dell’attendibilità della precisione numerica ottenibile con un processo che prende il nome di validazione. Due elementi focali di questo processo [85] sono la variabilità intersoggettiva (ossia la verifica del modello numerico¹ quando applicato in casi distinti) e il confronto con esperimenti controllati in vitro.

In questo capitolo verrà dunque descritto uno studio di validazione della procedura di modellazione MCM. La base del confronto è stata una campagna di misure sperimentali precedentemente condotta su 8 distinti esemplari di femore: 6 diverse configurazioni di sollecitazione in campo elastico sono state applicate su ciascun femore, misurando le corrispondenti deformazioni con 15 estensimetri posizionati in punti anatomicamente significativi. Accanto alle misure sperimentali, un ulteriore elemento di confronto e verifica è stato reso disponibile dai modelli FEM realizzati secondo una procedura validata e replicanti le medesime prove meccaniche. Questo studio numerico-sperimentale [86] costituisce a tutt’oggi il più consistente benchmark di confronto relativamente allo studio della deformazione nei segmenti di ossa lunghe a livello di organo.

Le analisi condotte con modelli MCM costruiti sulle immagini cliniche dei femori studiati, hanno avuto quindi disponibile, come per il test preliminare del capitolo 5, il doppio confronto con le misure sperimentali e con le predizioni dei modelli FEM. Un ulteriore elemento di valutazione è stato assunto con un confronto locale sistematico con uno dei modelli FEM in una delle condizioni di carico, confrontando i valori principali di deformazioni ai centroidi degli elementi FEM con i valori estratti dal modello MCM nei medesimi punti.

6.1 L’esperimento di riferimento

L’esperimento è stato condotto su quattro paia di femori umani, provenienti da donatori maschi adulti deceduti per infarto del miocardio e senza pregresse patologie all’apparato muscolo scheletrico. L’indagine non distruttiva DEXA (Dual

¹inteso quale implementazione di una procedura cognitiva di previsione e descrizione del comportamento di un sistema

Energy X-ray Absorptiometry) ha collocato questi campioni tra la condizione di "osteopenia" e quello di "severe osteoporosis". Precedentemente alle prove meccaniche non distruttive, è stata realizzata un'acquisizione CT di ciascun esemplare, secondo le specifiche di seguito riportate.

6.1.1 Le misure sperimentali

Ciascun femore è stato cementato alla base, nella regione condilare, in un contenitore di acciaio a sezione rettangolare per mezzo di PMMA. Sulla superficie sono stati posizionati 15 estensimetri secondo ciascun aspetto anatomico (anteriore, laterale, posteriore e mediale) su 4 livelli collocati principalmente nella zona epifisaria, come illustrato in figura (6.1). La superficie di applicazione di ciascuno dei sensori è stata preparata secondo una procedura validata in letteratura [78] per le prove su campioni idratati di osso cadaverico. Le 15 rosette estensimetriche applicate erano del modello KFG-3-120-D1711L3M2S (Kyowa, Tokyo, Japan), aventi una lunghezza di griglia di 3 mm. La tensione applicata stata limitata a 0.5 V per griglia, per evitare effetti di surriscaldamento. Le deformazioni sono state acquisite ad una frequenza di 10 Hz, con un filtro passa-basso in frequenza fissato a 1 Hz.

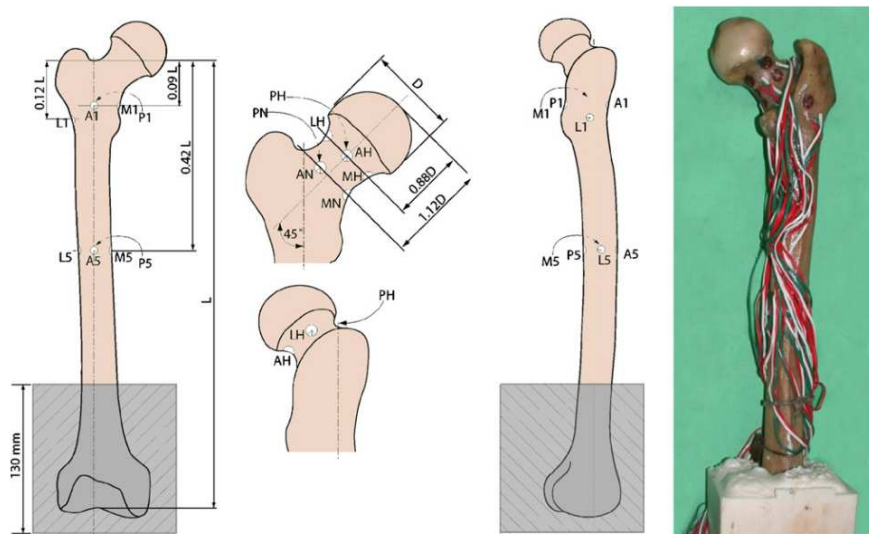


Figura 6.1. Rappresentazione dell'aspetto anatomico anteriore e laterale di un femore destro strumentato: la posizione nominale degli estensimetri è indicata relativamente alla lunghezza biomeccanica del femore e al diametro della testa. L'assenza di un estensimetro nell'aspetto laterale del collo è dovuta all'irregolarità della superficie in questa regione

6.1.1.1 Condizioni di carico

Su ciascun femore sono state applicate sei differenti condizioni di carico corrispondenti a flessione in piani differenti, carico assiale e torsione; 4 configurazioni di carico corrispondono alle direzioni estreme raggiunte dalla forza di reazione all'anca nello svolgimento di normali azioni motorie [79]; ulteriori configurazioni corrispondono al carico verticale (direzione definita dal piano sagittale da quello frontale del femore) e ad una condizione (inclinazione del femore di 8° nel piano frontale) assimilabile alla fase di appoggio monopodalico della camminata, e individuata essere, con una preliminare indagine FEM, particolarmente onerosa per la regione del collo femorale, in termini di stress prodotti.

Al fine di prevenire danni meccanici ai campioni è stato applicato un carico mas-

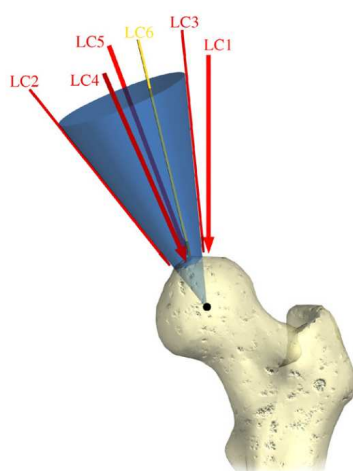


Figura 6.2. Visualizzazione delle varie configurazioni di carico

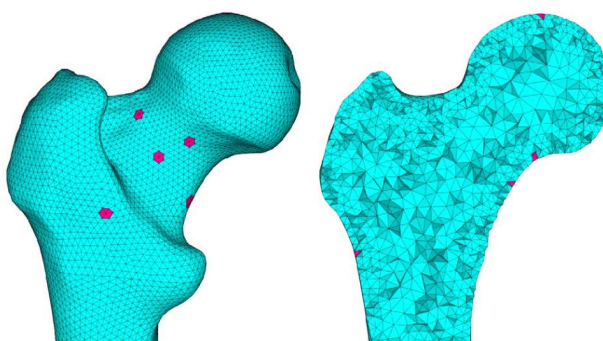


Figura 6.3. Mesh di un modello FEM nella regione prossimale con evidenziati gli elementi afferenti ai nodi corrispondenti ad estensimetri

simo corrispondente al 75% del peso corporeo del donatore. Ciascun campione è stato montato sulla cella di carico di portata $5kN$ della macchina di prova (Mod. 8502, Instron, Canton, MA, USA) con una piattaforma che consente l'inclinazione del campione secondo i diversi angoli di prova corrispondenti alle condizioni di carico; per evitare la trasmissione di indesiderate componenti orizzontali di carico, il collegamento alla cella di carico è stato realizzato con slitte a basso attrito. Il protocollo di misura ha permesso di quantificare la linearità del comportamento del materiale, i fenomeni viscoelastici e il manifestarsi di deformazioni permanenti secondo i dettagli già esposti al paragrafo 5.2.1.

6.1.2 I modelli FEM

La realizzazione dei modelli FEM basata sui dataset CT di ognuno dei femori ha seguito una procedura consolidata [77]: con la segmentazione di ogni dataset (software AMIRA 3.1.1, Mercury Computer Systems Inc, USA) si è definito un modello geometrico NURBS di ogni femore (Geomagic Studio v. 7, Raindrop Geomagic Inc., USA) con cui è stata costruita una mesh non strutturata di tetraedri a 10 nodi generata automaticamente da un algoritmo advancing-front (HyperMesh v. 7, Altair Engineering Inc., USA). In corrispondenza del centro di ciascuno estensimetri è stato posizionato un nodo, con una procedura di registrazione con il riferimento sperimentale (cfr. paragrafo 6.1.3). Ogni modello FEM è stato tagliato e vincolato a incastro a livello della base di cemento della prova sperimentale. La dimensione media degli elementi superficiali di ogni modello è pari a 3 mm nella diafisi e di 2 mm nell'epifisi; il numero di elementi degli otto modelli FEM varia tra 69272 e 80508; il corrispondente numero di nodi tra 104020 e 124592.

La distribuzione disomogenea delle proprietà meccaniche è stata mappata sugli elementi dei modelli FEM tramite il software² BoneMat_V3 in grado di attribuire un valore medio del modulo di elasticità E ad ogni elemento della mesh: l'algoritmo converte dapprima le unità HU in valori di E e poi calcola un'integrazione numerica entro il volume (spazialmente registrato con l'acquisizione CT) di ciascun elemento del modello FEM.

6.1.3 Acquisizione CT, registrazione spaziale e proprietà meccaniche

I femori sono stati sottoposti a tomografia computerizzata (scanner: HiSpeed, General Electric Co., USA, parametri di acquisizione: 120 kVp, 160 mA, tipici di un normale esame clinico) dopo essere stati scongelati ed immersi in acqua per prevenire artefatti di indurimento del fascio di radiazioni. È stato applicato un protocollo di acquisizione elicoidale, con passo di avanzamento pari a 1.3 mm dalla testa al piccolo trocantere e di 1.5 mm per la regione diafisaria e spessore del fascio rispettivamente pari a 1 e a 5 mm. L'elaborazione ha restituito un dataset ricostruito con slices di passo 1.3 mm nella zona tra la testa e il piccolo trocantere e di 5 mm nella regione diafisaria e dimensione del pixel pari a 0.59 mm.

L'equazione di calibrazione densitometrica (correlazione tra HU e densità del tessuto osseo), individuata in fase di acquisizione della tomografia tramite lo

²disponibile su www.biomedtown.org

“European Spine Phantom” [82], è risultata essere:

$$\rho_{QCT} = 0.000788343 HU - 0.00422356 \left[\frac{g}{cm^3} \right] \quad (6.1)$$

essendo ρ_{QCT} il valore di densità “radiologica”

La relazione densità-elasticità è stata assunta dalla letteratura [83]:

$$E = 6.950 \rho_{app}^{1.49} \quad [GPa] \quad (6.2)$$

dove ρ_{app} rappresenta la densità apparente del tessuto³.

La relazione tra densità radiologica ρ_{QCT} e densità minerale⁴ ρ_{app} e tra questa e la densità apparente ρ_{app} sono state assunte dalla letteratura [87]:

$$\begin{aligned} \rho_{QCT} &= 1.14 \rho_{ash} - 0.09 \\ \rho_{ash} &= 0.6 \rho_{app}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Componendo queste relazioni si ottiene:

$$\begin{aligned} E &= \alpha [h (a HU + b) + k]^\beta \\ \text{con} \\ a &= 0.00069152894737 \\ b &= 0.07524249122807 \\ h &= 0.87719298245614 \\ k &= 0.078947368421053 \\ \alpha &= 6850 \\ \beta &= 1.49 \end{aligned} \quad (6.4)$$

Il modulo di Poisson è stato assunto pari a 0.3 [84].

I modelli sono stati registrati spazialmente con il sistema di riferimento sperimentale misurando e riportando la posizione di alcuni punti di riferimento (estensimetri, livello del cemento, punto di applicazione del carico). L’acquisizione della posizione dei punti è avvenuta tramite digitizer (MicroScribe 3DX, immersion Corporation, San Jose, CA, USA) con risoluzione pari a 0.2 mm; l’errore di registrazione (avvenuta con algoritmo closest-point [88]) è risultato variabile per i vari modelli tra 0.5 e 0.9 mm

³essendo l’osso in prima approssimazione un materiale poroso la densità apparente esprime il rapporto massa su volume totale di un campione

⁴valutata per ignizione di un campione valutando il peso della frazione residua

6.1.4 I modelli MCM

I modelli MCM sono stati costruiti direttamente a partire dai dataset delle acquisizioni CT di ogni singolo femore.

Registrato il riferimento numerico con quello sperimentale, sono state replicate le condizioni di carico e di vincolo di ogni singola prova: il dataset, a risoluzione originaria, è stato “croppato” a livello del cemento (eliminando le informazioni a quota inferiore a quelle dell'imposta della base di PMMA) e a tutti i punti della superficie di base sono stati imposti spostamenti nulli, replicando il vincolo sperimentale di incastro. Le forze sono state applicate (con le componenti ottenute dalla registrazione spaziale) al nodo del dataset più prossimo al punto di applicazione del carico sperimentale.

L'algoritmo MCM è stato applicato costruendo attorno ad ogni nodo una mesh locale di tetraedri a 4 nodi appoggiati ai nodi prossimi secondo le direzioni di allineamento della griglia del dataset CT. Ai nodi sono stati calcolati i valori di E ottenuti a partire dai corrispondenti valori di HU con le relazioni riportate nel paragrafo 6.1.3.

La dimensione dei modelli è risultata variabile tra 2998800 e 3764640 nodi.

Il solutore è stato costruito con un programma ad hoc in linguaggio C con chiamata a funzioni della libreria PETSc per l'esecuzione su architetture parallele; la soluzione del sistema lineare risolvibile è avvenuta con il metodo del Gradiente Coniugato con tolleranza di ciclo pari a $1e - 7$.

6.1.5 Definizione dell'accuratezza

L'elaborazione delle misure estensimetriche restituisce, per ogni estensimetro e per ogni condizione di carico, i valori principali di deformazione sulla superficie dell'osso. Questi valori sono stati usati come elemento di confronto per i valori calcolati con il modello numerico nei punti corrispondenti alla posizione degli estensimetri.

L'assunzione di stato piano di stress sulla superficie è alla base della procedura con cui sono stati determinati i valori principali di deformazione nel modello FEM come descritto nel paragrafo 5.2.6 (sono assunti come valori di confronto i valori principali di deformazioni associati alle direzioni principali di tensione cui corrispondono i due valori di stress in valore assoluto più distanti dallo 0).

Per il modello MCM, invece, non vi sono assunzioni sulla definizione di superficie, e il segmento osseo viene considerato un continuum con il suo intorno, manipolando solamente valori di densità (e di modulo di elasticità) mappati sulla griglia regolare di punti prodotta dall'acquisizione CT. Il calcolo del tensore di deformazione in un punto avviene derivando opportunamente la funzione interpolante gli spostamenti nodali del voxel che contiene quel punto. I valori principali

di deformazione usati per il confronto con i dati sperimentali sono quindi ottenuti calcolando i valori principali nei punti sede degli estensimetri e escludendo, dei tre valori, quello più prossimo allo zero.

6.2 Le criticità emerse

Il confronto dei valori di ottenuti con i modelli MCM hanno evidenziato due criticità importanti della procedura di modellazione descritta: la prima legata all'attribuzione delle proprietà meccaniche desunte dai valori HU del dataset, la seconda di carattere più specificamente interpretativo, legata all'estrazione delle informazioni per la valutazione di rispondenza con i dati sperimentali.

6.2.1 Attribuzione delle proprietà meccaniche nell'MCM

La comparazione macroscopica del campo di spostamenti nei modelli omologhi MCM e FEM evidenziava una sistematica e consistente maggiore rigidità del modello MCM il quale registrava spostamenti massimi sistematicamente inferiori al FEM. Questo fatto era confermato anche dall'analisi puntuale dei valori di deformazione sia in relazione ai dati sperimentali che in relazione alle previsioni FEM.

La causa di questo fenomeno è stata individuata nella combinazione dell'equazione di correlazione tra HU e modulo di elasticità E con la particolare procedura di modellazione in cui, per evitare ogni procedura di discriminazione tra tessuto osseo e ambiente circostante, tutto il dataset è stato oggetto della procedura di calcolo, ivi compresi i nodi collocati nell'acqua di contenimento del femore durante l'acquisizione CT.

Quello che di fatto è venuto a crearsi è che, in virtù dell'adottato legame HU- E , i nodi collocati nel materiale circostante il femore hanno ereditato una resistenza meccanica che, pure di modesta entità, ha contribuito a creare un sostegno resistente circostante in grado di riprendere parte del carico applicato. Il fenomeno è "suggerito" dall'immagine di figura (6.4) che rappresenta il campo di HU di uno dei femori, e in cui sono stati selezionati con colorazione opaca i punti con HU superiore a 250 (valore corrispondente a valori di densità minerale caratteristici dell'osso corticale); l'immagine dà quindi una rappresentazione approssimata della geometria ossea, indicando come però essa sia circondata da altro materiale: nella particolare descrizione materiale adottata questo materiale, evidentemente abbondante, assume una resistenza meccanica nel complesso non trascurabile.

Questo fatto è stato reso evidente dalla comparazione della funzione aggregata

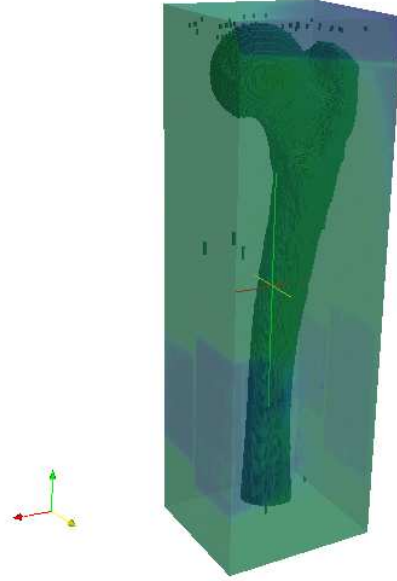


Figura 6.4. Rappresentazione del campo HU del dataset CT del femore denominato 2501: in opaco sono raffigurate le regioni del dataset con valore di HU > 250, corrispondente ad un valore di densità minerale indicativamente assimilabile a quello dell'osso corticale, presente nella regione distale del femore e sulla superficie della regione prossimale

E -HU di figura (6.5) con lo spettro dei valori HU delle acquisizioni CT riportato in figura (6.6): si noti come le relazioni utilizzate prevedano che E si annulli per valori negativi di HU; al contempo l'istogramma testimonia un elevatissimo numero di punti con HU prossimo allo zero. Al valore HU = 0 (che corrisponde all'acqua, nel caso specifico propriamente il materiale in cui è immerso il femore) corrisponde un valore di E pari a circa 310 GPa. Questo fatto ha dunque originato una sezione resistente ampia attorno ad ogni femore, contribuendo alla parziale distribuzione del carico e riducendo quindi le deformazioni, puntuali ed aggregate, nel segmento osseo..

Questa considerazione ha suggerito di modificare l'equazione (6.4) facendola valere solo al di sopra di un valore di soglia $\overline{HU}$, al di sotto del quale viene assunto per E un valore convenzionale trascurabile⁵:

$$E = \begin{cases} \alpha [h (a HU + b) + k]^\beta & \text{se } HU \geq \overline{HU} \\ 1 & \text{se } HU < \overline{HU} \end{cases} \quad (6.5)$$

⁵non nullo per evitare problemi di singolarità della matrice di rigidezza del problema

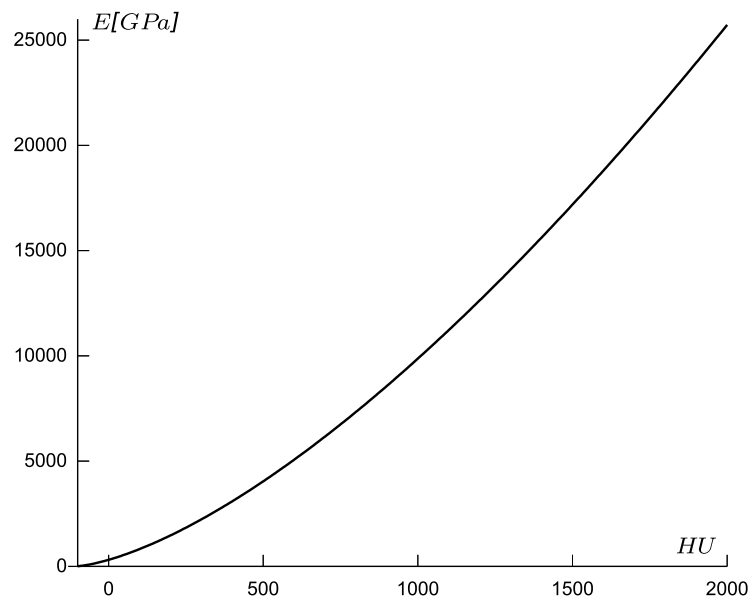


Figura 6.5. Diagramma della relazione tra HU e modulo di elasticità E espresso dalle relazioni di cui al paragrafo 6.1.3

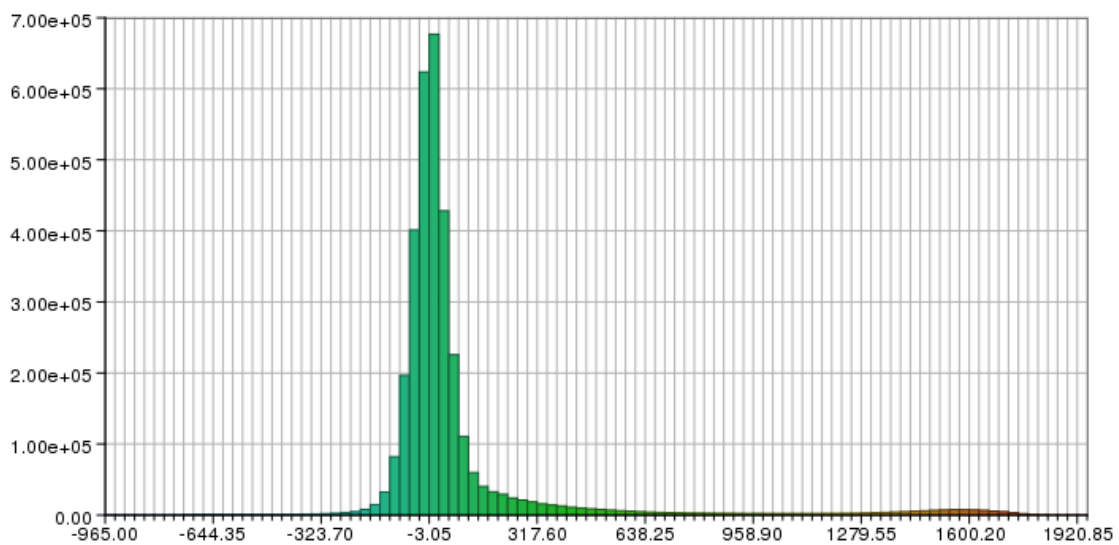


Figura 6.6. Istogramma delle frequenze di HU nel dataset di uno dei femori

Per la scelta del valore soglia $\overline{HU}$ ci si è rifatti al campo di validità sperimentale della definizione dell'equazione di calibrazione densitometrica: questa viene

infatti determinata in fase di acquisizione delle immagini CT, inserendo in coda al/ai segmenti ossei, un supporto che alloggia tre soluzioni di idrossiapatite⁶ di titolo (e dunque di densità) nota. La linearità rilevata tra unità HU e densità ha un intervallo di validità il cui limite inferiore è $\rho_{QCT} = 50 \text{ mg/cm}^3$; questo valore, corrispondente nei casi in oggetto ad un valore HU pari a 68, assunto come soglia dell'equazione (6.5).

Va rilevato come questa assunzione abbia a priori un margine di arbitrarie-

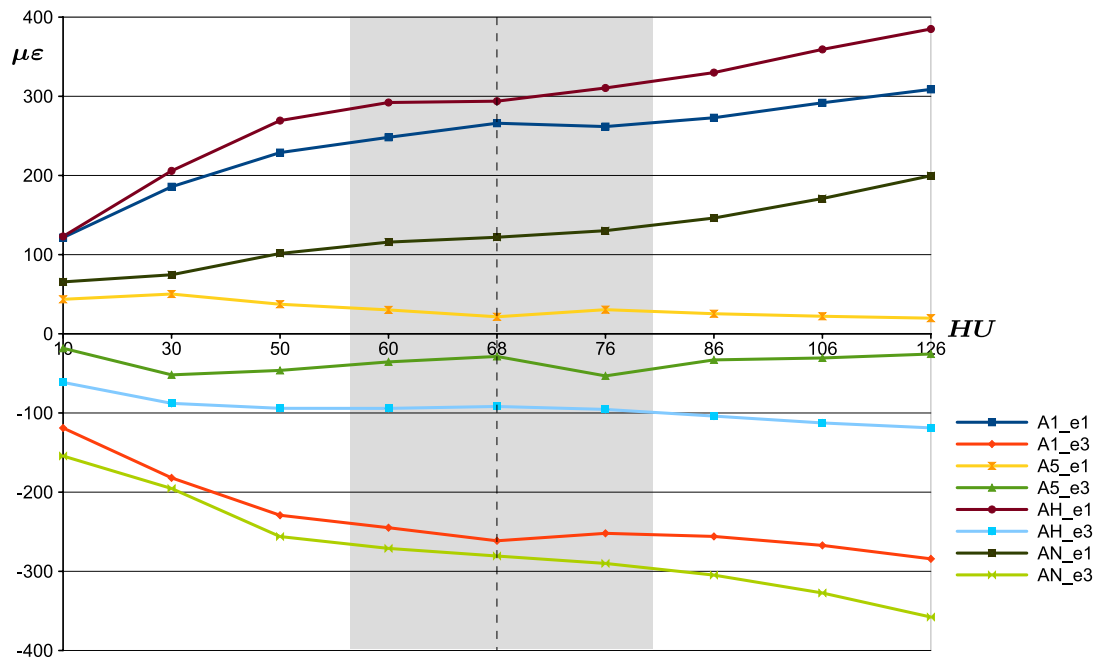


Figura 6.7. Valori di deformazione in alcuni estensimetri nel modello MCM in una delle prove al variare del valore di soglia $\overline{HU}$ dell'equazione (6.5)

tà: per contro a supporto di questa scelta, due considerazioni contribuiscono ad avvalorare la validità del criterio adottato:

- la manipolazione manuale del dataset ha evidenziato come il valore di HU pari a 68 non escluda porzioni di tessuto osseo, anche nelle regioni a minore densità media, quali quelle prossimali, in cui l'osso ha struttura trabecolare;
- la variazione del valore di soglia nell'intorno del valore adottato ha evidenziato una sostanziale stazionarietà dei valori di deformazione calcolati in

⁶sale calcio fosfato che rappresenta la frazione minerale tessuto osseo dove è presente in forma cristallina, amorfa o mista

corrispondenza degli estensimetri: il grafico di figura (6.7) evidenzia come al variare del valore $\overline{HU}$ i valori di deformazione calcolati relativamente ad uno dei femori in una stessa condizione di sollecitazione si mantengano sostanzialmente stabili nell'intorno di $\overline{HU} = 68$.

6.2.2 L'individuazione dei valori puntuali di deformazione

Sia con che senza soglia $\overline{HU}$ nell'attribuzione del modulo di elasticità, i valori predetti in alcuni estensimetri sono risultati sistematicamente molto superiori sia alle misure sperimentali che alle corrispondenti predizioni dei modelli FEM. A fronte di una base di valori confrontabili, queste misure risultavano sistematicamente anomale sia nei valori in sè che nel comportamento globale del modello MCM.

Verificando il posizionamento di questi punti sui dataset CT si è rilevato come essi fossero collocati subito all'esterno dell'osso (con errore di qualche pixel nell'immagine) o in regioni di transizione tra tessuto osseo e matrice esterna (acqua) che, per la risoluzione spaziale della tecnica di acquisizione delle immagini, risultano zone con densità a cavallo tra quella dell'osso e quella dell'acqua.

Questo fatto è direttamente imputabile alla combinazione di due errori nel posizionamento dei punti di misura (posizione sperimentale degli estensimetri) nel riferimento del dataset CT:

- l'incertezza nel rilevamento della posizione degli estensimetri sulla superficie del femore, operazione che avviene con uno strumento (digitalizzatore) di risoluzione 0.2 mm;
- la registrazione tra il riferimento sperimentale e quello del dataset CT, operazione caratterizzata da una incertezza dell'ordine dei 0.5–0.9 mm.

Il casuale combinarsi di questi errori ha dunque ragionevolmente prodotto l'errata collocazione dei punti di indagine nel modello MCM che, avendo la risoluzione nativa del dataset CT, risulta estremamente sensibile (la risoluzione nativa dell'acquisizione CT è pari, nel piano di ogni singola slice, a 0.59 mm).

Va rilevato come nel modello FEM questo problema non si ponga per due ragioni sostanziali: innanzitutto in corrispondenza della posizione stimata dell'estensimetro sul femore viene collocato, sulla superficie del modello FEM un nodo, il quale, a prescindere da errori di posizionamento, si troverà comunque ad essere nodo di superficie; in secondo luogo le misure estratte dal modello FEM mediano i valori calcolati ai centroidi di tutti gli elementi esterni (ossia aventi una faccia sulla superficie) afferenti al nodo; questa operazione muove dalla considerazione che nella pratica sperimentale l'estensimetro ha una griglia di rilevazione che

copre una superficie circolare di diametro pari a circa 3 mm , misura che incidentalmente corrisponde alla dimensione media degli elementi superficiali del modello FEM.

Queste considerazioni hanno pertanto ispirato una strategia alternativa per il calcolo dei valori di deformazione in corrispondenza della posizione stimata degli estensimetri. Anziché considerare i valori principali di deformazioni calcolati nel punto geometrico corrispondente agli estensimetri, si adotta la seguente procedura:

- si individua il voxel v in cui cade la posizione dell'estensimetro;
- si individua l'insieme $\mathbb{V}$ dei voxel limitrofi il cui centroide disti dal centroide di v meno di un valore R (ossia si individuano i voxel il cui baricentro cada entro una sfera di raggio R e di centro il baricentro di v);
- tra i voxel dell'insieme $\mathbb{V}$ si individua l'insieme $\mathbb{V}_B$ dei voxel caratterizzati dal fatto di avere valore medio di HU ai vertici maggiore della soglia HU ;

I valori di deformazione principale associati alla posizione nominale dell'estensimetro saranno quindi ottenuti mediando i valori principali calcolati ai centroidi dei voxel dell'insieme $\mathbb{V}_B$.

Con la procedura descritta si è in grado di ottenere un'informazione che medi i valori alla scala dell'acquisizione, considerando i soli voxel interni al tessuto osseo. Assumendo R pari a 2 mm si riesce infatti a tenere in considerazione da un lato l'estensione della superficie di acquisizione sperimentale della deformazione (l'estensimetro ha forma circolare con diametro di circa 3 mm), dall'altro l'incertezza del suo posizionamento nel riferimento del dataset CT.

Il grafico di figura (6.8) illustra come varino le predizioni dei valori di deformazione ai vari estensimetri variando il valore di R ; nel grafico vengono riportate 5 colonne per ogni misura: la prima corrisponde al valore sperimentale, la seconda alla predizione FEM, la terza alla predizione MCM puntuale, le ultime due alle predizioni MCM mediate con valore di R pari a 2 e a 3 mm : si nota come la mediazione con la procedura descritta elimini la presenza di valori non significativi (corrispondenti a informazioni puntuali lette nella matrice acquosa); al contempo le predizioni con la procedura mediata risultano in prima approssimazione stabili alla variazione di R .

6.3 Validazione con le misure sperimentali

Con la procedura appena descritta, i valori principali di deformazione predetti dal modello MCM per varie condizioni di carico nei vari femori hanno un'elevata corrispondenza con i valori sperimentali: verificata l'indipendenza degli scarti

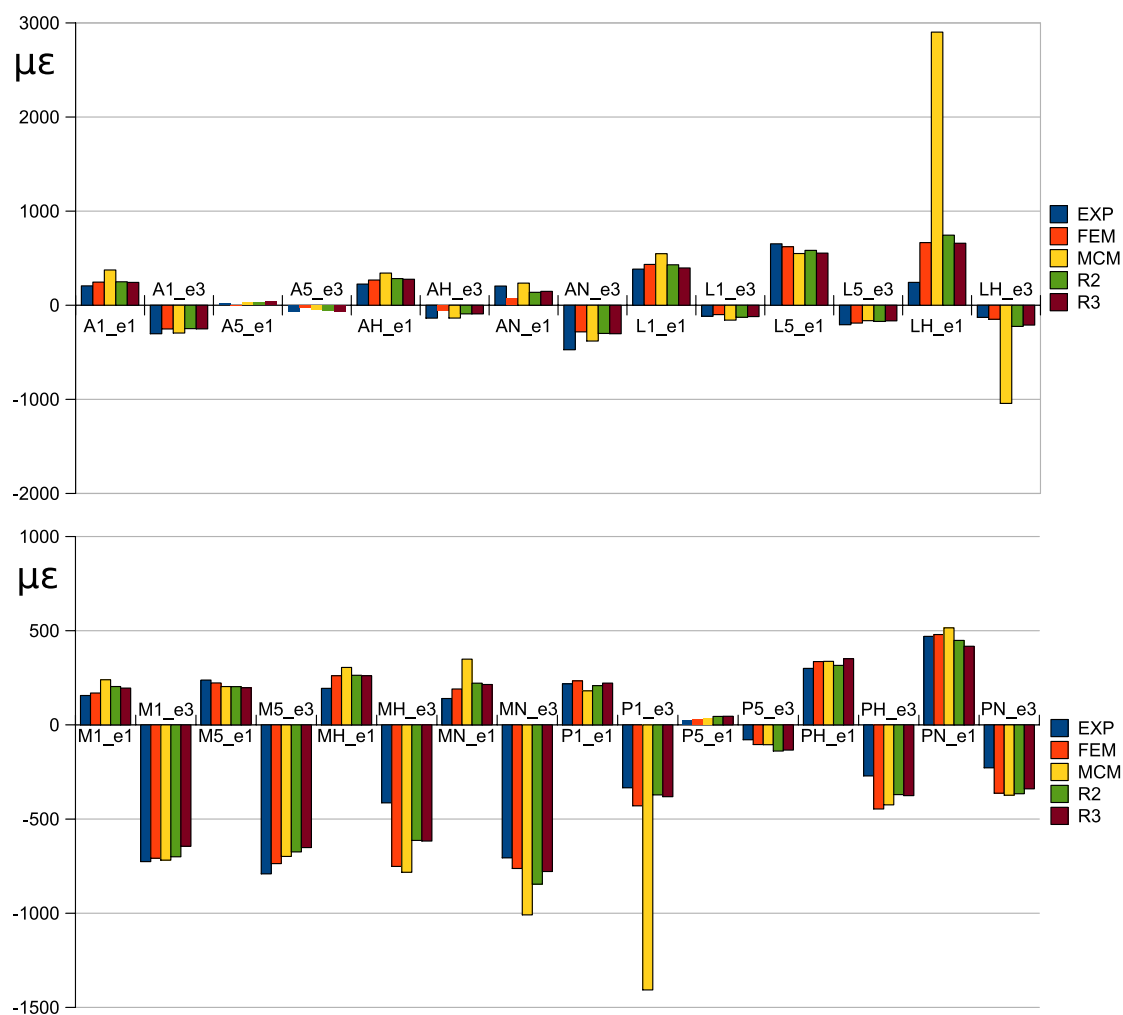


Figura 6.8. Valori di deformazione nel femore 2501 per la condizione di carico “neutral”: per ogni deformazione sono riportate nell’ordine: il valore sperimentale, la predizione FEM, la predizione MCM puntuale, le predizioni MCM mediate con raggio pari, rispettivamente, a 3 e a 5 mm.

fra predizioni e misure sia dalle condizioni di carico che dall’esemplare di femore (ANOVA fattoriale, $p\text{-value} > 0.05$), predizioni e misure sono state analizzate nel loro insieme, valutando i parametri di accuratezza a livello aggregato.

La retta di regressione delle predizioni MCM rispetto alle misure sperimentali (con pendenza prossima all’unità, intercetta prossima allo zero e coefficiente R^2 pari a 0.94) manifesta l’elevata correlazione tra predizioni e misure sperimentali. Gli indicatori di accuratezza globale sono risultati essere soddisfacenti, essendo

il valore di errore massimo pari al 47.77% e l'errore quadratico medio pari al 7.92 %. Come riportato in tabella (6.1), questi elementi di valutazione dell'accuratezza

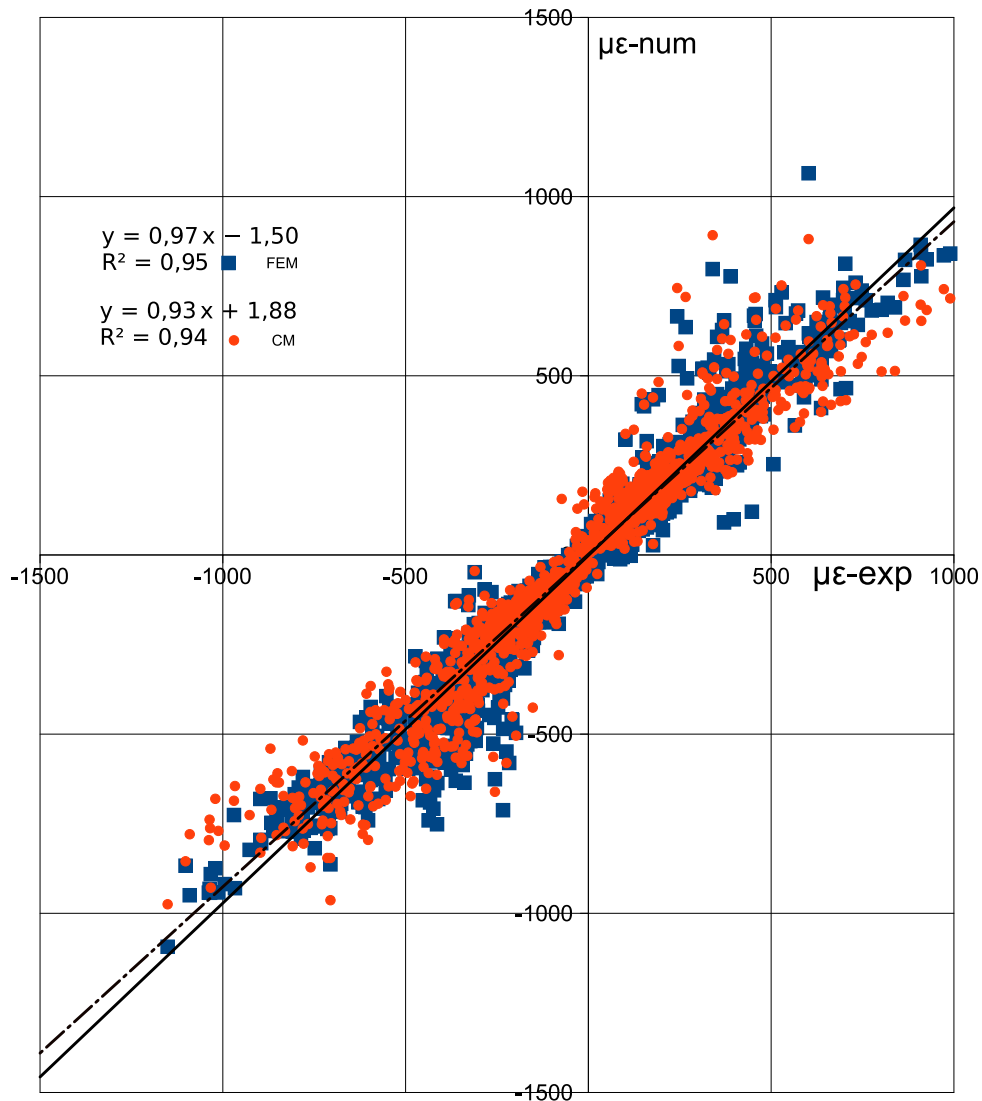


Figura 6.9. Valori principali di deformazione sperimentali (asse x) e numerici (asse y) ottenuti con i modelli MCM e FEM: valori aggregati per tutti gli 8 femori e tutte le 6 condizioni di carico

ratezza delle predizioni del modello MCM sono risultati paragonabili ai valori caratterizzanti le predizioni dei modelli FEM di riferimento

strain correlation	MCM	FEM
R^2	0.94	0.95
pendenza	0.93	0.97
intercetta	1.88	-1.50
RMSE	91.16	83.11
RMSE %	7.92%	7.22%
Max. err.	552.31	478.75
Max. err. %	47.99%	41.59%

Tabella 6.1. Parametri della retta di regressione e valori degli indicatori di accuratezza per le predizioni MCM e FEM: dati aggreganti i valori relativi a tutti i femori in tutte le condizioni di carico

Nei grafici delle figure (6.11) e (6.12) sono riportati, a titolo di esempio, i confronti predizioni–misure nelle varie condizioni di carico relativamente ad uno dei femori in esame che, per il suo carattere di generalità nel risultato dell’analisi, assume in questo ambito valore paradigmatico come caso di riferimento per le considerazioni sulle prestazioni del modello MCM.

L’analisi delle singole condizioni di carico riportate in figura (6.11), unitamente all’analisi per canale di acquisizione (i valori per alcuni singoli estensimetri sono riportati in figura 6.12) evidenzia da un lato una ricorrente elevata correlazione tra predizioni e misure sperimentali dall’altro una variazione dei coefficienti angolari delle rette di regressione.

Queste osservazioni autorizzano ad affermare che il modello MCM sia in grado di identificare bene la realtà sperimentale e che variazioni dei coefficienti angolari delle rette di regressione possano venire attribuite ad un difetto nella definizione delle proprietà materiali, imputabile a due fattori:

- gli artefatti dell’acquisizione CT (la risoluzione finita e non isotropa del dataset produce noti effetti cosiddetti di “volume parziale”);
- la non propria assunzione di comportamento isotropo del materiale, legata all’assenza di metodi utilizzabili generali ed accurati per la caratterizzazione dell’anisotropia dell’osso: l’accertata anisotropia sia materiale che di struttura, viene riprodotta con una disomogeneità spaziale di modulo di elasticità sia nel modello MCM che nel modello FEM.

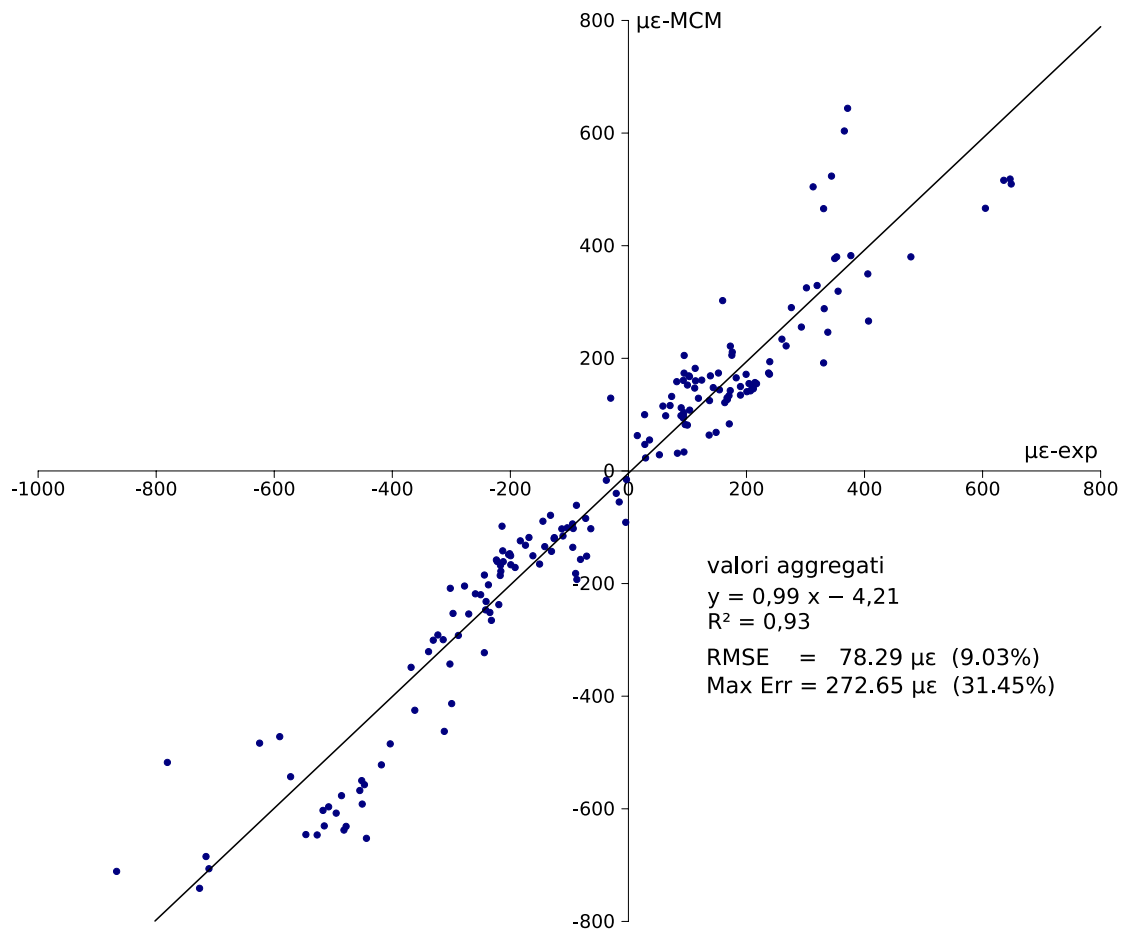


Figura 6.10. Femore 2506: rappresentazione aggregata delle deformazioni principali (predette vs sperimentali) per le varie condizioni di carico

6.4 Comparazione sistematica con modello FEM di riferimento

Al fine di approfondire il comportamento del modello MCM, è stato disposto un confronto puntuale tra un modello MCM riproducente uno dei femori in una delle configurazioni di carico e il corrispondente modello FEM.

Il confronto indaga il comportamento relativo tra i due modelli, confronto nel quale il FEM è assunto come riferimento non già quale “soluzione esatta” quanto piuttosto come migliore strumento validato attualmente disponibile nel riprodurre numericamente le misure sperimentali. Va anticipato che la valutazione del comportamento relativo del modello MCM rispetto al FEM deve tenere presente,

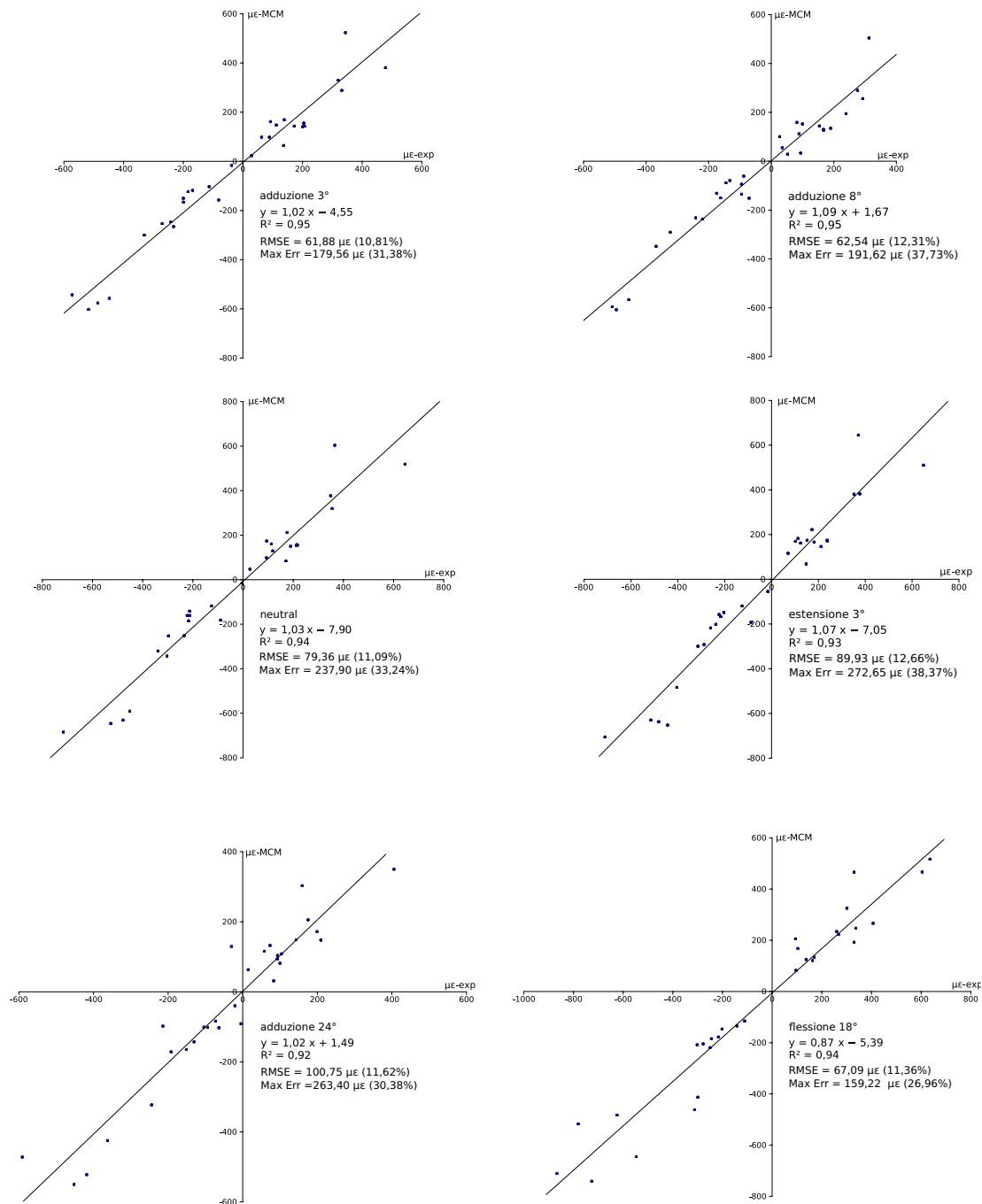


Figura 6.11. Valori principali di deformazione predetti e misurati nelle singole configurazioni di carico

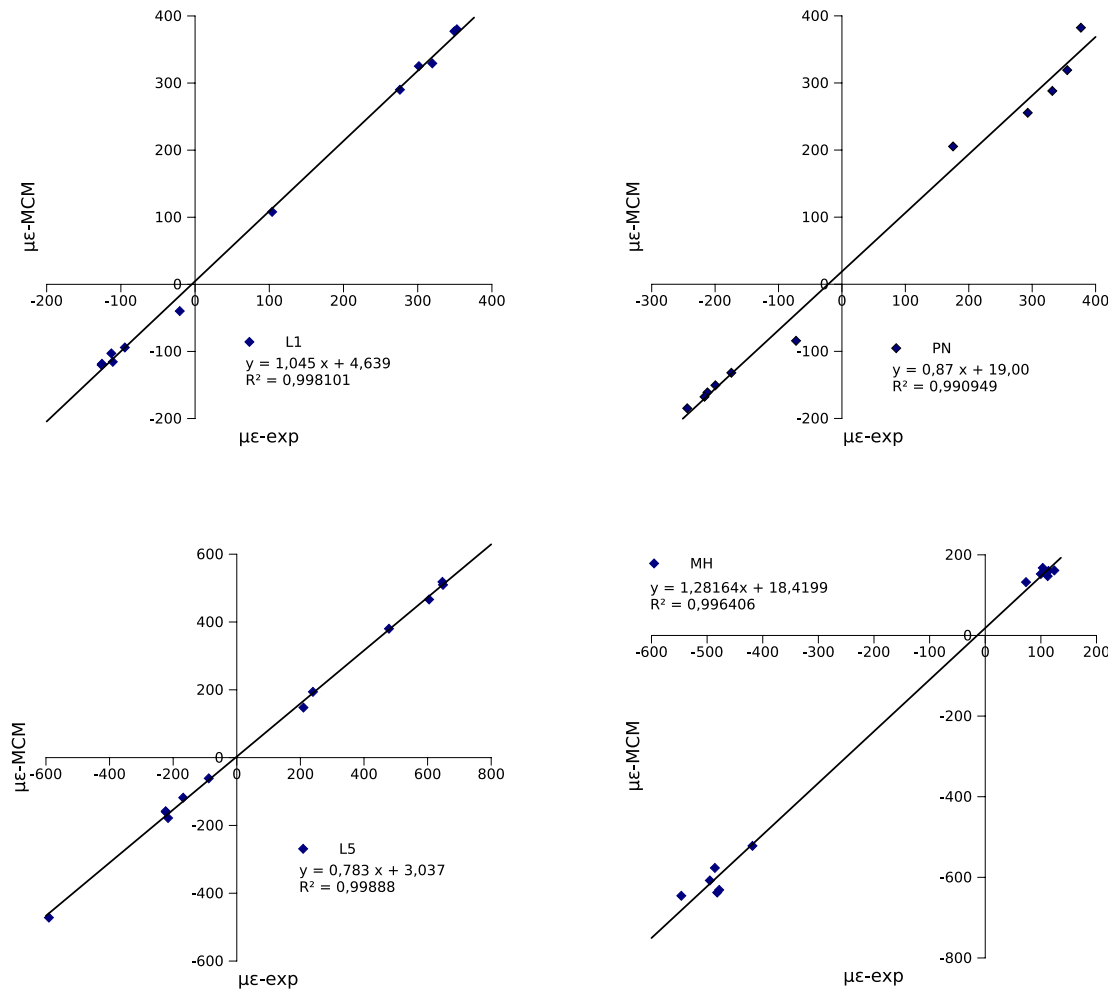


Figura 6.12. Valori principali di deformazione predetti e misurati nelle varie configurazioni di carico in alcuni singoli canali di acquisizione

quindi, quale sia il margine di “precisione” appurato nella validazione della modellazione FEM assunta a riferimento.

Oggetto del confronto sono i valori principali di deformazione calcolati ai centri degli elementi del dal modello FEM replicante la configurazione di carico “neutral” del femore identificato come 2501.

Essendo i due modelli registrati spazialmente rispetto al medesimo riferimento, la procedura di confronto ha previsto:

- individuazione delle coordinate del centroide dell’elemento;

- l'individuazione del voxel del modello MCM corrispondente al centroide considerato;
- definizione della funzione di interpolazione trilineare dei valori delle componenti di spostamento ai vertici del voxel;
- calcolo dei valori principali del tensore di deformazione per derivazione della funzione di interpolazione.

Questa procedura non è stata estesa a tutti gli elementi del modello FEM, essendo stati dal confronto esclusi alcuni elementi per i quali l'indagine non risultava essere significativa: sono stati esclusi, nel dettaglio:

- gli elementi con centroide distante meno di un diametro femorale dalla base di incastro (diametro valutato all'imposta dell'incastro): in questa zona si hanno infatti fenomeni locali non significativi ai fini del confronto, verificata la coerenza globale tra i due modelli in termini di campo di spostamenti;
- gli elementi di superficie del canale endostale del femore: in questa zona gli elementi del modello FEM hanno inferiore qualità, posizionamento spesso approssimativo, e dimensione eccessiva per riprodurre con accuratezza la reale superficie interna dell'osso; questo fatto è primariamente dovuto alla minore accuratezza del processo di segmentazione del canale. Insieme a ciò, l'elevata curvatura della superficie rende maggiormente difficoltosa la creazione di elementi di buona qualità nel descrivere la superficie, a meno di non fare ricorso ad elementi di dimensione ridotta: questa soluzione non si rende però necessaria atteso il modesto contributo che questi elementi forniscono al comportamento globale del modello, essendo posizionati in una zona che, per le configurazioni di carico in esame, risulta scarsamente sollecitata. L'insieme di questi fattori fa sì che molti di questi elementi abbiano il centroide collocato all'esterno del segmento osseo, producendo quindi confronti privi di significato;
- gli elementi prossimi al punto di applicazione del carico, a distanza di meno di 15 mm da esso.

La valutazione comparativa tra MCM e FEM ha considerato la differenza in valore assoluto tra i valori principali corrispondenti calcolati dai due modelli riferita al valore predetto dal FEM:

$$\delta = \frac{|\varepsilon_{MCM}^i - \varepsilon_{FEM}^i|}{\varepsilon_{FEM}^i} \quad (6.6)$$

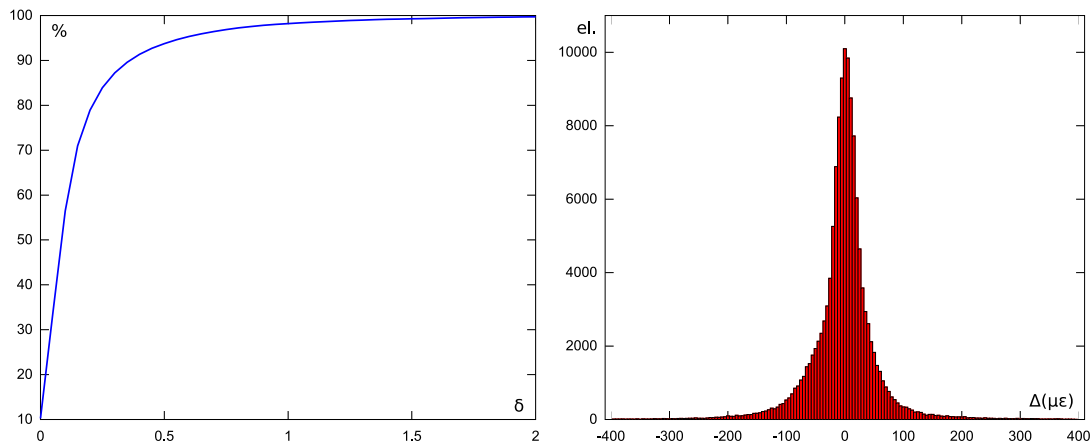


Figura 6.13. Confronto tra i valori principali di deformazione ai centroidi del modello FEM: a sinistra è rappresentato il diagramma cumulativo della frequenza dell'errore percentuale delle predizioni MCM rispetto ai valori FEM; a destra riportata la distribuzione delle differenze con segno

Il grafico di figura (6.13) rappresenta il diagramma cumulativo della frequenza di δ : si evince una sostanziale concordanza tra i due modelli, espressa dal fatto che circa il 60% dei valori ha uno scarto percentuale dai valori FEM entro il 10%; entro uno scarto del 50% è compreso il 92.30% dei valori confrontati.

Il primo di questi due dati assume particolare rilievo se si considera che lo scarto rispetto al FEM è dell'ordine dell'errore che caratterizza le predizioni FEM rispetto alle misure sperimentali. In altre parole entro questo scarto, non è dato di sapere quale tra i due modelli (FEM e MCM) sia il più coerente con la realtà sperimentale.

Le differenze nei valori che caratterizzano l'8% dei confronti possono essere ragionevolmente imputate a tre fattori principali:

- un primo elemento di "disturbo" è rappresentato dall'errore di posizionamento che caratterizza il modello FEM rispetto al riferimento del dataset CT: questo fatto origina in fase di segmentazione quando viene definita la superficie tassellizzata del segmento osseo, poi oggetto di descrizione matematica tramite patch di superfici NURBS. Al termine di questa procedura il posizionamento del modello è a meno di un pixel (nel piano) rispetto al dataset CT, che costituisce invece il riferimento nativo del modello MCM. Questo fatto può quindi generare un errore di "lettura delle informazioni", fatto particolarmente influente nelle regioni di confine;

- I due modelli hanno risoluzioni non confrontabili: il modello MCM è costruito alla risoluzione nativa del dataset, laddove il modello FEM è caratterizzato da elementi di dimensione variabile (tendenzialmente crescente dalla superficie all'interno): gli elementi del modello FEM mediano informazioni materiali (HU e quindi E associati ai punti contenuti) su un volume di dimensioni consistenti, laddove il calcolo attuato dall'MCM considera valori nodali alla risoluzione nativa (valori del polo e dei 6 satelliti). Nelle regioni di tessuto spongioso, il tessuto osseo, organizzato in strutture denominate trabecole, è caratterizzato da un'elevata porosità che, anche laddove abbia scala inferiore alla risoluzione del dataset, determina comunque valori locali delle proprietà meccaniche ridotti, con conseguente sovrastima locale delle deformazioni nel modello MCM. Va a tale proposito rilevato come, al di là del confronto in oggetto, la procedura MCM possa paradossalmente essere più pertinente al vero quando predica localmente, nelle regioni a minore densità puntuale, maggiori deformazioni: il modello MCM non discrimina in maniera dicotomica l'osso dal "non osso", ma piuttosto mappa delle proprietà materiali (la densità, il modulo di elasticità, ...) sui punti della griglia prodotta dal dataset CT, vedendo lo spazio come un continuum descritto puntualmente;
- il confronto puntuale mette in relazione informazioni puntuali estratte da due entità geometriche (il tetraedro e il voxel) di dimensioni ed estensione spesso molto differenti tra loro: se gli elementi del tetraedro (in superficie) hanno lato medio di 3 mm e risultano a forma regolare, il voxel da cui viene estratta l'informazione di deformazione nel modello MCM ha lato pari a 0.59 mm e altezza variabile tra 1.3 mm nella regione prossimale e 5 mm nella regione dello stelo. Questo fatto, rende peraltro impossibile attuare la strategia di mediazione sui voxel limitrofi descritta per il confronto con i dati sperimentali, poiché non sussiste, in termini generali, conformità geometrica tale da poter guidare la selezione dei voxel prossimi.

Queste considerazioni circa la natura locale delle differenze nelle predizioni delle deformazioni sono avvalorate dal confronto del modulo degli spostamenti ai nodi, illustrato in termini relativi, nel grafico di figura (6.14), nel quale si evince come i due modelli siano coerenti.

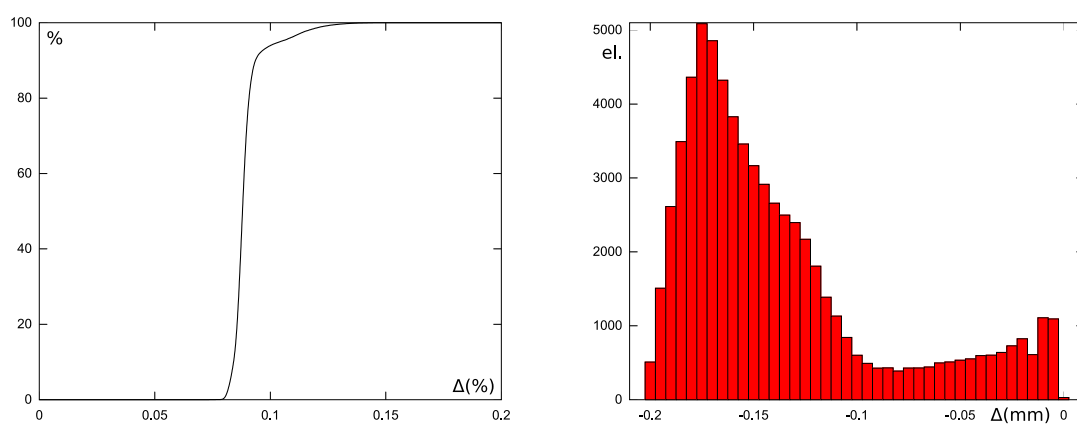


Figura 6.14. Distribuzione delle differenze nel modulo degli spostamenti: a sinistra è riportata la distribuzione cumulata dello scarto percentuale riferito al valore del FEM $\frac{|u_{MCM}| - |u_{FEM}|}{|u_{FEM}|}$; a destra è riportata la distribuzione delle differenze con segno $|u_{MCM}| - |u_{FEM}|$

Conclusioni

I modelli numerici tridimensionali *subject specific*, costruiti a partire da dataset di immagini medicali, possono costituire uno strumento accurato di predizione del rischio di frattura dei segmenti ossei. Ad oggi è stata affinata una metodologia di modellazione basata sul Metodo degli Elementi Finiti (FEM): la procedura richiede la precisa definizione topologica della superficie di contorno del segmento osseo e con un processo di modellazione complesso composto da differenti fasi (scontornamento, descrizione matematica delle superfici di confine, generazione della mesh e mappatura delle proprietà materiali) non tutte completamente automatizzate.

Benché questa procedura abbia dimostrato di poter ottenere un'elevata accuratezza nella predizione delle deformazioni di segmenti ossei *in vitro*, la sua applicabilità in ambito clinico risulta ancora limitata a causa della sua complessità: la generazione di un modello completo a partire dai dati delle immagini diagnostiche richiede infatti un notevole impegno sia in termini di tempo richiesto (tipicamente alcuni giorni) che di competenze specialistiche continuativamente dedicate ad ogni singolo studio, fatto che rende praticamente impossibile una sua applicazione su vasta scala con tempi contenuti.

Scopo della tesi era l'esplorazione di un approccio di modellazione alternativo, in grado di conservare i requisiti di robustezza, accuratezza e generalità, ma caratterizzato da un maggiore grado di automazione, in grado cioè di approntare e completare un'analisi con il minimo grado possibile di intervento specializzato. L'indagine si è concentrata su implementazioni innovative del Metodo delle Celle (CM), un metodo numerico basato sulla formulazione discreta diretta delle equazioni dei campi fisici: l'uso di variabili globali riferite agli elementi (spaziali e temporali) di due complessi di celle (primale e duale) porta alla scrittura delle equazioni di campo direttamente nella loro forma algebrica. La scelta di concentrare lo studio sul Metodo delle Celle è legata a più fattori: da un lato alcuni elementi caratterizzanti il CM (semplicità concettuale e implementativa, attitudine ad affrontare sistemi geometricamente complessi e disomogenei, assenza di singolarità prodotte da sorgenti o da vincoli concentrati) lo rendono adatto alle

applicazioni nell'ambito della biomeccanica ortopedica; dall'altro vi è una concordanza concettuale tra la filosofia dell'approccio discreto e la natura dell'informazione usata per la costruzione dei modelli numerici; in ultima analisi il CM aveva manifestato di poter rendere accessibili alcuni strumenti (quali la formulazione quadratica con ordine di convergenza nativamente pari a 4 e un approccio meshless di semplice formulazione) tali da costituire a priori motivo di interesse e ragione di studio in un'ottica non già solamente accademica quanto piuttosto pratica e applicativa.

Lo studio ha dapprima sviluppato l'estensione della formulazione quadratica ai problemi scalari e vettoriali tridimensionali; la sua applicazione alla soluzione numerica dell'equazione di Laplace e alla soluzione di problemi di elasticità lineare ha confermato quanto già registrato nel caso bidimensionale relativamente ai problemi scalari: un'opportuna costruzione del complesso duale consente al CM di ottenere nativamente ordini di convergenza superiori a quanto teoricamente previsto per il FEM nella sua formulazione ordinaria; ciononostante in entrambi i casi le soluzioni sono risultate del tutto confrontabili con quelle ottenute da implementazioni FEM di codici commerciali avanzati, rendendo i risultati significativi dal punto di vista teorico, ma non utili sotto il profilo applicativo; in mancanza di una maggiore precisione numerica ottenibile a parità di dimensione computazionale del problema, prevalgono i vantaggi costituiti da un metodo di consolidata applicazione per il quale è disponibile una varietà di strumenti di gestione e di calcolo evoluti e affidabili.

Il secondo ambito di indagine ha riguardato lo sviluppo di implementazioni meshless del CM, approcci nei quali la soluzione viene calcolata in punti tra i quali non è richiesta la definizione di una connettività a livello globale. Sono stati sviluppati, nella loro impostazione formale e implementativa, tre differenti approcci: questi approcci hanno in comune il fatto di scrivere l'equazione di bilancio con riferimento a regioni tributarie definite localmente nodo per nodo. La prima delle ipotesi proposte usa un complesso locale di celle primali definito attorno ad ogni nodo esaminato: le celle locali sono usate sia per definire la regione tributaria che per il calcolo, cella per cella, dei termini di flusso coinvolti nel bilancio di nodo. Negli altri due approcci la regione tributaria è assunta come una figura geometriche di forma elementare; il campo incognito è approssimato nell'intorno di ogni nodo tramite una funzione analitica che interpola i valori (incogniti) del nodo in esame e di un gruppo di nodi circostanti; due ipotesi sono state esplorate circa la funzione interpolante: i polinomi ordinati di grado parziale uniforme e le funzioni di base radiale.

Le formulazioni di questi approcci sono state verificate con dei test numerici di confronto con le soluzioni teoriche sia relativamente ai campi scalari (soluzione dell'equazione di Laplace) che relativamente al problema di elasticità lineare in

regime di piccoli spostamenti (problema della trave di Timoshenko). I tre metodi sono stati poi valutati nella prospettiva applicativa della realizzazione di un modello numerico automaticamente costruito sui dati CT: l'approccio basato sull'interpolazione con funzioni di base radiale ha incontrato ostacoli di carattere computazionale dovuti alla significativa complessità algebrica dell'espressione analitica dell'equazione di bilancio; questo approccio è stato quindi escluso non essendo compatibile con le risorse algoritmiche dei software di Computer Algebra System disponibili. Parimenti escluso è stato l'approccio basato sull'approssimazione mediante polinomi di grado parziale uniforme rispetto alle coordinate: il fatto di avere i nodi disposti su una griglia regolare produceva infatti malcondizionamenti nella matrice di interpolazione per bassi gradi del polinomio, laddove, per gradi più elevati, si realizzava un'estrema complessità formale unitamente all'asimmetria della distribuzione dei punti attorno ad ogni nodo di volta in volta esaminato.

La formulazione meshless basata sulla definizione di un complesso locale di celle primali si è invece rilevata adatta e di implementazione immediata: una mesh locale di tetraedri viene definita per ogni punto del dataset CT con i nodi primi vicini nell'allineamento di griglia; l'attribuzione delle proprietà materiali avviene direttamente dalle informazioni del dataset e l'imposizione delle condizioni di vincolo e di carico risulta immediata.

L'applicabilità di questo approccio (denominato Meshless Cell Method, MCM) è stata verificata replicando una prova sperimentale di carico su un segmento di femore in vitro. Il modello è stato costruito su un dataset CT sottocampionato (per ragioni di risorse computazionali disponibili) del campione osseo registrato rispetto al riferimento sperimentale; i valori principali di deformazione registrati in 13 siti anatomici significativi in 5 distinte configurazioni di carico in regime elastico sono state lo strumento di valutazione. Confrontando i valori ottenuti con il modello MCM nei punti corrispondenti alla posizione degli strumenti, si è verificata una elevata correlazione ($R^2 = 0.85$) delle predizioni; il coefficiente angolare della retta di regressione (valori numerici – valori sperimentali) è risultato pari a 1.21 con intercetta pari a $36 \mu\epsilon$; lo scarto quadratico medio rispetto alle misure sperimentali è risultato pari al 16%, con un valore massimo pari al 35.5%. Verificatane l'applicabilità, la modellazione MCM è stata validata rispetto alle misure sperimentali di deformazione di prove meccaniche in campo elastico condotte su 4 paia di femori in vitro. Misure di deformazione in 16 distinti siti anatomici e in 6 differenti configurazioni di sollecitazione hanno costituito l'elemento di valutazione della precisione del metodo nell'identificare la realtà sperimentale. I modelli MCM di ciascun femore sono stati costruiti sui corrispondenti dataset CT a risoluzione nativa densitometricamente calibrati. L'analisi aggregata ha confermato la buona capacità dell'MCM nel replicare le misure sperimentali: il coefficiente di correlazione tra valori predetti e valori sperimentali è risultato

elevato ($R^2 = 0.94$), la retta di regressione con pendenza pari a 0.93 e intercetta pari a $1.88 \mu\epsilon$, avendosi uno scarto quadratico medio pari del 7.92% e un valore di picco pari al 48%. Questi valori sono risultati del tutto paragonabili a quelli ottenuti dalle analisi FEM associate alle misure sperimentali.

Per comprendere il comportamento del modello MCM rispetto al metodo FEM di riferimento è stato approntato un confronto sistematico con uno dei modelli FEM: l'analisi è avvenuta comparando gli spostamenti ed i valori principali di deformazione ai centroidi degli elementi del modello FEM con i valori calcolati dal modello MCM nei punti corrispondenti. L'analisi aggregata ha dimostrato una piena corrispondenza tra i due modelli: nel dettaglio la concordanza nella definizione del campo di spostamenti avvalora l'ipotesi che la minima dispersione nei valori principali di deformazione sia imputabile alla differente scala di dettaglio con cui i due modelli sono definiti: il modello MCM a coglie infatti le proprietà materiali con la risoluzione nativa dell'acquisizione CT (pixel pari a $0.57 \mu m$) laddove il modello FEM è costruito con elementi di dimensione media dell'ordine del millimetro.

Lo studio ha individuato dunque un processo di modellazione numerica di segmenti ossei caratterizzato da un elevato grado di automaticità: il modello numerico viene costruito direttamente sul dataset CT in maniera indipendente dallo specifico segmento osseo rappresentato; la procedura non richiede alcuna manipolazione e si è dimostrato poter ottenere accuratissime nella replicazione delle misure sperimentali in vitro assolutamente concordi con quelle della procedura FEM di riferimento. Sebbene la dimensione computazionale dei modelli sia significativamente maggiore di quella dei corrispondenti modelli FEM (in virtù dell'utilizzo della risoluzione nativa dei dataset CT) e sebbene quindi il tempo di calcolo di ogni singolo modello sia dell'ordine delle ore, va rilevato come l'elevata automaticità del processo rappresenti comunque un progresso relativamente all'applicazione su vasta scala: l'impostazione di un calcolo richiede infatti poche elementari operazioni (selezione della regione di interesse e imposizione di carichi e vincoli) che necessitano di pochi minuti di lavoro di un operatore essendo il resto del processo (costruzione, assemblaggio e soluzione del sistema lineare risolvibile) completamente autonomo; per contro un'analisi FEM, computazionalmente molto più leggera e di calcolo molto più rapido, necessita di una complessa fase di pre-processing che richiede un impegno qualificato continuativo, fatto che limita intrinsecamente il numero di analisi approntabili da uno stesso operatore in un dato tempo.

Oltre alla validazione del modello MCM, l'elaborato ha maturato alcuni risultati di carattere teorico nello sviluppo del Metodo delle Celle: l'estensione ai problemi scalari e vettoriali tridimensionali con interpolazione quadratica, ha confermato come il CM possa ottenere ordini di precisione e convergenza paragonabili con

quelli ottenibili da sofisticati codici commerciali implementanti il FEM; sono poi stati sviluppati e verificati alcuni approcci meshless per la soluzione di problemi bidimensionali scalari e vettoriali che, conservando i vantaggi dell'assenza della creazione di una mesh, superano alcuni limiti che caratterizzano molte delle formulazioni analoghe in ambito differenziale.

Bibliografia

- [1] Mark S. Shephard. Update to: Approaches to the automatic generation and control of finite element meshes. *Appl Mech Rev, ASME*, 49(10):S5–S14, October 1996.
- [2] P. L. George. *Automatic Mesh Generation: Application to Finite Element Methods*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1991.
- [3] D. Testi, M. Viceconti, A. Cappello, and S. Gnudi. Prediction of hip fracture can be significantly improved by a single biomedical indicator. *Ann Biomed Eng*, 30(6):801–7, 2002.
- [4] M. C. Hobatho, R. Darmana, P. Pastor, J. J. Barrau, S. Laroze, and J. P. Morucci. Development of a three-dimensional finite element model of a human tibia using experimental modal analysis. *J Biomech*, 24(6):371–83, 1991.
- [5] Jean-Daniel Boissonnat and Bernhard Geiger. Three-dimensional reconstruction of complex shapes based on the delaunay triangulation. volume 1905, pages 964–975. SPIE, 1993.
- [6] William E. Lorensen and Harvey E. Cline. Marching cubes: A high resolution 3d surface construction algorithm. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, 21(4):163–169, 1987.
- [7] D. Taylor and J. H. Kuiper. The prediction of stress fractures using a ‘stressed volume’ concept. *J Orthop Res*, 19(5):919–26, 2001.
- [8] M. J. Ciarelli, S. A. Goldstein, J. L. Kuhn, D. D. Cody, and M. B. Brown. Evaluation of orthogonal mechanical properties and density of human trabecular bone from the major metaphyseal regions with materials testing and computed tomography. *J. Orthop. Res.*, 9(5):674–82, 1991.
- [9] R. J. McBroom, W. C. Hayes, W. T. Edwards, R. P. Goldberg, and A. A. White. Prediction of vertebral body compressive fracture using quantitative computed tomography. *J. Bone Joint Surg. Am.*, 67(8):1206–14, 1985.
- [10] T. S. Keller. Predicting the compressive mechanical behavior of bone. *Journal of Biomechanics*, 27(10):1159–68, 1994.
- [11] D. R. Carter and W. C. Hayes. The compressive behavior of bone as a two-phase porous structure. *J. Bone Joint Surg. Am.*, 59(7):954–62, 1977.

- [12] J. C. Rice, S. C. Cowin, and J. A. Bowman. On the dependence of the elasticity and strength of cancellous bone on apparent density. *J. Biomech.*, 21(2):155–68, 1988.
- [13] Dianna D. Cody, Fu J. Hou, George W. Divine, and David P. Fyhrie. Femoral structure and stiffness in patients with femoral neck fracture. *Journal of Orthopaedic Research*, 18(3):443–448, 2000.
- [14] K. J. Bozic, J. H. Keyak, H. B. Skinner, H. U. Bueff, and D. S. Bradford. Three-dimensional finite element modeling of a cervical vertebra: an investigation of burst fracture mechanism. *J Spinal Disord*, 7(2):102–10, 1994.
- [15] J. C. Lotz, E. J. Cheal, and W. C. Hayes. Fracture prediction for the proximal femur using finite element models: Part i–linear analysis. *Journal Of Biomechanical Engineering*, 113(4):353–360, 1991.
- [16] M. Dalstra, R. Huiskes, and L. van Erning. Development and validation of a three-dimensional finite element model of the pelvic bone. *Journal Of Biomechanical Engineering*, 117(3):272–278, 1995.
- [17] A. A. Edidin. *Modeling the distribution of bone moduli in bone-implant systems*. Cornell University, Ithaca, NY, 1991.
- [18] B. Merz, P. Niederer, R. Muller, and P. Rueggsegger. Automated finite element analysis of excised human femora based on precision -qct. *J. Biomech. Eng.*, 118(3):387–90, 1996.
- [19] P. M. Cattaneo, M. Dalstra, and L. H. Frich. A three-dimensional finite element model from computed tomography data: a semi-automated method. *Proc Inst Mech Eng H*, 215(2):203–13, 2001.
- [20] S. A. Marom and M. J. Linden. Computer aided stress analysis of long bones utilizing computed tomography. *J Biomech*, 23(5):399–404, 1990.
- [21] C. Zannoni, R. Mantovani, and M. Viceconti. Material properties assignment to finite element models of bone structures: a new method. *Med Eng Phys.*, 20(10):735–40., 1998.
- [22] T. V. Nguyen, J. R. Center, and J. A. Eisman. Femoral neck bone loss predicts fracture risk independent of baseline bmd. *J Bone Miner Res*, 20(7):1195–201, 2005.
- [23] E. F. Morgan, H. H. Bayraktar, O. C. Yeh, S. Majumdar, A. Burghardt, and T. M. Keaveny. Contribution of inter-site variations in architecture to trabecular bone apparent yield strains. *J Biomech*, 37(9):1413–20, 2004.
- [24] Marco Viceconti and Fulvia Taddei. Automatic generation of finite element meshes from computed tomography data. *Critical reviews in biomedical engineering*, 31(1-2):27–72, 2003.
- [25] T. McInerney and D. Terzopoulos. Topology adaptive deformable surfaces for medical image volume segmentation. *IEEE Trans Med Imaging*, 18(10):840–50, 1999.

- [26] L. Mosekilde, S. M. Bentzen, G. Ortoft, and J. Jorgensen. The predictive value of quantitative computed tomography for vertebral body compressive strength and ash density. *Bone*, 10(6):465–70, 1989.
- [27] C. Bergot, V. Bousson, A. Meunier, M. Laval-Jeantet, and J. D.Laredo. Hip fracture risk and proximal femur geometry from dxa scans. *Osteoporosis International*, 13(7):542–550, July 2002.
- [28] E. M. Lochmuller, O. Groll, V. Kuhn, and F. Eckstein. Mechanical strength of the proximal femur as predicted from geometric and densitometric bone properties at the lower limb versus the distal radius. *Bone*, 30(1):207–16, 2002.
- [29] M. E. Taylor, K. E. Tanner, M. A. Freeman, and A. L. Yettram. Stress and strain distribution within the intact femur: compression or bending? *Med Eng Phys*, 18(2):122–31, 1996.
- [30] Enzo Tonti. A direct discrete formulation of field laws: The cell method. *CMES*, 2(2):237–258, 2001.
- [31] Francesco Cesari. *Calcolo matriciale delle strutture*, volume 2. Pitagora Editrice Bologna, 1997.
- [32] L. B. Lucy. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *Astronomical Journal*, 82:1013–1024, December 1977.
- [33] J. J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 30(1):543–574, 1992.
- [34] Q. Lin and J. Rokne. Construction and analysis of meshless finite difference methods. *Computational Mechanics*, 37(3):232–248, February 2006.
- [35] Villon P. Nayroles B., Touzot G. Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements. *Journal Computational Mechanics*, 10(5):307–318, September 1992.
- [36] T. Belytschko, Y. Y. Lu, and L. Gu. Element-free galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(2):229–256, 1994.
- [37] W. K. Liu and Y. Chen. Reproducing kernel particle methods. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 20:1081–1106, 1995.
- [38] J. M. Melenk and I. Babuska. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:289–314, 1996.
- [39] E. Onate, S. Idelsohn, O. C. Zienkiewicz, and R. L. Taylor. A finite point method in computational mechanics. applications to convective transport and fluid flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(22):3839–3866, 1996.
- [40] T. J. Liszka, C. A. M. Duarte, and W. W. Tworzydlo. hp-meshless cloud method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4):263 – 288, 1996.

- [41] N. Sukumar, B. Moran, and T. Belytschko. The natural element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43:839–887, 1998.
- [42] S. Shen S. N. Atluri. *The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method*. Tech Science Press, 2002.
- [43] T. Strouboulis, K. Copps, and I. Babuscaronka. The generalized finite element method: an example of its implementation and illustration of its performance. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(8):1401–1417, 2000.
- [44] Sergio R. Idelsohn, Eugenio Onate, Nestor Calvo, and Facundo Del Pin. The meshless finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58(6):893–912, 2003.
- [45] N. Sukumar, N. Moes, B. Moran, and T. Belytschko. Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(11):1549–1570, 2000.
- [46] Hui-Ping Wang and Dongdong Wang. Efficient meshfree computation with fast treatment of essential boundary conditions for industrial applications. *Journal of Engineering Mechanics*, 135(10):1147–1154, 2009.
- [47] S.R. Idelsohn, E. Onate, and F. Del Pin. The particle finite element method: a powerful tool to solve incompressible flows with free-surfaces and breaking waves. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61(7):964–989, 2004.
- [48] Sergio R. Idelsohn and Eugenio Onate. To mesh or not to mesh. that is the question... *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(37-40):4681 – 4696, 2006. John H. Argyris Memorial Issue. Part I.
- [49] Vinh Phu Nguyen, Timon Rabczuk, Stephane Bordas, and Marc Duflot. Meshless methods: A review and computer implementation aspects. *Mathematics and Computers in Simulation*, 79(3):763 – 813, 2008.
- [50] Yi-Je Lim and Suvranu De. Real time simulation of nonlinear tissue response in virtual surgery using the point collocation-based method of finite spheres. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(31-32):3011 – 3024, 2007. Computational Bioengineering.
- [51] Suvranu De, Jung Kim, Yi-Je Lim, and Mandayam A. Srinivasan. The point collocation-based method of finite spheres (pcmfs) for real time surgery simulation. *Computers & Structures*, 83(17-18):1515 – 1525, 2005. Advances in Meshfree Methods.
- [52] Irina Ionescu, James E. Guilkey, Martin Berzins, Robert M. Kirby, and Jeffrey A. Weiss. Simulation of soft tissue failure using the material point method. *Journal of Biomechanical Engineering*, 128(6):917–924, 2006.
- [53] Ken C.L. Wong, Linwei Wang, Heye Zhang, Huafeng Liu, and Pengcheng Shi. Meshfree implementation of individualized active cardiac dynamics. *Computerized Medical Imaging and Graphics*, 34(1):91 – 103, 2010.

Image-Guided Surgical Planning and Therapy.

- [54] Chun Yang, Dalin Tang, Chun Yuan, William Kerwin, Fei Liu, Gador Canton, Thomas S. Hatsukami, and Satya Atluri. Meshless generalized finite difference method and human carotid atherosclerotic plaque progression simulation using multi-year mri patient-tracking data. *CMES*, 28(2):95–108, 2 2008.
- [55] Ashley Horton, Adam Wittek, and Karol Miller. Subject-specific biomechanical simulation of brain indentation using a meshless method, 2007.
- [56] E. Pena, M.A. Martínez, B. Calvo, and M. Doblaré. Application of the natural element method to finite deformation inelastic problems in isotropic and fiber-reinforced biological soft tissues. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(21-24):1983 – 1996, 2008.
- [57] H. Y. Wu K. M. Liew and T. Y. Ng. Meshless method for modeling of human proximal femur: treatment of nonconvex boundaries and stress analysis. *Computational Mechanics*, 28(5):390–400, May 2002.
- [58] M. Doblaré, E. Cueto, B. Calvo, M.A. Martínez, J.M. Garcia, and J. Cegonino. On the employ of meshless methods in biomechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(6-8):801 – 821, 2005.
- [59] James D. Lee, Youping Chen, Xiaowei Zeng, Azim Eskandarian, and Morton Oskard. Modeling and simulation of osteoporosis and fracture of trabecular bone by meshless method. *International Journal of Engineering Science*, 45(2-8):329 – 338, 2007.
- [60] Luigino Zovatto and Matteo Nicolini. Improving the convergence order of the meshless approach for the cell method for numerical integration of discrete conservation laws. *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 8(5):273 – 281, september 2007.
- [61] Enzo Tonti and Federica Zarantonello. Algebraic formulation of elastostatics: the cell method. *CMES*, 39(3):201–236, 2009.
- [62] S. P. Timoshenko and N. Godier. *Theory of Elasticity*. McGraw Hill, 3rd edition, 1987.
- [63] Charles E. Augarde and Andrew J. Deeks. The use of timoshenko’s exact solution for a cantilever beam in adaptive analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 44(9-10):595 – 601, 2008.
- [64] O. C. Zienkiewicz and Robert L. Taylor. *The Finite Element Method - Basic Concepts and Linear Applications*, volume 1. McGraw-Hill - London, iv edition, 1989.
- [65] Valeriano Comincioli. *Analisi Numerica Metodi Modelli Applicazioni*. MCGRAW-HILL, 1990.

- [66] Luigino Zovatto and Matteo Nicolini. Extension of the meshless approach for the cell method to three-dimensional numerical integration of discrete conservation laws. *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 7(2):69–79(11), 2006.
- [67] Charles A. Micchelli. Interpolation of scattered data: Distance matrices and conditionally positive definite functions. *Constructive Approximation*, 2(1):11–22, December 1986.
- [68] M. J. D. Powell. Radial basis functions for multivariable interpolation: a review. pages 143–167, 1987.
- [69] I. S. Raju, D. R. Phillips, and T. Krishnamurthy. A radial basis function approach in the meshless local petrov-galerkin method for euler-bernoulli beam problems. *Computational Mechanics*, 34(6):464–474, November 2004.
- [70] X. Zhang, K. Z. Song, M. W. Lu, and X. Liu. Meshless methods based on collocation with radial basis functions. *Computational Mechanics*, 26(4):333–343, October 2000.
- [71] Mehdi Tatari and Mehdi Dehghan. A method for solving partial differential equations via radial basis functions: Application to the heat equation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 34(3):206–212, March 2010.
- [72] Martin D. Buhmann. *Radial Basis Functions: Theory and Implementations*. Cambridge University Press, 2003. ISBN 978-0-521-63338-3.
- [73] M. D. Buhmann. Radial basis functions. *Acta Numerica*, 9(-1):1–38, 2000.
- [74] Frédéric Magoulès, Luis A. Diago, and Ichiro Hagiwara. Efficient preconditioning for image reconstruction with radial basis functions. *Advances in Engineering Software*, 38(5):320–327, May 2007.
- [75] J. Park and I. W. Sandberg. Universal approximation using radial-basis-function networks. *Neural Computation*, 3(2):246–257, 1991.
- [76] Fulvia Taddei, Martino Pani, Luigino Zovatto, Enzo Tonti, and Marco Viceconti. A new meshless approach for subject-specific strain prediction in long bones: Evaluation of accuracy. *Clinical Biomechanics*, 23(9):1192 – 1199, 2008.
- [77] Fulvia Taddei, Luca Cristofolini, Saulo Martelli, H.S. Gill, and Marco Viceconti. Subject-specific finite element models of long bones: An in vitro evaluation of the overall accuracy. *Journal of Biomechanics*, 39(13):2457 – 2467, 2006.
- [78] M. Viceconti, A. Toni, and A. Giunti. *Experimental Mechanics. Technology Transfer Between High Tech Engineering and Biomechanics*, chapter Strain guage analysis of hard tissues: factors influencing measurements. Elsevier, 1992.
- [79] G. Bergmann, G. Deuretzbacher, M. Heller, F. Graichen, A. Rohlmann, J. Strauss, and G. N. Duda. Hip contact forces and gait patterns from routine activities. *Journal of Biomechanics*, 34(7):859 – 871, 2001.

- [80] Debora Testi, Cinzia Zannoni, Angelo Cappello, and Marco Viceconti. Border-tracing algorithm implementation for the femoral geometry reconstruction. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 65(3):175 – 182, 2001.
- [81] Fulvia Taddei, Enrico Schileo, Benedikt Helgason, Luca Cristofolini, and Marco Viceconti. The material mapping strategy influences the accuracy of ct-based finite element models of bones: An evaluation against experimental measurements. *Medical Engineering & Physics*, 29(9):973–979, November 2007.
- [82] Willi A. Kalender, Dieter Felsenberg, Harry K. Genant, Manfred Fischer, Jan Dequeker, and Jonathan Reeve. The european spine phantom – a tool for standardization and quality control in spinal bone mineral measurements by dxa and qct. *European Journal of Radiology*, 20(2):83 – 92, 1995.
- [83] Elise F. Morgan, Harun H. Bayraktar, and Tony M. Keaveny. Trabecular bone modulus-density relationships depend on anatomic site. *Journal of Biomechanics*, 36(7):897 – 904, 2003.
- [84] Dieter Christian Wirtz, Norbert Schiffers, Thomas Pandorf, Klaus Radermacher, Dieter Weichert, and Raimund Forst. Critical evaluation of known bone material properties to realize anisotropic fe-simulation of the proximal femur. *Journal of Biomechanics*, 33(10):1325 – 1330, 2000.
- [85] Marco Viceconti, Sigbjorn Olsen, Lutz-P. Nolte, and Kim Burton. Extracting clinically relevant data from finite element simulations. *Clinical Biomechanics*, 20(5):451–454, June 2005.
- [86] Enrico Schileo, Fulvia Taddei, Andrea Malandrino, Luca Cristofolini, and Marco Viceconti. Subject-specific finite element models can accurately predict strain levels in long bones. *Journal of Biomechanics*, 40(13):2982 – 2989, 2007.
- [87] Enrico Schileo, Enrico Dall’Ara, Fulvia Taddei, Andrea Malandrino, Tom Schotkamp, Massimiliano Baleani, and Marco Viceconti. An accurate estimation of bone density improves the accuracy of subject-specific finite element models. *Journal of Biomechanics*, 41(11):2483 – 2491, 2008.
- [88] P. J. Besl and N. D. McKay. A method for registration of 3-d shapes. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14:239–256, 1992.