Ministero della Pubblica Istruzione

Direzione Generale Istruzione Classica Scientifica e Magistrale

Unione Matematica Italiana

L'INSEGNAMENTO DELLA GEOMETRIA

Seminario di formazione per Docenti

Scuole Medie Superiori

QUADERNI 19/2

Liceo Scientifico Statale
"A. Vallisneri"
Lucca

Novembre 1995 - Marzo 1996

Formazione Docenti

Quaderni ed Atti pubblicati dal Ministero della Pubblica Istruzione
Direttore: G. Trainito
Direttore editoriale: L. Catalano
Coordinatore editoriale: A. Portolano
Revisione scientifica: E. Bertonelli
Editing: P. Pedace, B. Ramundo, G. Rodano
Grafica: F. Panepinto

Nota editoriale
In questo quaderno sono raccolti i materiali che costituiscono lo specifico dei Seminari di formazione per Docenti degli Istituti afferenti alla Direzione classica, scientifica e magistrale.
Essi sono stati prodotti da corsisti e relatori nella forma finale, con la collaborazione scientifica del Comitato di redazione. Altri pur pregevoli contributi individuabili nel Programma non vengono qui raccolti, in quanto la loro ricaduta formativa si esplica in un ambito più generale e, pertanto, in tutto o in parte, sono già stati divulgati. Essi sono, comunque, disponibili presso la Direzione Generale dell'Istruzione Classica Scientifica e Magistrale.

Ministero della Pubblica Istruzione
Direzione Generale Istruzione
Classica Scientifica e Magistrale
Direzione Generale Istruzione di Primo Grado

Unione Matematica Italiana

L'INSEGNAMENTO DELLA GEOMETRIA

Seminario di formazione per
Docenti Scuole Medie Superiori

Liceo Scientifico Statale
"A. Vallisneri" - Lucca
Novembre 1995 - Marzo 1996

INDICE

IL RUOLO DELLA GEOMETRIA NELLA DIDATTICA DELLA SCUOLA SECONDARIA

Luigi Catalano
Dirigente Div. IV Direzione Classica, Scientifica e Magistrale, M.P.I.

«Non comunicare agli insegnanti un certo numero di processi e di ricette, ma dare loro una piena coscienza della propria funzione». Questa bella citazione di Émile Durkheim, – che ho letta in una delle tante e interessanti relazioni svolte durante i due Seminari dedicati alla geometria (e che costituiscono appunto la parte più rilevante dei due tomi del *Quaderno 19* – mi sembra sintetizzi felicemente il significato complessivo dei messaggi culturali e didattici emersi nel laboratorio di idee di Lucca.

Il *Quaderno 19*, secondo il consueto compito affidato a questa collana della Dirclassica, non contiene infatti ciò che tradizionalmente si intende per «atti» di un convegno, bensì gli strumenti che il sapiente coordinamento scientifico di Lucia Ciarrapico e di Claudio Bernardi ha identificato come più utili alla pratica del fare scuola. Questo non significa naturalmente che la nostra collana rinunzi ad apporti di livello alto per privilegiare solo la dimensione della quotidianità didattica. I *Quaderni* infatti hanno l'ambizione di coniugare una elaborazione rigorosa dei saperi con la loro ricaduta nei diversi gradi e livelli del processo di apprendimento/insegnamento.

Questa sintesi dialettica mi sembra ben perseguita nella scelta e nel taglio dei temi che di volta in volta contraddistinguono i corsi di aggiornamento organizzati dalla Dirclassica. La scelta dell'argomento coincide generalmente con la problematicità di alcune discipline: essa viene a ritrovarsi tanto nella trasformazione dello statuto epistemologico di ogni singola materia (un fenomeno intimamente legato alla processualità della storia umana), quanto nelle particolari difficoltà che – anche in questo – gli insegnanti possono incontrare nel trasmettere ed elaborare i contenuti disciplinari.

L'insegnamento della geometria rappresenta certamente uno di questi nodi problematici. La didattica di questa disciplina si è inserita in quel generale impulso all'insegnamento scientifico previsto dai programmi della scuola media e in quelli di non poche sperimentazioni della secondaria. L'integrazione tra matematica e scienza finisce non solo con l'esaltare il valore del metodo, ma soprattutto – dando un'immagine più compiuta e dunque più pertinente della disciplina – contribuisce all'equilibrio tra studi letterari e scientifici: un obiettivo che non a caso corrisponde a quella tensione al superamento della separazione tra le due culture che è tipica dei nostri tempi.

Molti degli interventi che qui vengono pubblicati si riferiscono a uno dei problemi più rilevanti del nostro sistema formativo: il raccordo, cioè, tra i diversi ordini di scuola. La questione della continuità infatti, se deve, come ovvio, tenere conto del differente livello di consapevolezza in allievi di età diversa, non può tuttavia non entrare nel merito della specificità dei contenuti, del rigore – pur processuale – della loro formulazione e della irrinunciabile finalità di arricchimento culturale: tre esigenze intrecciate tra loro, che costituiscono nel loro interagire sinergico, la cifra peculiare del fare scuola oggi.

Proprio muovendosi in una cornice siffatta, le relazioni dei due seminari lucchesi hanno dipanato il discorso geometrico nel registro grafico e verbale, insistendo in particolar modo sul problema didattico del nuovo modo di intendere la «dimostrazione». Lungo questa strada, è emersa con limpidezza la necessità di considerare – come ci suggerisce Thomas Kuhn, non a caso puntualmente citato in uno degli interventi – lo spessore particolare e gli inediti risvolti che oggi si vengono finalmente a stabilire nel rapporto tra scienza e storia. Al riguardo, anzi, la geometria presenta una sua peculiarità: essa ha iniziato a svilupparsi molto presto, ben prima del razionalismo euclideo, e offre pertanto lo *specimen* privilegiato per non ridurre ai canoni abituali (e abitudinari) il terreno fascinoso del rapporto tra sapere scientifico e l'avventura faticosa (ma esaltante) dell'uomo su questa nostra terra. Non per nulla, come osserva una delle relazioni, la geometria non si limita a una funzione di rappresentazione del reale, né si riduce alla soluzione dei problemi, ma rivive queste sue caratteristiche fontali nella perenne capacità di dar luogo a modelli matematici in grado di vivere nella storia contribuendo a darle senso.

L'augurio è che il dibattito dei due seminari lucchesi, così densi di stimoli e suggestioni, possa suscitare nel grande mondo della scuola una discussione aperta e fruttuosa.

IL VALORE STRATEGICO DI UNA INTESA

Giovanni Trainito
Direttore Generale Istruzione Classica, Scientifica e Magistrale, M.P.I.

La fase organizzativa, che precede la sottoscrizione di un'intesa fra partners per la realizzazione di un progetto comune, nasce da un'idea che si impone nella mente di chi l'ha generata e che spinge a superare le difficoltà che, per un fatto naturale, sorgono quando si prospettano cambiamenti.

È quello il momento in cui l'idea incomincia a prendere corpo, ad assumere dimensioni che crescono quanto più se ne analizzano le finalità, gli obiettivi più prossimi e quelli a lungo termine, i coinvolgimenti e le possibili ricadute sui destinatari delle iniziative da porre in essere.

Chi si è cimentato in un'opera che vede accomunati dalla volontà di realizzare una finalità più persone, più istituzioni, ben sa le difficoltà del percorso che si affronta per comporre le attese, che in sede progettuale sono sempre di alto profilo, con le reali possibilità operative che spingono a ridimensionarne la misura, allorché bisogna coniugare competenze, disponibilità dei partners, per convogliare il tutto in un protocollo di intenti i cui contenuti, nel confermare la validità dell'idea originaria, ne costituiscono al tempo stesso lo strumento per la sua realizzazione.

A monte di un'intesa vi è la consapevolezza della validità della cooperazione tra soggetti che nella specificità delle rispettive competenze ritrovano elementi la cui composizione torna di vantaggio all'azione di entrambi.

Questa consapevolezza ha portato e porta l'Amministrazione della P.I. a servirsi delle collaborazioni esterne per promuovere la realizzazione di alcune idee forti originate dall'urgenza di porre la scuola in grado di dare risposte significative alla pressante richiesta di innovazione che la nostra società, percorsa da profondi mutamenti, le rivolge.

Sono evidentemente risposte che richiedono azioni incisive nella vita, nell'organizzazione, nelle dotazioni, nelle strutture e prioritariamente nella professionalità docente; sono risposte che la scuola deve e non, semplicemente, può dare, per le leggi che si è dato e che fanno fede della sua scelta di crescere nel tempo per aiutare a crescere.

Sono per altro, risposte strettamente connesse all'impegno di dare pratica attuazione al dettato del D.P.R. 419/74 riproposto nel T.U. del 1994, che articola l'aggiornamento del personale docente in una serie di azioni finalizzate al miglioramento della qualità della scuola in termini di:

- adeguamento delle conoscenze allo sviluppo delle discipline considerate nelle connessioni interdisciplinari;
- approfondimento della progettualità didattica;
- partecipazione alla ricerca e alle innovazioni didattiche e pedagogiche.

Di qui la necessità di trovare collaborazioni per comporre, con maggiore rigore, nel processo formativo, l'acquisizione di nuove conoscenze, frutto della ricerca scientifica, e l'applicazione di nuove tecnologie con la didattica.

Trova allora spiegazione l'incremento, che si sta verificando da alcuni anni ad oggi, del numero delle intese stipulate dal M.P.I. con enti, istituzioni, associazioni professionali, intese strettamente finalizzate alla contestualizzazione del servizio scolastico all'evoluzione del mondo della produzione, del lavoro, della cultura in tutte le sue espressioni, della condizione umana e dei rapporti sociopolitici.

Il ricorso alla strategia delle collaborazioni esterne sta consentendo di registrare in alcune scuole elementari, medie e superiori risultati interessanti nell'applicazione delle tecnologie multimediali, ipertestuali e telematiche alla didattica mediante l'attuazione del progetto "Telecomunicando" previsto dall'intesa con la STET che, dal canto suo, potrà avvalersi di questa esperienza per sviluppare le potenzialità dei suoi prodotti anche secondo le richieste dell'attività didattica; dall'intesa MPI/Ministero dei Beni Culturali potranno scaturire adeguate forme di conoscenza, gestione, fruizione del patrimonio culturale ed artistico di cui è ricco il nostro Paese, dall'attuazione dei protocolli d'intesa con l'INSMLI, con l'Enciclopedia Italiana e con la Società Filosofica Italiana potranno derivare contributi per migliorare l'insegnamento delle diverse discipline e in particolare della storia e della filosofia del '900 nelle classi conclusive dei cicli scolastici.

Un discorso a parte esige l'intesa M.P.I./U.M.I. alla cui attività e produzione è legata la pubblicazione del presente "Quaderno".

Per altro quella con l'U.M.I. è la prima intesa stipulata dall'Amministrazione con un'associazione che raggruppa docenti dello stesso settore disciplinare sia dell'università sia della scuola.

Nata con la finalità di promuovere "*programmi comuni per la ricerca e la diffusione di metodologie didattiche adeguate ai recenti sviluppi scientifici e tecnologici nel campo della matematica e delle sue applicazioni*", l'intesa M.P.I./U.M.I. si presenta in sede di realizzazione con risultati che dimostrano attenzione a diversi problemi dell'aggiornamento disciplinare e didattico, costituendo un singolare esempio di mantenimento e conferma dell'alto profilo delle attese iniziali e, insieme, una prova dell'opera di ampliamento della sfera degli obiettivi allorché si passa dall'idea originaria alla sua strutturazione e formalizzazione programmatica, passaggio di cui si fa cenno all'inizio di queste riflessioni.

Se, infatti, poteva ritenersi scontata la bontà dei contenuti affrontati nelle lezioni e nei gruppi di lavoro, per l'apporto di cattedratici di chiara fama del mondo universitario e di esperti di pari valore dell'Amministrazione Centrale, non altrettanto scontate erano realizzazioni quali l'attenzione ai processi innovativi di recente introduzione nelle scuole con il P.N.I., con i programmi della Commissione ministeriale presieduta dall'on. Brocca, con i nuovi programmi dell'Istruzione Elementare.

Ciò è stato possibile grazie alla qualità della proposta formativa per sostenere la quale l'Amministrazione è stata determinata nell'affrontare notevoli difficoltà per realizzare il coinvolgimento nelle attività seminariali delle diverse Direzioni Generali.

Accanto a questi risultati è doveroso richiamarne un altro, che è auspicabile trovi ulteriore conferma nelle successive fasi di applicazione dell'intesa per il particolare contributo che offre al processo didattico dell'intero arco scolastico.

L'aver realizzato sessioni seminariali comuni a diversi gradi di scuola ha consentito di affrontare, in termini operativi, il problema della continuità didattica. Si tratta di un problema finora affrontato, in sede normativa, in maniera esplicita, solo per la scuola dell'obbligo; mentre per gli altri gradi di scuola è possibile ricavare da quelle norme, per analogia, soltanto alcuni richiami.

L'attenzione del Seminario realizzato all'interno dell'intesa M.P.I./U.M.I. verso il problema della continuità didattica, in una scuola che per tanti anni ha registrato situazioni ed effetti di discontinuità, va sottolineata per il merito di aver richiamato l'urgenza di interventi solutori che trovano una significativa risposta nel documento del Ministro Berlinguer sul rinnovo dei cicli scolastici in cui il continuum didattico risulta rafforzato dall'unitarietà della scuola di base e degli anni di orientamento.

PROTOCOLLO DI INTESA M.P.I. - U.M.I
SEMINARIO DI AGGIORNAMENTO PER DOCENTI DI MATEMATICA
"LA DIDATTICA DELLA GEOMETRIA"

SEZIONE SCUOLA MEDIA SUPERIORE

Programma per la prima settimana

Cicli di lezioni:

A Insegnamento-apprendimento della geometria
Fulvia Furinghetti - Università di Genova

B Storia ed epistemologia della geometria
Massimo Galluzzi - Università di Milano

Conferenza per entrambe le sezioni:
Riscoprendo la geometria del triangolo
Benedetto Scimemi - Università di Padova

Programma per la seconda settimana

Cicli di lezioni:

A Insegnamento-apprendimento della geometria
Fulvia Furinghetti - Università di Genova

C Trasformazioni geometriche e programma di Erlangen
Giuseppe Accascina - Università di Roma La Sapienza

D Geometria dello spazio
Mario Marchi - Università Cattolica di Brescia

Conferenza per entrambe le sezioni:
Geometria, scienza, tecnologia e nuovi programmi
Mario Fierli - Dirigente superiore per i servizi ispettivi

STAFF DI GESTIONE DEL SEMINARIO

Direttore: Giuseppe Ciri

Comitato tecnico:
– *per il Ministero della Pubblica Istruzione*, Lucia Ciarrapico
– *per l'Unione Matematica Italiana*, Claudio Bernardi

Responsabile Ministero della Pubblica Istruzione: Luigi Catalano

Relatori:
Giuseppe Accascina - Università di Roma La Sapienza
Claudio Bernardi - Unione Matematica Italiana
Lucia Ciarrapico - Ministero della Pubblica Istruzione
Fulvia Furinghetti - Università di Genova
Massimo Galuzzi - Università di Milano
Mario Marchi - Università Cattolica di Brescia
Benedetto Scimemi - Università di Padova

Segreteria:
Francesca Antonelli, Ilaria Ercoli, Cesare Matteoni, Maria Luisa Radini, Giovanni Romani.

La revisione scientifica dei testi pubblicati nel presente *Quaderno* è stata curata da Claudio Bernardi e Lucia Ciarrapico. La curatela complessiva è stata seguita da Giuseppe Ciri.

PRESENTAZIONE

Claudio Bernardi
Presidente della Commissione Italiana della pubblica Istruzione per l'insegnamento della Matematica (*).

Lucia Ciarrapico
Ispettore Ministero della Pubblica Istruzione

Questo volume raccoglie materiale elaborato in occasione del Secondo Corso in Didattica della Matematica, organizzato dal Ministero della Pubblica Istruzione e dall'Unione Matematica Italiana. Ricordiamo che, alla fine del 1993, il Ministero della Pubblica Istruzione e l'Unione Matematica Italiana hanno sottoscritto un Protocollo d'Intesa, per promuovere "programmi comuni per la ricerca e la diffusione di metodologie didattiche, adeguate ai recenti sviluppi scientifici e tecnologici, nel campo della matematica e delle sue applicazioni". Nel quadro di una collaborazione fra mondo della Scuola e Università volta a realizzare forme di aggiornamento, il Protocollo prevede che il Ministero e l'Unione Matematica Italiana organizzino congiuntamente ogni anno un Corso residenziale di due settimane, su temi di didattica della matematica.

Nel 1994 si è svolto il Primo Corso, dal titolo "L'insegnamento dell'Algebra fra tradizione e rinnovamento".

Il Secondo Corso di Didattica della Matematica, dedicato all'"Insegnamento della Geometria", si è svolto a Viareggio in due settimane separate, dal 13 al 17 novembre 1995 e dal 26 febbraio al 1 marzo 1996. Per l'importanza che il tema affrontato riveste a diversi livelli scolari e anche per consentire l'ammissione al Corso di un maggior numero di persone, è stato deciso di articolare il Corso stesso in due Sezioni, una rivolta ai docenti della Scuola Media e l'altra ai docenti delle Scuole Superiori.

Naturalmente, durante il Corso sono stati previsti momenti di confronto ed attività comuni fra i docenti delle due Sezioni. Nella stesura degli Atti, tuttavia, è sembrato preferibile presentare separatamente i testi relativi alla Scuola Media e i testi relativi alle Superiori, in modo da ottenere due volumi tipograficamente più agili e didatticamente più mirati.

Le domande di partecipazione sono state numerosissime, quasi 2500 per le due Sezioni. È stato possibile ammettere solo 40 docenti di ruolo nella Scuola

***(*)** La Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica è una commissione permanente dell'Unione Matematica Italiana, che si occupa specificamente dei problemi di carattere didattico.*

Media e 40 docenti di ruolo nelle Superiori, scelti sulla base dei titoli presentati e in modo da rappresentare tutte le Regioni; a questi docenti sono stati affiancati 10 neo-laureati.

Nella Sezione "Scuola Media" si sono svolti 4 cicli di lezioni con esercitazioni, conferenze, lavori di gruppo, ed esercitazioni al calcolatore (con la presentazione dei software **GET** e **Cabri- Geometre**). Come appare dai testi, in cui sono sinteticamente riportati i vari momenti di lavoro (lezioni teoriche, esemplificazioni, spunti didattici), si è cercato di affrontare l'argomento tenendo presenti sia le indicazioni fornite dalla ricerca didattica, sia spunti suggeriti dalla storia e dall'epistemologia della matematica. Sono stati approfonditi due temi che oggi appaiono di particolare interesse: le trasformazioni geometriche e la geometria dello spazio. Naturalmente, è stato dato risalto ai legami che la geometria presenta con altri settori matematici, come la teoria dei numeri e la probabilità.

Questo libro si propone come strumento didattico per attività di studio, di aggiornamento e anche di prima formazione.

L'efficacia di un Corso di didattica si misura dalla sua ricaduta: ci auguriamo che questi libri permettano a molti di coloro che non hanno potuto partecipare al Corso, di usufruirne, sia pure a distanza di tempo, e possano anche costituire una fonte di suggerimenti per Enti e Associazioni che vogliano contribuire con iniziative locali alla formazione dei docenti.

Un sentito ringraziamento va rivolto a quanti hanno reso possibile la realizzazione dell'iniziativa:

– alla Direzione Generale dell'Istruzione Classica Scientifica e Magistrale, che ha curato l'organizzazione del Corso,
– alla Direzione Generale dell'Istruzione Secondaria di Primo Grado, che ha contribuito alla realizzazione del Corso,
– al Preside Giuseppe Ciri del Liceo Scientifico "Vallisneri" di Lucca, che ha diretto il Corso, e al personale dello stesso Liceo, che ha offerto un efficace sostegno amministrativo e di segreteria,
– al CEDE e all'IRRSAE-Toscana, che hanno fornito utili materiali di lavoro,
– ai relatori, per la loro competenza e disponibilità,
– ai docenti partecipanti, che hanno dato contributi preziosi grazie alla loro preparazione e alla loro esperienza concreta.

INSEGNAMENTO/APPRENDIMENTO DELLA GEOMETRIA NELLA SCUOLA SECONDARIA SUPERIORE. RIFLESSIONI SU STRUMENTI E PRESCRIZIONI A DISPOSIZIONE DEGLI INSEGNANTI

Fulvia Furinghetti
Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova

Introduzione

In questa nota rivolta agli insegnanti di scuola secondaria superiore espongo alcune riflessioni sull'insegnamento della geometria. Nell'impostare il lavoro ho cercato di applicare ciò che dice Émile Durkheim in *Éducation et sociologie* (PUF, Paris, 1985, p.113; prima edizione 1922, mia traduzione adattata) e cioè «non di comunicare agli insegnanti un certo numero di processi e di ricette, ma di dare una piena coscienza della loro funzione».

La presenza di tanti indirizzi diversi nella scuola secondaria di secondo grado italiana rende praticamente impossibile tracciare un unico itinerario didattico, specialmente per la geometria; mi è sembrato perciò ragionevole limitare il mio lavoro a fornire alcune chiavi di lettura degli strumenti a disposizione degli insegnanti (Parte I: *Dalla teoria ai libri di testo*) e delle prescrizioni (Parte II: *Dai programmi alla classe*), alla luce di considerazioni culturali e educazionali. Lascio all'insegnante il compito di tradurre nella pratica scolastica le mie indicazioni, a seconda del contesto e delle sue personali convinzioni.

Non voglio inoltrarmi nel terreno insidioso della difesa a priori e a oltranza di un insegnamento geometrico; preferisco assumere come motto del lavoro l'incipit del libro di Gustave Choquet (p. 3, traduzione italiana citata nei riferimenti bibliografici) «Non discuteremo qui la necessità di un insegnamento della geometria; studieremo soltanto il modo come può essere fatto». Infatti, se da una parte constato che la necessità di questo insegnamento è insita nei programmi, nella tradizione, nelle convinzioni di certi insegnanti e di certi ricercatori in didattica, dall'altra percepisco che argomenti forti possono essere addotti alla messa in discussione di questa necessità: la proposta nei programmi di altre parti della matematica con valenze culturali e applicative altrettanto valide da sostituire alla geometria, la difficoltà di superare determinati ostacoli epistemologici, la formazione degli insegnanti.

L'ultimo punto è cruciale. Mi sembra che attualmente uno studente cessi la sua militanza geometrica (euclidea, per l'analitica il discorso è diverso) al più dopo il biennio delle superiori. All'università sotto la denominazione di geometria si hanno corsi di carattere prevalentemente algebrico, anche per chi si laurea in matematica. Questi fatti non possono non influenzare il gusto (e, ovviamente, la cultura) degli insegnanti. Ad esempio, come docente di 'Matematiche Elementari da un Punto di Vista Superiore' (al secondo biennio del corso di laurea in matematica) ho constatato che i miei studenti hanno difficoltà a rappresentare semplici situazioni geometriche. Ciò è una delle conseguenze del fatto che il disegno, fondamentale accessorio della geometria, è caduto completamente in disuso.

Nello sviluppare le mie considerazioni sull'insegnamento geometrico ho tenuto conto, ovviamente, delle ricerche in educazione matematica. È noto, però, che la ricerca a livello di scuola superiore (specialmente triennio) è meno ricca e che il contesto scolastico e sociale diverso nei vari paesi rende le esperienze meno trasmissibili a questo livello. Nel caso specifico della geometria osservo che nel volume curato da David Tall *Advanced mathematical thinking* (Kluwer Academic Press, Dordrecht, 1991) non c'è un capitolo dedicato espressamente alla geometria. Lo studio ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) tenutosi a Catania nel settembre 1995 ha evidenziato che l'insegnamento della geometria è un problema praticamente ovunque.

Ho impostato il presente lavoro partendo da alcune idee di base (*Il livello 0, Che cosa c'è dietro a, Metacognizione, Ricorrenza di certi problemi didattici*) che abbiamo studiato e applicato nel gruppo GREMG[1] in ricerche su problemi

[1] Nel seguito con questa sigla ci riferiremo al Gruppo Ricerca Educazione Matematica Genova operante presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova con finanziamenti CNR e MURST. La scrivente ne è il coordinatore.

di apprendimento e di costruzione di curricula. Brevemente illustro queste idee e il loro impiego nella discussione sull'insegnamento geometrico.

Il livello 0

Una delle idee di base del nostro lavoro nel GREMG è quella di *partire dal livello 0 dello studente*, ossia di capire se e quali concezioni (credenze, convinzioni, ...), eventualmente non esplicite, lo studente ha su un certo argomento prima di averlo affrontato in classe. Per fare un esempio, quando abbiamo affrontato il concetto di limite abbiamo proposto un questionario aperto che conteneva domande informali su di esso, coinvolgenti il linguaggio usuale, le concezioni fisiche, la rielaborazione di eventuali conoscenze collegate. Nel caso degli insegnanti cui è diretta questa nota cerco di far esplicitare le loro idee, talvolta non conscie, su determinati temi (dimostrazione, rigore, capacità di apprendimento degli studenti, matematica e suo insegnamento).

Che cosa c'è dietro a

Un'altra idea che applichiamo nelle ricerche del GREMG è quella che un concetto è difficile perché è il catalizzatore di altri concetti che 'gli stanno dietro'. Allora, nello studiare le difficoltà di un concetto studiamo *che cosa c'è dietro a quel concetto* individuando vari livelli di difficoltà fino a arrivare ad *atomi* di conoscenza. Nel citato volume di Tall a proposito di un processo di questo tipo si usa la locuzione «decomposizione genetica».

Se applichiamo questa tecnica di studio alla riflessione sugli strumenti e le prescrizioni forniti agli insegnanti (programmi, manuali, compiti di maturità, ...) individuiamo alcuni nodi cruciali nella discussione su come insegnare la geometria e fissiamo l'attenzione su di essi. Per esempio, ciò accadrà per la dimostrazione.

Metacognizione

Uno degli obiettivi primari che il gruppo GREMG si è posto in alcune esperienze in classe è portare lo studente a prendere coscienza di ciò che c'è dietro l'attività che sta svolgendo e il proprio modo di apprendere. Una tale forma di *metacognizione* si tenterà anche per gli insegnanti nei riguardi del loro insegnamento.

Ricorrenza di certi problemi didattici

I brevi cenni riportati nel paragrafo sulle vicende dell'insegnamento della geometria in Italia dalla nascita dello stato suggeriscono che esiste un fenomeno di *ricorrenza di certi problemi didattici*. Ogni epoca cerca di dare soluzioni adeguate ai cambiamenti del contesto (gli sviluppi della ricerca matematica, il diverso assetto della società, le diverse tecnologie, le diverse aspettative della società verso la scuola). Attualmente mi sembra che la situazione sia particolarmente problematica, forse per quel fattore epocale che un'insegnante (Ivana Chiarugi) descrive così: «I nostri ragazzi devono essere la sintesi di troppe culture. Pierino è greco + romano + arabo + tedesco + americano + ? (da adulto anche marziano?)».

UNA DIGRESSIONE.

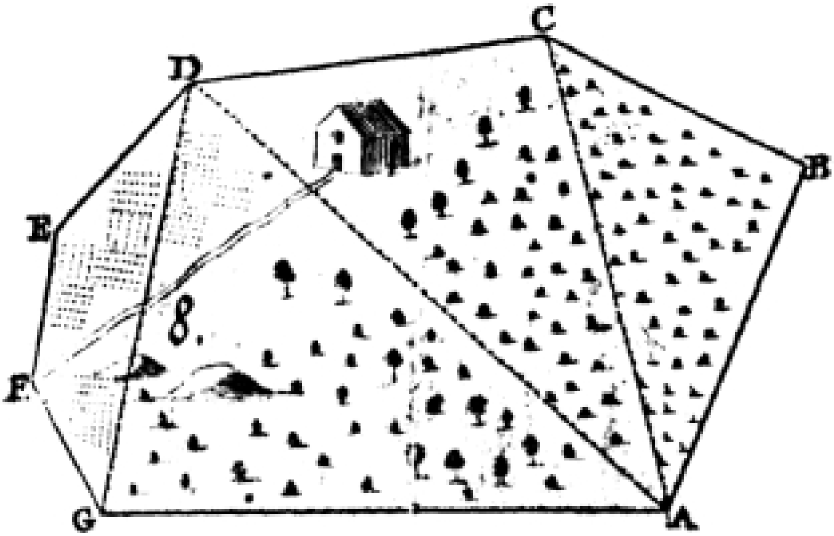
A proposito del fascino e della pervasività della geometria si confronti l'incipit negli *Elementi* di Euclide e quello nella dichiarazione di indipendenza americana di Thomas Jefferson: «We hold these truths to be self-evident, that all men are created equal, that they are endowed by their creator with certain unalienable rights, that among these are Life, Liberty and the pursuit of Happiness ...». In seguito Abraham Lincoln nel Gettysburg address riprese questa proposizione che era stata presentata come 'evidentemente vera' con spirito che potremmo dire lobachevskiano e la assunse come descrizione di un certo aspetto (e dunque essa stessa un aspetto) degli Stati Uniti: «Fourscore and seven years ago our fathers brought forth on this continent a new nation, conceived in liberty and dedicated to the proposition that all men are created equal». Ho ripreso queste osservazioni dal testo di Moise (p.383) che in seguito citerò ancora per altre ragioni [2].

Il rapporto dei politici con la geometria sembra peculiare; a pagina 224 del primo anno (1900) del *Bollettino di matematiche e di scienze fisiche e naturali* è riportata questa affermazione di Cavour: «... Dallo studio dei triangoli e delle formole algebriche son passato a quello degli uomini e delle cose; comprendo ora quanto quello studio mi sia stato utile per quello che ora vado facendo degli uomini e delle cose». Nella stessa pagina un'altra citazione in cui Cavour giudica l'aritmetica un mezzo adatto per «misurare le facoltà intellettuali dei giovani».

SULLE OPERE CITATE.

Per ragioni di completezza ho citato le fonti su cui baso le mie riflessioni, anche se sono consapevole che non tutte sono accessibili, a meno che non si abbia l'opportunità di fruire di una biblioteca universitaria convenientemente fornita nel campo dell'educazione matematica e della storia della matematica. La comprensione del testo può prescindere da quelle fonti. Quanto alle riviste italiane, mi sembrerebbe opportuno che esse fossero presenti nelle biblioteche delle scuole, nelle biblioteche degli IRRSAE e delle associazioni di insegnanti.

[2] Jefferson: «Riteniamo queste verità evidenti, che tutti gli uomini sono creati uguali, che sono dotati dal loro creatore di diritti inalienabili, che tra questi ci sono la Vita, la Libertà e la ricerca della Felicità ...». Lincoln: «Ottantasette anni fa i nostri padri crearono in questo continente una nuova nazione, concepita nella libertà e consacrata alla proposizione che tutti gli uomini sono creati uguali».



SULLE ILLUSTRAZIONI.

Oltre alle figure geometriche (funzionali al testo) ho inserito le seguenti illustrazioni antiche:

– Decorazione alla fine del capitolo sulla geometria nel *Diction[n]aire des mathématiques ou idée générale des mathématiques* di Ozanam (1691, Amsterdam, p.137)
– Tavola III da (Clairaut, 1771)
– Particolare del frontespizio della *Geometria* di René Descartes (edizione di Francesco van Schooten, Amsterdam, 1659)
– Illustrazione del problema «Giometria per quadrare terre de figura triangulare ...» da (Abate, 1992).

RICONOSCIMENTI.

Mi sono state utilissime nella elaborazione di alcuni punti le conversazioni e/o il lavoro con gli insegnanti del gruppo superiori di Genova (GREMG) e delle sue succursali italiane. Ringrazio, in particolare, Ercole Castagnola, Ivana Chiarugi, Domingo Paola, Annamaria Somaglia, Giuliano Testa.

1. QUESTIONARIO DI AMBIENTAMENTO

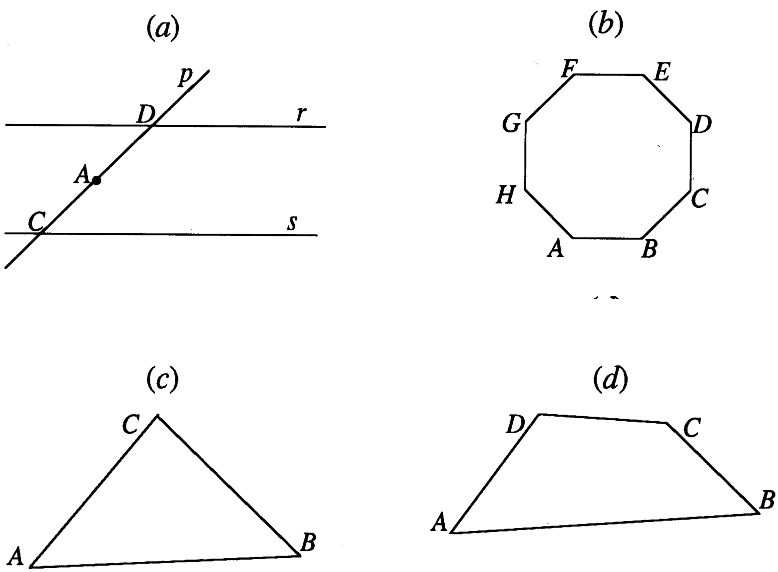
DOMANDE

D1. Dati due segmenti AB e CD ($AB=CD$)su due rette parallele distinte è $AC = DB$? Giustificare la risposta.

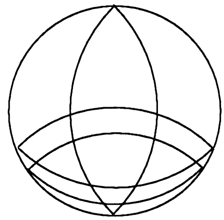
D2. Come spieghereste che la somma dei primi n numeri interi è $n(n + 1)/2$? (Solo cenno).

D3. Quattro punti P, Q, R, S tre qualunque dei quali non sono allineati, sono vertici di un quadrangolo piano completo i cui sei lati sono PQ, RS, QR, PS, RP, QS. Dualmente, quattro rette p, q, r, s, tre qualunque delle quali non sono concorrenti in un punto, sono lati di un quadrilatero piano completo i cui vertici sono $A = p \cap r$, $B = p \cap s$, $C = p \cap q$, $D = q \cap s$, $E = q \cap r$, $F = r \cap s$. Disegnare un quadrangolo e un quadrilatero.

D4. Dire quali delle seguenti figure (a), (b), (c), (d) ha simmetrie? Quali simmetrie?



D5. In un libro di testo di geometria per la scuola media una figura del tipo di quella qui riprodotta è usata per rappresentare su un piano una sfera e alcuni ‘paralleli’ e meridiani’. È corretta? Perché?



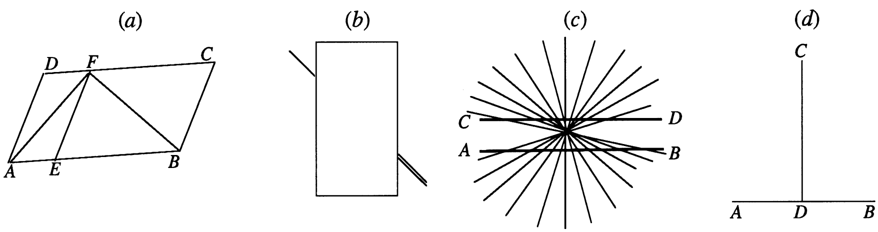
D6. In certi ambienti la dimostrazione usuale del teorema «In un triangolo l’angolo esterno è maggiore degli angoli interni non adiacenti» non funziona. Per esempio, se il triangolo ...

D7. Una trasformazione di un piano in sé trasforma punti in punti, rette in rette, conserva l’appartenenza e ha una retta *r* fissa; si dicono parallele le rette che si incontrano su *r*. Si dicono parallelogrammi i quadrilateri piano completi con due vertici opposti nella retta unita. Individuare una proprietà che si conserva e una che non si conserva in questa trasformazione.

D8. Consideriamo un cerchio senza la circonferenza di contorno, in cui i punti sono gli usuali punti euclidei e le rette sono i segmenti interni al cerchio intercettati dalla circonferenza contorno sulle rette euclidee del piano del cerchio. I triangoli interni al cerchio che hanno un vertice sulla circonferenza contorno si dicono asintotici. Disegnare un triangolo asintotico.

D9. Guardando le figure (*a*), (*b*), (*c*), (*d*) decidere:

(a) Quali segmenti sono uguali
(b) Quale dei due segmenti a destra del rettangolo è continuazione di quello a sinistra
(c) Se i segmenti *AB* e *CD* stanno su rette parallele
(d) Se i segmenti *AB* e *CD* hanno la stessa lunghezza.



D10. Quali delle seguenti lettere è simmetrica rispetto ad una retta, quali rispetto ad un punto?

Z F E T S I H V X Q

D11. Disegnare un quadrato inscritto in una semicirconferenza.

Motivazioni nel porre queste domande

Col questionario si cerca di riprodurre per l'insegnante la situazione *al buio* dell'alunno che si trova davanti a quesiti di cui ignora: - il contesto (trasformazioni, illusione ottica, assiomi non noti, ...), - il modo di risolvere (già fatto, nuovo, c'è un trucco, ...), - le regole grafiche che, invero, nessuno mai gli ha esplicitato (i cerchi si proiettano in ellissi o in segmenti, ...), i termini del contratto didattico (è evidente ciò che l'insegnante ritiene evidente, il disegno aiuta o inganna, capire quando due rette che sembrano parallele sono nelle intenzioni del disegnatore effettivamente parallele, ...). Inoltre si vuole vedere se davvero esiste un metodo migliore o ciascuno ha il suo metodo migliore (via grafica e algebrica, metodo euclideo o trasformazioni...). Gli elementi considerati non sono legati a difficoltà interne alla matematica, ma piuttosto a problemi di *rapporto insegnante-alunno-strumenti-contesto*. Associo a ciascuna domanda alcuni cenni alle motivazioni con cui le ho poste.

M1. Si vede come spesso negli enunciati l'informazione è legata al disegno; senza il disegno le informazioni non sono sufficienti. Per esempio, si pensi allo stesso problema enunciato così: «Sia dato il parallelogrammo *ABCD* ...».

M2. Si vede quale metodo risolutivo è usato (la rappresentazione grafica o quella numerica).

M3. Si cerca di riprodurre la situazione dello studente che deve disegnare una figura che non ha mai visto e gli è stata solo descritta verbalmente.

M4. Si deve rispondere a partire da informazioni grafiche da decodificare e interpretare. Si devono misurare i segmenti che sembrano uguali per controllare se sono uguali? Quale errore è tollerato nella misurazione?

M5. Se la geometria è utile per risolvere problemi, davvero a scuola si fa e si usa la geometria che serve a tale scopo? Per esempio, le regole per la rappresentazione nel piano di oggetti tridimensionali sono ignorate o al più confinate al corso di disegno e non sostenute da una conveniente spiegazione teorica.

M6. Il controesempio è difficile da trovare se non si è già visto.

M7. Il concetto di invariante è importante.

M8. Quanto si è disinvolti in ambienti nuovi?

M9. Illusioni ottiche.

M10. È un semplice esercizio di interpretazione visiva, ma, a differenza della domanda D9, in questo caso ci si deve fidare dell'informazione grafica. Confrontare con la domanda D4.

M11. Si può risolvere con una similitudine. Basta disegnare un quadrato con un lato sul diametro del semicerchio, congiungere il centro della semicirconferenza con i vertici non sul diametro fino a incontrare la semicirconferenza ... Viene subito in mente questo procedimento risolutivo, se nel momento in cui si risolve il problema non si sta lavorando sulle similitudini?

Le domande non originali sono prese da:

Chazan, D.: 1993, 'High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof', *Educational studies in mathematics*, v.24, 359-387.

Dubnov, Ya. S.: 1965, *Errori nelle dimostrazioni in geometria*, Progresso tecnico editoriale, Milano; trad. it. di *Mistakes in geometry proofs*, D. C. Heath & C., Boston.

Maxwell, E. A.: 1959, *Fallacies in mathematics*, CUP, Cambridge.

Moise, E. E. & Downs, F. L.: 1982, *Geometry*, Addison-Weasley, Menlo Park - Reading - ecc.

Villani, V.: 1994, 'Errori nei testi scolastici: geometria', *Archimede*, a.45, 134-144.

Sugli errori di rappresentazione si veda:

Dedò, M.: 1993, 'Omissioni ed inopportunità didattiche', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate'*, v.16, 484-510.

Note tecniche sugli strumenti di indagine

Quando obiettivo di indagine è studiare non solo come gli studenti fanno una data attività matematica, ma perché la fanno in un determinato modo, è necessario mettere a punto strumenti ad hoc. I questionari chiusi sono utili nelle indagini su grandi numeri per l'ovvia ragione che è molto rapido elaborare i dati, eventualmente con programmi già predisposti, ma talvolta danno informazioni povere e troppo schematiche. Molto più ricchi di informazioni sono i questionari aperti, ma l'elaborazione dei dati è più complessa e individuare le linee di tendenza richiede molto impegno. Una via di mezzo sono i questionari semiaperti, in cui si hanno opzioni 'chiuse' e, in più, la possibilità di una risposta non prevista con relativo commento. Uno strumento ancor più ricco di informazioni è l'intervista, in cui le risposte devono essere riportate con cura per scritto o registrate. Ancor meglio è disporre di un videoregistratore che permette di analizzare da diversi punti di vista le reazioni dell'intervistato.

I protocolli possono essere anonimi, se non sono specificamente fatti solo per studiare singoli soggetti, ma è bene che ogni elaborato sia individuato con un numero o con una sigla non collegati al soggetto, poiché ciò permette di isolare sia l'analisi dei comportamenti del singolo, sia l'analisi delle reazioni globali a una certa domanda, a seconda delle necessità.

Bisogna porsi con chiarezza l'obiettivo dell'indagine, cioè che cosa se ne vuole ricavare, sia nel momento della progettazione che in quello dell'elaborazione dei dati. Una volta scelta la metodologia di analisi bisogna seguirla con coerenza, senza contaminazioni. È bene distinguere tra ciò che il soggetto dice e le inferenze fatte dall'analizzatore; queste ultime devono essere convenientemente motivate. Si deve anche evitare di dare giudizi, positivi o negativi, a meno che lo scopo espresso dell'indagine sia valutativo. Conviene fare dei controlli incrociati sulle risposte.

Come si può evincere dai questionari presentati nel corso, il questionario non ha solo un valore esplorativo, ma anche conoscitivo e costruttivo per impostare il lavoro in classe e per attività di aggiornamento.

2. ASCESA E CADUTA DELLA GEOMETRIA EUCLIDEA NELL'INSEGNAMENTO

In Italia la geometria euclidea è sempre stata uno dei temi portanti dei programmi di matematica, ma a partire dagli anni settanta (circa) il suo insegnamento è entrato in crisi, anche se non si sono avuti i rigetti e le ribellioni osservati in altre nazioni. Mi sembra semplicistico attribuire le cause di questa crisi solo alla 'matematica moderna', che ha, al più, accentuato un decadimento dalle origini ben più lontane, o ai cambiamenti della società (scolarizzazione di massa, crisi di certi valori culturali, ...) [3]. L'entrata in crisi della geometria euclidea è stata molto morbida e mai ufficializzata nei programmi; sta però di fatto che in molte scuole è scomparsa o al più è presente reincarnata come geometria analitica. Il mio discorso sull'insegnamento della geometria comincia dalla presa d'atto di questo fatto e da un tentativo di individuarne le cause.

A grandi linee si può dire che prima degli anni 1970 la geometria insegnata nelle scuole italiane si rifaceva al testo Federigo Enriques e Ugo Amaldi (prima edizione nel 1903 con successive numerose riedizioni). Questo libro, nato sulla scia della sistemazione assiomatica hilbertiana, si può considerare il punto culminante di una ristrutturazione dell'insegnamento della geometria iniziata subito dopo la nascita dello stato italiano. Alcuni matematici, già attivi nel Risorgimento, presero parte attiva anche alla creazione della nuova nazione, in particolare Luigi Cremona che ebbe incarichi ufficiali nel governo. Egli contribuì notevolmente alla reintroduzione degli *Elementi* di Euclide come libro di testo nella scuola liceale italiana (legge Coppino del 1867). Questa introduzione era fatta sulla base del convincimento che la matematica deve aver un valore formativo («ginnastica di pensiero» è una locuzione usata in articoli didattici di quel tempo in accordo con le teorie del pedagogista Johann Heinrich Pestalozzi) e avviare a «ragionare, a dimostrare, a dedurre», come scrivono in un celebre articolo del 1869 Brioschi e Cremona a proposito della polemica sull'introduzione del testo stesso di Euclide (nella versione del 1868 di Enrico Betti e Francesco Brioschi) come testo scolastico.

Il ritorno a Euclide era una reazione ai libri in circolazione in Italia in quel momento, sia quelli di modesta qualità, sia il famoso manuale di Adrien-Marie

[3] I cambiamenti del contesto sociale hanno spesso influito nella costruzione dei curricula; si consideri a tale proposito il seguente passo in (Castelnuovo, 1911): «Il continuo aumento degli allievi delle scuole medie e superiori fa sorgere nuove esigenze dell'insegnamento, delle quali non è possibile non tener conto, pur rispettando gli interessi della elevata ricerca scientifica». Analogamente si può osservare che lo standard di una classe non è poi così peggiorato se in (Castelnuovo, 1919, p. 2) si scrive: «conviene distinguere tra i pochi *eletti* e i molti mediocri che formano parte di ogni scolaresca».

Legendre (prima edizione nel 1784 a Parigi con successive numerose riedizioni anche italiane) che ebbe molta fortuna in Europa e anche in Italia per tutto il XIX secolo [4]. Ciò che si rimproverava a Legendre era l'aver contaminato il metodo euclideo con metodi aritmetici e algebrici; per esempio, un oggetto di contestazione era la sua definizione di retta come linea di minima distanza tra due punti [5]. L'estremo integralismo proposto nel testo di Betti e Brioschi del 1868 fu poi sfumato in successivi manuali (Sannia - D'Ovidio, Faifofer, ...), ma influenzò notevolmente la concezione dell'insegnamento geometrico in Italia nei decenni successivi. Che la situazione italiana sia peculiare a questo riguardo rispetto agli altri paesi è provato dal fatto che, mentre da noi Legendre era contestato dagli accademici per la sua 'impurità', in Francia esso era ritenuto un libro rigoroso (per tale ragione, ad esempio, in quella nazione gli fu in seguito preferito il testo di Sylvestre-François Lacroix).

I punti di vista che si contrapponevano erano quello in difesa del rigore, per lo più sostenuto dagli accademici, e quello più sensibile ai problemi della classe, in genere sostenuto dagli insegnanti. Questi ultimi percepivano l'inutilità di un insegnamento non recepito dagli studenti. L'inadeguatezza 'educativa' della rigida impostazione euclidea si accentuò ulteriormente a cavallo del secolo quando si riversarono nella scuola anche i risultati della ricerche fondazionali. Nella discussione sull'insegnamento geometrico si distinse Giovanni Vailati che, quale membro di una commissione incaricata di studiare un progetto di riforma degli studi secondari, presentò dei programmi di matematica innovativi in cui la geometria era inizialmente introdotta con un metodo sperimentale-costruttivo e con un graduale approccio alla deduzione partendo da semplici situazioni. La prematura morte dell'autore bloccò lo sviluppo di questo progetto, che d'altronde suscitò molte critiche anche tra i colleghi (v. proposte di attività). Nel processo di costruzione della conoscenza Vailati attribuiva valore educativo al disegno; traccia di questo punto di vista si trova già in articoli didattici della fine dell'Ottocento (per esempio, di Vittorio Murer e Gino Loria nel *Periodico di matematica*).

Accanto a questa dibattito intorno al modello euclideo e al rigore c'e un altro tema ottocentesco, la dualità tra geometria sintetica e analitica. A questo proposito Felix Klein dice nella nota I del *Programma di Erlangen*, citata in (Valabrega, 1989, p.137):

[4] Per l'insegnamento della geometria prima dell'unità d'Italia si veda (Borgato, 1981; Pepe, 1995).

[5] Si veda (Maraschini & Menghini, 1992) per la discussione su alcuni importanti manuali di geometria ottocenteschi, in particolare quello di Legendre.

> «Sul contrasto tra l'indirizzo sintetico e quello analitico nella geometria moderna. - La differenza fra la nuova geometria sintetica e la nuova geometria analitica non deve più considerarsi oggigiorno come essenziale, poiché i concetti e le argomentazioni si sono informate a poco a poco dall'una e dall'altra parte in modo affatto simile. Perciò noi scegliamo nel testo la denominazione di 'geometria proiettiva' per indicarle entrambe. Se il metodo sintetico procede di più per mezzo dell'intuizione dello spazio, accordando così alle sue prime e semplici teorie un'attrattiva non comune, tuttavia il campo di tali intuizioni non è chiuso al metodo analitico, e le formole della geometria analitica si possono concepire come espressione esatta e trasparente delle relazioni geometriche. D'altra parte non bisogna tenere in poco conto il vantaggio che un formalismo ben fondato offre al processo dell'investigazione, precedendo in certa misura il pensiero. Bisogna bensì attenersi sempre al principio di non considerare come esaurito un argomento matematico, finché esso non è diventato evidente nel concetto; e l'avanzare col mezzo del formalismo non è appunto che un primo passo, ma già molto importante».

Il brano si innesta nella vicenda ottocentesca dello sviluppo della ricerca in geometria e quindi si riferisce all'aspetto della 'produttività' scientifica più che a quello didattico, ma mi sembra che la sua idea di fondo sia trasferibile alla pratica scolastica. Un orientamento verso questa fusione dei metodi è nel commento al tema geometria dei programmi Brocca del biennio (Studi e ..., p.165): «Con [l'introduzione del piano cartesiano] sono disponibili, per la risoluzione dei problemi geometrici, sia il metodo della geometria classica che quello della geometria analitica, e lo studente va stimolato ad usare l'uno o l'altro in relazione alla naturalezza, alla espressività e alla semplicità che essi offrono nel caso particolare in esame».

Questi brevi cenni alle diatribe del passato fanno intravvedere alcuni temi di fondo che si ritrovano anche al presente e su cui sarà centrata la nostra discussione. Le linee di sviluppo didattico si possono ricondurre al filone ipotetico-deduttivo alla Euclide o al filone metrico che si basa sulla struttura dei reali. Gli approcci educativi che si delineano sono vari: - il metodo costruttivo basato sul disegno, su software per disegnare, su macchine, - le limitate catene di deduzioni, - l'insegnamento per problemi. Restano problemi di fondo irrisoluti: evidenza/intuizione e rigore, teoria (accademica) e pratica scolastica, differenze nelle finalità e negli obiettivi dei vari tipi di scuola superiore.

Concludo sottolineando una tradizione tipica dell'Italia, per cui i grandi 'movimenti curricolari' europei (quello di Klein con il programma di Merano che prevedeva tra l'altro l'introduzione dell'analisi e il bourbakismo con l'assiomatizzazione totale della matematica) hanno toccato relativamente poco la pratica scolastica italiana, e ciò ha propiziato una continuità, che potremmo definire secolare, nell'insegnamento della geometria.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Una buona fonte per avere un'idea sull'insegnamento nel passato sono alcune riviste sull'insegnamento del periodo: *Periodico di matematica* (dal 1921 *di matematiche*), *Bollettino di matematica, Il Pitagora, Bollettino della "Mathesis»*. Precedentemente alla nascita di queste riviste il *Giornale di matematiche* (pubblicato a Napoli da Giuseppe Battaglini) ospitò qualche articolo didattico tra cui l'interessante polemica citata precedentemente su Euclide nella scuola (annate 1868, 1869, 1871). Le seguenti opere forniscono ulteriori informazioni su contenuti e metodologie, programmi, libri di testo e bibliografia:

Barra, M., Ferrari, M., Furinghetti, F., Malara, N. A. & Speranza, F. (editors): 1992, *Italian research in mathematics education: common roots and présent trends*, Quaderno TID - CNR, serie FMI, n.12.

Brigaglia, A.: 1993, 'Torniamo a Euclide', *Lettera PRISTEM*, n.10, 10-15.

Brigaglia, A.: 1994, 'Geometria: il dibattito continua', *Lettera PRISTEM*, n.14, 26-28.

Borgato, M. T.: 1981, 'Alcune note storiche sugli «Elementi» di Euclide nell'insegnamento della matematica in Italia', *Archimede*, v.33, 185-193.

Castelnuovo, G.: 1911, 'Commissione internazionale per l'insegnamento matematico. Riunione della Commissione internazionale a Milano', *Bollettino della "Mathesis»*, a.3, 172-184.

Castelnuovo, G.: 1919, 'La riforma dell'insegnamento matematico secondario nei riguardi dell'Italia', *Bollettino della Mathesis*, a.11, 1-5

Manara, C. F.: 1994,'Giuseppe Peano ed i fondamenti della geometria', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, v.17B, 284-295.

Manara, C. F.: 1994,'Metodi della geometria del XIX secolo', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, v.17B, 386-394.

Maraschini, W. & Menghini, M.: 1992, 'Il metodo euclideo nell'insegnamento della geometria', *L'educazione matematica*, v.13, 161-180.

Pepe, L.: 1995, 'Per una storia degli insegnamenti matematici in Italia', *Giornate di didattica, storia ed epistemologia della matematica*, Dipartimento di matematica dell'Università di Trieste, 101-116.

Valabrega, E.: 1989,'Le trasformazioni geometriche nell'insegnamento alla luce della storia della geometria', *L'educazione matematica*, a.10, s.2, 135-141.

Vita, V.: 1986, *I programmi di matematica per le scuole secondarie dall'unità d'Italia al 1986. Rilettura storico-critica*, Bologna, Pitagora.

Per la polemica su Euclide si veda:

Furinghetti, F. & Somaglia, A.: 1992, «Italian mathematics and Europe in the late 19th century: the British contacts with particular reference to education», *BSHM Conference on European Mathematics 1848-1939*, Gonville & Caius College (Cambridge).

Giacardi, L.: 1995, 'Gli *Elementi* di Euclide come libro di testo. Il dibattito italiano di metà Ottocento', in E. Gallo, L. Giacardi & C. S. Roero (editors), *Conferenze e seminari 1994-1995 della Mathesis subalpina*, 175-188.

PROPOSTE DI ATTIVITÀ

- Analisi del capitolo «Planimetria» di uno dei testi di riferimento per gli insegnanti di matematica dell'Ottocento: Riccardo Baltzer, *Elementi di matematica*, (traduzione di Luigi Cremona sulla seconda edizione di Lipsia), Tip. Sordo-muti, Genova, 1865-68.
- Lettura e commento di:

Anonimo: 1868, 'Parole del prof. Hirst sull'introduzione agli elementi di geometria del prof. Wright', *Giornale di matematiche*, v.6, 369-370, traduzione con commento di R. R. da *The educational times*, November 1868.

Anonimo: 1869, 'Estratto di una lettera del prof. *Hoüel* al Redattore', *Giornale di matematiche*, v.7, 50.

Anonimo: 1871, 'Un discorso del Dr. Hirst sopra Euclide come libro di testo', *Giornale di matematiche*, v.9, 180-187.

Barbin, É.: 1991, 'Les *Éléments de géométrie* de Clairaut: une géométrie problématisée', *Repères-IREM*, n.4, 119-133.

Brioschi, F. & Cremona, L.: 1869, 'Al signor Direttore del Giornale di matematiche ad uso degli studenti delle università italiane - Napoli', *Giornale di matematiche*, v.7, 51-54.

Clairaut, A.-C.: 1771, *Elementi di geometria*, V. Monaldini, Roma, (II edizione italiana).

Levi, B.: 1907, 'Esperienza e intuizione in rapporto alla propedeutica matematica', Il *bollettino di matematica*, a.6, 177-186.

Rubini, R.: 1869, 'Lettera del professore Rubini al Redattore', *Giornale di matematiche*, v.7, 111.

Vailati, G.: 1907, 'L'insegnamento della matematica nel primo triennio della scuola secondaria', *Il bollettino di matematica*, a.6, 137-146.

Vailati, G.: 1907, 'Sull'insegnamento della matematica nello stadio superiore della scuola secondaria', *Il bollettino di matematica*, a.6, 187-202.

Wilson, M. J.: 1868, 'Euclide come testo di geometria elementare', *Giornale di matematiche*, v.6, 361-368.

3. VARIE GEOMETRIE

Nello sviluppo della geometria si può individuare un unico filo conduttore da Euclide a Hilbert, seppure con rilevanti variazioni e vari adattamenti. In questo tipo di trattazione della geometria gli elementi in gioco sono:

(A) Il sistema di assiomi (B) La teoria (C) I modelli

Uno dei problemi è come e dove prendere gli assiomi. Il platonista li prende, per così dire, nel mondo intorno a lui, cioè segue la sequenza C $\rightarrow$ A $\rightarrow$ B. Il formalista segue la sequenza A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ C ed più libero perché può inventarsi i suoi assiomi, con le sole restrizioni che: - non siano troppo pochi (il sistema di assiomi è completo); - non siano troppi (gli assiomi sono indipendenti); - non ci siano contraddizioni. Queste considerazioni sono sviluppate in (Zeitler, 1990).

Lo schema hilbertiano è stato variamente modificato, specialmente dal punto di vista didattico e sono nate geometrie 'alternative', alcune delle quali specificamente collegate all'insegnamento. A grandi linee i vari orientamenti in cui si sono sviluppate alcune importanti variazioni sono:

Geometrie 'con assiomatizzazione parziale'

- Artin, Lingenberg: gli elementi di base (punti e rette della geometria classica) soddisfanno solo gli assiomi di incidenza e di parallelismo
- Bachmann: si basa sulle riflessioni

Geometrie basate su $\mathfrak{R}$

- Blumenthal: si basa sullo spazio euclideo come spazio metrico completo
- Birkhoff: la geometria di riga e goniometro

Geometrie in un altro ambiente

- Dieudonné: lo spazio euclideo è visto come spazio vettoriale su $\mathfrak{R}$ munito di un prodotto scalare

Accenno alcune caratteristiche delle assiomatizzazioni su cui si basano i testi scolastici più diffusi.

Schema hilbertiano

Questa sistemazione prevede:

- tre diversi sistemi di oggetti non definiti detti *punti* quelli del primo sistema, *rette* quelli del secondo, *piani* quelli del terzo
- una relazione non definita (*tra*) tra triple di punti su una retta, indicata con τ
- una relazione non definita (*congruenza*) tra segmenti e tra angoli, indicata con $\cong$
- una relazione non definita $\in$ (*giacenza, appartenenza*) tra gli oggetti, indicata con $\in$
- cinque gruppi di assiomi:

I	1-8	Assiomi di collegamento
II	1-4	Assiomi di ordinamento
III	1-5	Assiomi di congruenza
IV		Assioma di parallelismo
V	1-2	Assiomi di continuità

Schema basato sulla teoria degli insiemi

Nel piano si assumono come enti primitivi punti e rette; si premette l'assioma «Ogni retta è un insieme di punti». Le figure geometriche sono soggette alle usuali relazioni insiemistiche (appartenenza, inclusione, intersezione, unione, ...).

Il primo e il secondo assioma diventano: «Dati due punti distinti *A* e *B* esiste un'unica retta che li ha come elementi».

La relazione a tre posti 'stare tra' è sostituita dalla relazione binaria '<' e l'assioma di Pasch, grazie alla possibilità di definire la convessità, è sostituito dall'assioma di separazione del piano «Data una retta, l'insieme dei punti che non le appartengono è l'unione di due insiemi convessi tali che, se *A* appartiene a uno di essi e *B* all'altro, allora il segmento *AB* interseca la retta».

Schema basato sul movimento

Si introduce il concetto di gruppo. Valgono i seguenti assiomi.

- I movimenti sono funzioni bigettive del piano in sé che costituiscono un gruppo con l'usuale legge di composizione (da questo assioma segue che la congruenza è una relazione di equivalenza)
- Se *f* è un movimento e *s* una semiretta di origine *A*, *f*(*s*) è una semiretta di origine *f*(*A*) (da questo assioma segue la proprietà di trasporto dell'angolo)
- Se in un movimento restano fermi tre punti non allineati, il movimento è una funzione identica.

Per definizione, due figure sono congruenti quando esiste un movimento che trasforma l'una nell'altra.

Schema di Choquet

Tra i vari approcci che si sono ricordati precedentemente è interessante quello del francese Jean Dieudonné che riconduce lo studio della geometria allo studio delle strutture algebriche e presenta $\Re_2$ e $\Re_3$ in termini di spazi vettoriali, sottospazi, matrici, forme lineari, ... Dal punto di vista culturale la geometria viene conglobata nell'algebra e perde la sua autonomia; dal punto di vista didattico sono cancellate quelle abilità, come la percezione spaziale, tipiche dell'impostazione tradizionale. Esiste tutta una letteratura che discute l'impatto didattico di questo progetto che, lanciato con il libro *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* del 1964, voleva dare grandeimpulso al movimento della cosiddetta matematica moderna nato sotto l'influsso bourbakista. Già negli anni '70 si videro i limiti didattici di una tale impostazione, discussi, per esempio, nel celebre articolo (Thom, 1979).

Il lavoro del francese Choquet, nato con fini eminentemente didattici, rappresenta un compromesso fra l'idea di geometria intesa come struttura algebrica (spazio vettoriale su $\Re$, a due o tre dimensioni, munito di prodotto scalare) e quella classica; inoltre riprende anche la base metrica alla Birkhoff di cui diremo nel seguito.

In Choquet si parte da un insieme S, non vuoto, i cui elementi si chiamano *punti* e si suppone che esistano in S due sottoinsiemi propri, non vuoti, i cui elementi si chiamano rispettivamente *piani* e *rette*. Per questi elementi sono dati i seguenti quattro gruppi di assiomi:

I gruppo. *Postulati di incidenza*. Tra di essi c'è il postulato delle parallele; sono date le definizioni di proiezione parallela e obliqua.

II gruppo. *Postulati di ordine*.

III gruppo. *Postulati di struttura affine* (o di struttura additiva). Si definiscono, tra l'altro, omotetie, dilatazioni, simmetrie oblique, affinità, vettori, basi dello spazio vettoriale, prodotto scalare.

IV gruppo. *Postulati di struttura metrica*. Si definisce perpendicolarità, simmetria ortogonale, prodotto scalare, rapporto di proiezione.

I primi due gruppi corrispondono sostanzialmente al primo, secondo e quarto gruppo degli assiomi di Hilbert. Mentre la misura dei segmenti è già implicita negli assiomi, per gli angoli Choquet usa le simmetrie assiali; nella sua versione semplificata la definizione di angolo è «Per ogni punto O del piano α si chiama angolo di vertice O ogni rotazione intorno a O».

Geometria metrica

La geometria, che chiamerò per brevità *metrica*, è quella che ha avuto il maggior impatto tra le alternative al sistema hilbertiano. Nel seguito se ne discutono alcuni aspetti caratterizzanti. Da (Birkhoff, 1932) riporto i postulati della geometria piana metrica.

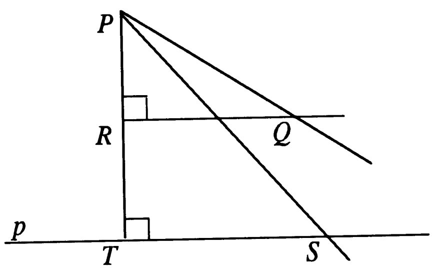
- Elementi non definiti e relazioni. (a) *punti*, A, B, ...; (b) insiemi di punti detti rette, m, n, ...; (c) *distanza* tra due punti: $d(A, B)$ è un numero reale non negativo con $d(A, B) = d(B, A)$; (d) *angolo* formato da tre punti nell'ordine A, O, B, ($A \neq 0$, $B \neq 0$): $\angle AOB$ è un numero reale (mod 2π). O è detto il vertice dell'angolo.
- Postulato I. (*Postulato della misura della retta*, nell'insegnamento diventato il *postulato del righello*). I punti A, B, ... di una retta m possono essere messi in corrispondenza 1-1 con i numeri reali x in modo che $|x_B - x_A| = d(A, B)$ per tutti i punti A e B.
- Definizioni. Un punto B è *tra* A e C, ($A \neq C$), se $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$. I punti A e C con i punti B tra A e C formano il *segmento AC*. La *semiretta m'* di origine O è definita da due punti O, A della retta ($A \neq O$) come l'insieme di tutti i punti A' di m tali che O non è tra A e A'. Se A, B, C sono tre punti distinti si dice che i tre segmenti AB, BC, CA formano un *triangolo* ΔABC con *lati AB, BC, CA* e *vertici A, B, C*. Se A, B, C sono su una stessa retta, ΔABC si dice *degenere*, altrimenti *non degenere.*
- Postulato II. (*Postulato punto-retta*). Una e una sola retta contiene due dati punti P, Q ($P \neq Q$). Se due rette distinte non hanno punti in comune si dicono *parallele*. Una retta si considera sempre parallela a se stessa.
- Postulato III. (*Postulato della misura dell'angolo*). Le semirette m, n ... uscenti da

un punto O possono essere messe in corrispondenza 1-1 con i numeri reali a (*mod* 2π) cosicché se $A \neq O$ e $B \neq O$ sono punti di m e n, rispettivamente, la differenza $a_n - a_m$ (mod 2π) è $\angle AOB$.
- Definizioni. Si dice che due semirette m, n uscenti da un punto O formano un angolo *piatto* se $\angle mOn = \pi$. Si dice che due semirette m, n uscenti da un punto O formano un angolo *retto* se $\angle mOn = \pm\pi/2$, nel qual caso si dice anche che m è *perpendicolare* a n.
- Postulato IV. (*Postulato di similitudine*). Se in due triangoli ΔABC e $\Delta A'B'C'$ e per una costante $k > 0$, $d(A', B') = kd(A, B)$, $d(A', C') = kd(A, C)$ e $\angle B'A'C' = \pm \angle BAC$, allora anche $d(B', C') = kd(B, C)$, $\angle C'B'A' = \pm \angle CBA$ e $\angle A'C'B' = \pm \angle ACB$.
- Definizioni. Due figure si dicono *simili* se esiste una corrispondenza 1-1 tra i punti delle due figure tale che tutte le distanze corrispondenti sono in proporzione e i corrispondenti angoli sono uguali o opposti gli uni agli altri. Due figure sono congruenti se $k = 1$.

Nella geometria metrica l'ordinamento, la congruenza di segmenti e di angoli sono definiti in termini di distanza e misura di angoli. I postulati di ordinamento sono dimostrati a partire dall'assioma del righello in termini di distanza. Il primo criterio di uguaglianza è dato come postulato, la congruenza dei triangoli si traduce in uguaglianza di distanze (i tre lati corrispondenti) e di misure di angoli (i tre angoli corrispondenti). Analogamente i postulati di congruenza diventano teoremi.

Vale la pena di riflettere come la stessa geometria possa essere sviluppata a partire da assiomi diversi. Per esempio, si voglia provare che gli angoli opposti al vertice sono uguali. Nella geometria metrica ci si appoggia alla misura, in quella sintetica si devono provare dei teoremi preliminari. Analogamente accade nella trattazione delle disuguaglianze di segmenti. La continuità della retta si appoggia su quella dei reali. Risulta facile dimostrare il teorema delle intersezioni retta-cerchio e di due cerchi.

Nel seguente esempio vediamo come il postulato delle parallele diventi un teorema nella assiomatizzazione di Birkhoff.



Sono dati il punto P e la retta p non contenente P. Sia Q un punto tale che la retta PQ formi un angolo acuto con la perpendicolare PT a p. Consideriamo la retta QR perpendicolare a PT, sia S un punto di p tale che TS soddisfi la condizione $PR : RQ = PT : TS$. Consideriamo la retta PS. Il triangolo ΔPRQ è simile al triangolo ΔPTS (per il postulato IV) e dunque $\angle RPQ = \angle TPS$. La retta PQ coincide con la retta PS e dunque interseca p.
Il sistema di Birkhoff fu modificato e adottato in un testo scolastico. Il sistema di assiomi SMSG (1961, *School Mathematics Study Group: Geometry*, Yale University Press) cerca di combinare le idee di Hilbert e di Birkhoff in una forma adatta al livello scolastico secondario e di dare le basi per una introduzione precoce della geometria analitica. Tra le caratteristiche apprezzabili di questa presentazione c'è l'attenzione all'uso corretto di simboli e definizioni. Per esempio si fa una netta distinzione tra un segmento (insieme di punti) e la sua lunghezza (un numero reale), tra un angolo (insieme di punti) e la sua misura (un numero reale). Due segmenti sono uguali se sono la stessa cosa, sono congruenti se le loro lunghezze sono uguali. Allora se $d(AB)$ è uguale al $d(A'B')$ e $d(CD)$ è uguale a $d(C'D')$ allora $d(AB) + d(CD) = d(A'B') + d(C'D')$. Ma anche se AB è congruente a $A'B'$ e CD è congruente a $C'D'$ non è detto che l'unione di AB e CD sia congruente all'unione di $A'B'$ e $C'D'$.

Riassumiamo le osservazioni precedenti sottolineando alcuni elementi caratterizzanti i due approcci.

- La *struttura di base* consiste di:
  - S, L, P termini non definiti punti, retta, piano (in entrambe le strutture)
  - d e m, funzioni a valori reali definite per coppie di punti e angoli (nell'approccio metrico)
  - τ, $\cong$ (nell'approccio sintetico)
- La *distanza e la misura degli angoli* sono date dalla struttura nell'approccio metrico, non sono nominate in quello sintetico
- Le *congruenze di segmenti e di angoli* sono definite in termini di distanza o di misura in gradi nell'approccio metrico, sono date dalla struttura in quello sintetico
- Le *proprietà delle congruenze* sono trovate mediante teoremi nell'approccio metrico, stabilite dai postulati in quello sintetico
- L'*addizione* è calcolata con il numero $d(AB)$ nell'approccio metrico, calcolata con le classi di congruenza $[AB]$ in quello sintetico
- Le disequazioni sono definite mediante numeri, $d(AB) < d(CD)$ nell'approccio metrico, definite mediante classi di congruenza $[AB] < [CD]$ in quello sintetico

In (Moise, 1963) si dice esplicitamente che uno dei vantaggi dello schema metrico è il permettere di parlare semplicemente, logicamente e in maniera comprensibile, tutto nello stesso tempo. Negli Stati Uniti la geometria metrica è trattata in molti testi. Nel libro di testo (Moise & Downs, 1982) sono sottolineati questi elementi a sostegno di questa scelta:

– i numeri sono la prima esperienza matematica
– la geometria è un terreno di base per sviluppi futuri, per esempio, nella geometria analitica. Quest'ultima è automaticamente metrica.
– nella geometria metrica i salti logici sono più alla portata degli studenti di quelli della geometria sintetica.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Marchi, M.: 1984, 'Aspetti educativi di una presentazione assiomatica della geometria', *Nuova secondaria*, n.6, 66-69 e n.8, 81-81.

Moise, E. E.: 1964, *Elementary geometry from an advanced standpoint*, Addison-Wesley, Reading MA.

Thom, R.: 1979, 'La matematica moderna: esiste?', in C. Sitia (editor), *La didattica della matematica oggi*, 111-129; traduzione dell'articolo in A. G. Howson (editor), *Proceedings ICME 2* (Exeter, 1972), 194-209.

Zeitler, H.: 1990, 'Axiomatics of geometry in school and in science', *For the learning of mathematics*, v.10, n.2, 17-24.

Per i sistemi di assiomi

Birkhoff, G. D.: 1932, 'A set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor', *Annals of mathematics*, s.2 v.33, 329-345.

Choquet, G.: 1967, *L'insegnamento della geometria*, Feltrinelli, Milano; trad. it. di *L'enseignement de la géométrie*, Hermann, Paris, 1964.

Fraiese, A. & Maccioni, I.: 1970, *Elementi di Euclide*, UTET, Torino, (prima edizione).

Hilbert, D.: 1970, *Fondamenti della geometria con i supplementi di Paul Bernays*, Feltrinelli, Milano; trad. it. di *Grundlagen der Geometrie*, decima edizione, Teubner, Stuttgart, 1968.

Per le altre assiomatizzazioni citate nel testo vedere, ad esempio, la bibliografia in (Zeitler, 1990).

4. LA FILOSOFIA DI LAVORO

Nell'elaborare le proprie decisioni (culturali e didattiche) l'insegnante ha un unico riferimento oggettivo, i programmi ufficiali. Altri fattori, che potremmo definire contingenti, condizionano le scelte: la tradizione, le risorse (libri di testo, laboratorio matematico e/o informatico, …), lo scenario (il tipo di studenti, il tipo di scuola, il contesto sociale, …). Infine un'altra categoria di fattori, che chiameremo interni, entra in gioco occultamente, ma in maniera significativa: la concezione della matematica e del suo insegnamento. Mi sembra opportuno riflettere su questo punto, non per fare un esame di coscienza (che non è necessario e non è richiesto), ma per mettere a fuoco un importante elemento che condiziona le scelte.

Questa forma di *metacognizione* dovrebbe aiutare gli insegnanti a rendere espliciti certi modi inconsci di pensare e a prendere coscienza dei meccanismi che li portano a determinate decisioni. Ciò è importante perché nel progettare un itinerario didattico si devono risolvere problemi cruciali (cercare le motivazione internamente o esternamente alla matematica, partire dalla teoria generale o partire da casi particolari, usare il metodo deduttivo o quello empirico basato sull'evidenza, …) e la soluzione giusta non è un dato a priori, ma è semplicemente quella 'armonica' con le opinioni dell'insegnante.

ATTIVITÀ PROPOSTE

1. *Commentare i seguenti aforismi:*
«La matematica è un gioco giocato secondo certe semplici regole con dei segni senza significato sul foglio» (David Hilbert)
«La matematica può essere definita come la materia in cui non sappiamo mai di che cosa parliamo, né se ciò che stiamo dicendo è vero» (Bertrand Russell).

2. *Leggere le seguenti affermazioni sulla natura della matematica e dire quale può essere maggiormente condivisa. Se nessuna si adatta a ciò che il lettore pensa, scrivere una propria affermazione.*
Platonismo da (Zeitler, 1990): Gli oggetti matematici - e dunque tutta la matematica - esistono sempre, al di là di ogni contesto temporale e indipendentemente dall'essere umano. Il compito dei matematici è decifrarli e investigare queste verità. Il matematico è uno scopritore più che un inventore.
Formalismo da (Zeitler, 1990): La matematica è una collezione di sistemi formali i cui elementi sono manipolati e combinati secondo specifiche regole del gioco, Queste regole del gioco, le definizioni e le dimostrazioni di teoremi, sono il solo interesse del matematico. Il formalista è un inventore e non uno sco-

pritore. Per lui la questione dell'esistenza degli oggetti matematici non si presenta. Per lui basta provare che le sue regole del gioco non portano a contraddizione.
Costruttivismo (*Intuizionismo*) da (Zeitler, 1990): La matematica è ammessa nella misura in cui i suoi oggetti sono costruiti a partire da certi oggetti di base primitivi in un numero finito di passi. La questione della costruttibilità è l'interesse predominante e permanente di chi aderisce a questa posizione.
Fallibilismo da (Ferrari, 1995): «La conoscenza matematica non è assoluta, ma fallibile e correggibile e la formalizzazione non assolve il suo ruolo di garanzia ma piuttosto intralcia lo sviluppo della conoscenza. Inoltre lo sviluppo della matematica è parallelo a quello delle scienze naturali; in matematica come nelle scienze naturali l'accento non è nella trasmissione della verità da premesse vere a conclusioni, ma nella ritrasmissione di falsità da conclusioni falsificate (i falsificatori) a premesse ipotetiche. A parte contraddizioni formali come $p \wedge \neg p$, i potenziali falsificatori di una teoria sono i teoremi informali della preesistente (assunta) teoria informale. Nella visione fallibilista la matematica informale è di importanza cruciale, perché come prodotto è la sorgente di tutta la matematica formale».

3. *Qui di seguito sono esposte alcune opinioni sull'insegnamento, graduare da 1 (la favorita) a 5, mettendo 0 per le opinioni che non si condividono, eventualmente aggiungendo un commento se non si è d'accordo con nessuna*:
– Molti esercizi su un certo argomento aiutano a acquisire la conoscenza di quel tema.
– La matematica è meglio appresa se è insegnata non come una disciplina separata, ma 'incidentalmente', cioè risolvendo problemi in situazioni non necessariamente matematiche.
– La matematica non è prodotto, ma un processo di cui gli studenti devono fare esperienza durante la lezione trattando le situazioni problematiche e arrivando a scoprire gli andamenti e le strutture unificanti.
– Una buona esposizione degli argomenti può generare negli studenti motivazione, fiducia e desiderio di apprendere.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Bruner, J.: 1995, 'On learning mathematics', *Mathematics teacher*, v.88, 330-335 (ristampa di un articolo del 1960).

Ferrari, P. L. 1995, 'Constructivism, education and the philosophy of mathematics', in IREM de Montpellier (editor), *History and epistemology in mathematics education. First European summer university proceedings* (Montpellier, 1993), 415-423.

Gadanidis, G.: 1994, ‘Deconstructing constructivism’, *Mathematics teacher*, v.87, 91-95.
Garofalo, J.: 1987, ‘Metacognition and school mathematics’, Arithmetic teacher, v.34, n. 9, 22-23.
Speranza, F.: 1995, ‘Aspetti matematici e fisici dell’epistemologia della matematica’, *NUMI*, a.22, supplemento al n.8-9, 115-121.

5. SUGLI OBIETTIVI: PERCHÉ INSEGNARE GEOMETRIA

Cominciamo a considerare per quali ragioni e/o con quali obiettivi si dovrebbe insegnare geometria. Riporto le risposte che ho trovato in vari autori.

In (Usiskin, 1995) troviamo:
1. La geometria collega la matematica con il mondo fisico reale
2. La geometria permette di visualizzare idee di altri settori della matematica
3. La geometria offre un esempio di sistema matematico.

In (Sitia, 1994) sono riportate alcune idee esposte in un lavoro di H. G. Bigalke del 1978:
1. La geometria sviluppa le capacità intuitive spaziali e la rappresentazione funzionale del pensiero
2. La geometria stimola il bisogno della dimostrazione
3. La geometria sviluppa le capacità grafiche e linguistiche
4. La geometria risveglia la curiosità geometrica mediante la posizione di problemi interessanti e stimolanti.

In (Villani, 1994) si trovano i seguenti obiettivi (secondo l’autore, le scelte su di essi sono collegate alla concezione sulla geometria):
1. Favorire lo sviluppo dell’intuizione spaziale
2. Introdurre una terminologia univoca e precisa
3. Presentare una serie di fatti geometrici (formule, regole mnemoniche, enunciati di teoremi, ...) in vista di successive applicazioni
4. Allenare a risolvere esercizi e problemi
5. Abituare al ragionamento su parti circoscritte della teoria
6. Dare un esempio significativo di sistema ipotetico-deduttivo.

Nel suo progetto Giovanni Prodi indica questi obiettivi che l’insegnamento della geometria deve raggiungere:
1. Offrire un esempio di sistema deduttivo rigoroso
2. Offrire un’ampia gamma di esercizi che richiedono la messa in opera di particolari abilità
3. Costruire una descrizione matematica (e, come tale, assiomatica) di uno spazio, creando un supporto nel quale studiare i fenomeni fisici: in questo senso la geometria è vista come primo capitolo della fisica
4. Mantenere viva ed estendere l’intuizione spaziale e fornire strumenti di

rappresentazione; ciò implica tenere presente la grande economia di pensiero che permette la rappresentazione geometrica e l'importanza sempre crescente che assume nei vari settori della matematica.

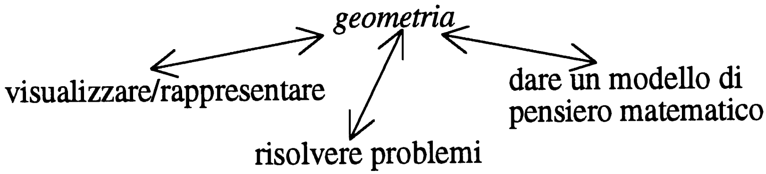
Nell'articolo (Vollrath, 1976), scritto in anni cruciali nella discussione didattica post-bourbakista, troviamo un'analisi dei vari ruoli che la geometria può ricoprire in un curriculum:

1. Geometria come origine di teorie matematiche
2. Geometria come origine di concetti e teoremi per costruire teorie
3. Geometria come origine di strategie per risolvere problemi
4. Geometria come origine di teorie per operare
5. Geometria come origine di teorie dello spazio
6. Geometria come risultato di problemi risolti
7. Geometria come origine di forme

Il documento preparatorio allo studio ICMI di Catania offre molti spunti per una discussione preliminare, così come l'articolo (Villani, 1995) dello stesso autore. Alcune conclusioni dell'incontro sono esposte in (Speranza, 1995):

> «Si sta diffondendo in tutto il mondo la sensazione che l'insegnamento della geometria come applicazione dell'algebra lineare sia insoddisfacente [...]. Buoni motivi per tali critiche sono gli insuccessi degli allievi; riportiamo brevemente alcune ragioni di natura più intrinseca, presentate durante il seminario.
>
> 1) La geometria è scienza dello spazio; ma lo spazio è una categoria molto complessa, che non si lascia ingabbiare entro schemi che valgano per tutti gli approcci. Ogni tentativo di razionalizzazione deve fare una scelta in proposito, e quindi mettere in luce certi aspetti a discapito di altri: per esempio, il programma di Erlangen (disgraziatamente trascurato al giorno d'oggi) ci dice che esistono 'molte geometrie', e che una loro sistematicità si può ritrovare a un metalivello.
>
> Una tendenza diffusa e in un certo modo spiegabile vorrebbe portare, per una disciplina scientifica, a una esposizione unitaria: ma la geometria è per sua natura complessa e non riducibile a un percorso unitario.
>
> 2) La geometria, a tutti i livelli, deve dare agli allievi una sensibilità spaziale, deve rafforzare la componente 'visualizzazione', del nostro modo di concepire il mondo, deve gettare un ponte fra sensibilità e razionalità: la strada puramente algebrica non permette questo.
>
> 3) La geometria presenta dei problemi di livello differente; l'algebra presenta dei teoremi (che non possono essere oggetto di ricerca individuale di un allievo di capacità medie) o esercizi di routine.
>
> 4) Le considerazioni precedenti non significano rigetto dello strutturalismo bourbakista: il suo vero valore sta nella visione unitaria della matematica classica, quando questa sia già conosciuta nelle sue linee essenziali. Questo percorso corrisponde al modo naturale di costruire il pensiero, muovendosi dal concreto all'astratto e non viceversa».

Concludo indicando gli obiettivi di base nell'insegnamento della geometria che mi sembra si possano enucleare dai vari interventi:



ATTIVITÀ PROPOSTE

Rispondere alle seguenti domande:

1. *Fra i libri di testo attualmente in circolazione quali preferisci limitatamente all'approccio alla geometria?*

....

....

2. *Che cosa motiva la scelta*?

....

....

....

3. *Di quali non condividi in alcun modo l'approccio alla geometria?*

....

....

4. *Per quali ragioni*?

....

....

....

....

5. *Nella scelta di un argomento quali elementi consideri (Graduare da 1 - il preferito - a 3; 0 se un elemento non è assolutamente considerato)?*

[A___] La sua rilevanza per interagire con la società

[B___] La sua rilevanza per il futuro lavoro nella matematica o nelle applicazioni

[C___] La sua rilevanza per condividere la razionalità della matematica

[D___]

....

....

....

6. *Nella scelta di un argomento quali elementi consideri (Graduare da 1 - il preferito - a 3; 0 se un elemento non è assolutamente considerato)?*
[A___] Quanto gli studenti faticheranno a capirlo
[B___] Quanto sono in grado di applicarlo a nuove situazioni
[C___] Quanto sono in grado di ripeterlo
[D___]
....
....
....
....

7. *Graduare le preferenze sui seguenti obiettivi dell'insegnamento della geometria (da 1- il preferito - a 3; 0 se un elemento non è assolutamente considerato).*
[A___] Visualizzare
[B___] Dimostrare
[C___] Risolvere problemi
[D___]
....
....
....
....
....
....

8. *Graduare le preferenze sulla seguente concezione della geometria (da 1- il preferito - a 3; 0 se un elemento non è assolutamente considerato).*
[A___] Disciplina qualificata dai suoi oggetti o dai contenuti delle sue proposizioni
[B___] Disciplina specificata soprattutto dalle sue procedure
[C___] Disciplina fondata sull'evidenza di un'esperienza esterna
[D___]
....
....
....
....

NOTA. Alcune di queste domande, con opportuni adattamenti, potrebbero essere poste agli studenti alla fine del corso di geometria.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Mammana, C. (editor): 1995, *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century*, Department of mathematics, University of Catania.

Osimo, G.: 1994, 'Insegnare matematica', *Lettera PRISTEM*, n.11, 61-61.

Sitia, C.: 1994, 'Insegnamento della geometria', *Lettera PRISTEM*, n.13, 31.

Speranza, F.: 1995, 'Per il dibattito sulla geometria', *Lettera PRISTEM*, n.16, 31-32.

Speranza, F.: 1995, 'Sull'insegnamento della geometria', *Manoscritto*.

Usiskin, Z.: 1995, 'What should not be in the algebra and geometry curricula of average college-bound students?', *Mathematics teacher*, v.88, 156-164.

Villani, V.: 1995, 'L'insegnamento pre-universitario della geometria', *NUMI*, a. 22, supplemento al n.8-9, 29-44.

Vollrath, H. J.: 1976, 'The place of geometry in mathematics teaching: an analysis of recents developments', *Educational studies of mathematics*, v.7, 431-442.

6. DIMOSTRARE

Nel linguaggio comune di solito si usano parole inerenti la matematica con attitudine positiva («è matematico» per «è certo», «manovra euclidea» nel calcio per «manovra precisa e razionale») o con benevola, ma in fondo rispettosa, presa di distanza («per me è algebra» per «non capisco»). Mi viene in mente un solo traslato di termine matematico completamente negativo, l'uso del termine «teorema» a proposito di certe indagini giudiziarie apparentemente inattaccabili dal punto di vista logico, le cui conclusioni non convincono. In effetti nella maggioranza dei casi questa è l'immagine della dimostrazione che resta agli studenti: qualcosa che appartiene all'esperienza cerebrale, ma non sensibile (o emotiva o sentimentale) e qualcosa vissuto passivamente per rispettare il contratto didattico. Un ricercatore in educazione matematica, John Mason, dice che dimostrare implica: - convincere un nemico, - convincere un amico, - convincere se stessi. Dalle esperienze da noi condotte in questo campo mi sembra realistico inferire che la successione che si riscontra nella pratica scolastica è: - convincere un nemico (da identificarsi con l'insegnante), - convincere un amico, - convincere se stessi. Anzi aggiungo che dubito che nella norma si realizzi nei riguardi dello studente ciò che Giuseppe Peano auspica quando definisce la dimostrazione (Peano, 1901, p.166): «Una dimostrazione ha in generale lo scopo di persuadere della verità d'una proposizione».

Dietro al termine *dimostrazione* si celano molte attività di natura diversa di cui la dimostrazione può essere vista come il momento finale. Per 'entrare nel problema' proviamo a associare a *dimostrare* alcuni termini che hanno una qualche relazione, senza essere necessariamente dei sinonimi: argomentare, mostrare, provare, congetturare, astrarre, generalizzare, dedurre, inferire, indurre, cercare, inventare, creare, modellizzare, discernere, prevedere, analizzare, ... Suggerisco al lettore di trovarne altri. Le accezioni differenti con cui il termine è utilizzato hanno una loro ragione in primo luogo nella profonda evoluzione storica di questo concetto: restando alla cultura occidentale basti pensare al referente che il termine linguistico dimostrazione aveva presso i Greci e quello individuato da Hilbert. Anche i differenti punti di vista sulla funzione della dimostrazione intervengono in questa varietà di accezioni: *dimostrare* come *vedere*, *dimostrare* come *giustificare*, *dimostrare* come *spiegare*, *dimostrare* come *convincere*, *dimostrare* come *argomentare*, *dimostrare* come *scoprire*, ...

Se scorriamo i programmi dei vari ordini scolari vediamo che si arriva alla dimostrazione con estrema cautela, passando per un preliminare apprendistato in varie attività preparatorie:

> - raccogliere elementi, catalogare, organizzare gli elementi raccolti (attività suggerite nella scuola elementare)
> - «considerare criticamente affermazioni ed informazioni, per arrivare a convinzioni fondate e a decisioni consapevoli» (Scuola media di primo grado: Indicazioni per scienze matematiche, chimiche, fisiche e naturali. 1. Obiettivi, p. 37[6])
> - «suscitare un interesse che stimoli le capacità intuitive degli alunni;
> condurre gradualmente a verificare la validità delle intuizioni e delle congetture con ragionamenti via via più organizzati» (Scuola media di primo grado: Indicazioni per la matematica. 1. Obiettivi, p.39).

Con prudenza e circospezione nei programmi parole collegate a dimostrare compaiono al biennio delle superiori:

> - «dimostrare proprietà di figure geometriche
> [...] riconoscere concetti e regole della logica in contesti argomentativi e dimostrativi» (Matematica ed informatica. Obiettivi di apprendimento, p.160)
> - «Lo studio della geometria nel biennio ha la finalità principale di condurre progressivamente lo studente dalla intuizione e scoperta di proprietà geometriche alla loro descrizione razionale e rappresenta come tale una guida privilegiata alla consapevolezza argomentativa. A ciò il docente può pervenire adottando un metodo che, facendo leva sulle conoscenze intuitive apprese dall'allievo nella scuola media, proceda allo sviluppo razionale di limitate catene di deduzioni; è tuttavia necessario che ogni ipotesi o ammissione cui si fa ricorso sia chiaramente riconosciuta e formulata in modo esplicito, quali che siano le ragioni che inducono ad assumerla tra i punti di partenza del ragionamento.

[6] Le citazioni dai programmi della scuola secondaria di primo grado sono presi da (Il Gruppo E, 1979), quelle dai programmi della scuola secondaria di secondo grado da (Studi, 1991) e riguardano i Programmi della Commissione Brocca.

Al docente compete poi l'impegno di avviare la fase euristica su processi di assiomatizzazione partendo da semplici situazioni assunte nei vari campi. Ciò nelle prospettiva di familiarizzare gli studenti col metodo ipotetico-deduttivo e pervenire negli eventuali studi successivi alla costruzione di un sistema di assiomi per la geometria elementare. A tal fine è bene programmare, in un quadro di riferimento organico, una scelta delle proprietà (teoremi) delle figure piane da dimostrare, utilizzando la geometria delle trasformazioni oppure seguendo un percorso più tradizionale» (Commento ai singoli temi. Tema 1: Geometria del piano e dello spazio, p.165)

- «*Lo studio del calcolo combinatorio si limita alle disposizioni, permutazioni, combinazioni e loro proprietà principali; il docente può approfittarne, tra l'altro, per abituare lo studente a dimostrazioni di tipo algebrico*» (Commento ai singoli temi. Tema 3: Relazioni e funzioni, Programma forte, p.167)
- «Gli elementi di logica non devono essere visti come una premessa metodologica all'attività dimostrativa, ma come una riflessione che si sviluppa man mano che matura l'esperienza matematica dello studente. Fin dall'inizio bisogna abituare lo studente all'uso appropriato del linguaggio e delle formalizzazioni, a esprimere correttamente le proposizioni matematiche e a concatenarle in modo coerente per dimostrare teoremi, mentre solo nella fase terminale del biennio si può pervenire allo studio esplicito delle regole di deduzione» (Commento ai singoli temi. Tema 5: Elementi di logica e informatica, p. 169).

Non mi soffermo sui programmi del triennio, che non sono ancora definiti; osservo comunque che un certo grado di astrazione, generalizzazione e formalizzazione è presente nelle formulazioni per i vari orientamenti.

A fronte di questi suggerimenti contenuti nei programmi e delle motivazioni di tipo culturale a favore di un posto di rilievo delle attività dimostrative nella formazione matematica[7] c'è la constatazione delle difficoltà incontrate dagli studenti nello sviluppare tali attività. La letteratura su queste difficoltà è molto vasta; all'interno del nostro gruppo abbiamo prodotto vari lavori sul tema, di cui riporto alcuni elementi che possono aiutare la discussione.

Per dare un riferimento alle nostre considerazioni diamo una schematizzazione di base dell'attività dimostrativa in classe.

ATTIVITÀ	ELEMENTI IN GIOCO
capire un testo matematico	• abilità logico-linguistiche di interpretare il significato di parole e concetti in relazione al contesto matematico • capacità di seguire i passi di un ragionamento fatto da altri (insegnanti, manuali, ...)

[7] Si veda un elenco di queste motivazioni in (Ciceri, Furinghetti & Paola, in stampa).

ripetere una dimostrazione	• uso non ambiguo ed efficiente del linguaggio colloquiale • uso corretto del linguaggio matematico • uso autonomo delle connessioni semantiche • trasmissione e spiegazione ad altre persone
produrre autonomamente una dimostrazione	• produzione di congetture • scelta tra differenti congetture • produzione autonoma di procedure per dedurre la verità di un enunciato da un altro

Le precedenti attività concernono prestazioni intellettuali differenti. Nelle prime due le difficoltà incontrate dagli studenti sono di tipo *logico* e *linguistico*, nella terza attività ci sono anche difficoltà di tipo *euristico*, incontrate ai diversi livelli scolari, quando l'uso informale di idee precede la loro analisi logica e gli studenti tentano di produrre argomenti convincenti in situazioni pratiche.

Passiamo ora a discutere qualche aspetto specifico della dimostrazione in geometria. In primo luogo tentiamo un confronto tra la dimostrazione in geometria e quella in algebra. Per tradizione la geometria è stata sempre considerata il terreno ideale per dimostrare, l'algebra essendo l'ambito privilegiato per svolgere esercizi 'di routine'. La conseguenza è che gli studenti hanno un certo addestramento psicologico all'idea di dimostrare in geometria, mentre in algebra la loro idea di dimostrare si scontra con l'idea che hanno dell'algebra come manipolazione.

In linea di massima le dimostrazioni in algebra sono più semplici: poggiano su concatenazioni simboliche abbastanza note, ciò che si chiede di dimostrare di solito è chiaro, non c'è la turbativa del disegno che può aiutare, ma anche sviare. Gli enunciati in algebra hanno il vantaggio di una certa semplicità di fondo, mentre in geometria hanno una forma discorsiva in cui talvolta manca 'l'indicatore di premessa' (se ...) e non sempre l'ipotesi e la tesi risultano ben individuate (anche se non è più molto usata la presentazione nella forma 'condizione necessaria e sufficiente' in cui la parola 'condizione' poteva essere percepita solamente con il significato di premessa). D'altra parte gli studenti hanno poca dimestichezza a tradurre in formule un enunciato del tipo «un numero pari divisibile per 3 è anche divisibile per 6» (anche perché in genere si cura poco questo aspetto) e viceversa a tradurre in linguaggio naturale e dare un senso alle espressioni risultato di un processo (per gli studenti in genere i passaggi algebrici portano a un risultato e basta).

La dimostrazione fatta in geometria è in qualche modo presentata (e percepita dallo studente) come parte di un quadro culturale globale per costruire una teoria, mentre le dimostrazioni in algebra sono percepite come fatti isolati che non si inseriscono in un disegno globale. Questo rende più ‘ricca’ la dimostrazione in geometria. La dimostrazione in algebra risulta più povera non solo per questo fatto, ma anche perché si presta di meno all’attività di argomentazione. In esperienze che abbiamo condotto in classe sulla dimostrazione abbiamo potuto confrontare vari atteggiamenti; uno studente ha esplicitamente sottolineato: «Che bisogno c’è di spiegare in algebra? In geometria è tutto diverso e più interessante». Questa frase esprime bene come una volta accettato il ‘formalismo senza significato’ dell’algebra possa riuscire difficile allo studente vedere la necessità di dimostrare. L’aspetto positivo di questo fatto è che lo studente, percependo il vero come collegato solo alla manipolazione, subisce meno l’interferenza dell’aspetto semantico nelle attività dimostrative. Va però osservato che in algebra permane una certa ambiguità di fondo poiché gli assiomi sono raramente esplicitati. Non è neppure chiaro allo studente che, anche se non si fa riferimento agli assiomi, quando si fa un calcolo in algebra, per esempio

(1) $$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a) ,$$

in realtà si sta provando un teorema sui reali, nel nostro esempio «Provare che la (1) vale per qualunque x e a reali».

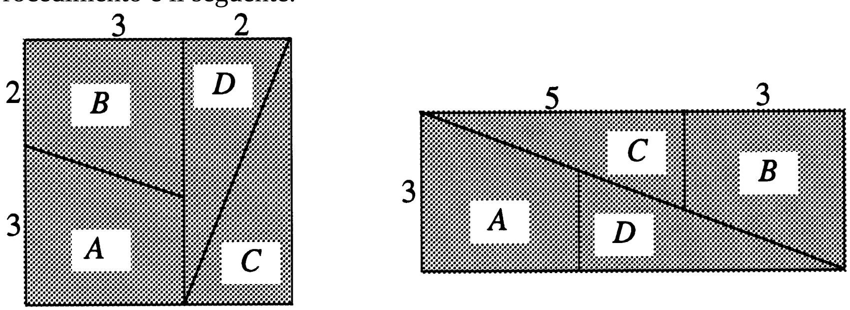
La dimostrazione in algebra è più povera anche perché è debole la possibilità di attivare registri diversi (disegno, metodo sintetico, metodo analitico, metodi empirici di misura, ...). Il segno in geometria (a questo livello di discussione possiamo trascurare l’importante distinzione tra figura e disegno) è soprattutto iconico, mentre il segno in algebra è soprattutto simbolico; quest’ultimo aspetto influenza fortemente le prestazioni in algebra. Nelle nostre esperienze abbiamo visto che l’attivazione di un metodo grafico/iconico nelle dimostrazioni in algebra è molto rara. Avendo proposto a due classi di liceo l’esercizio «Trovare la somma dei primi n numeri interi» solo uno studente ha usato una rappresentazione iconica per risolvere il problema. Confronto questo dato con i risultati della ricerca didattiche: per esempio in (Hanna, 1989) è espressamente fatta la distinzione fra ‘dimostrazioni che spiegano’ e ‘dimostrazioni che provano’ e tra queste è messa la dimostrazione iconica del problema della somma dei numeri interi. Nell’ottica della dimostrazione che spiega molti insegnanti hanno fatto l’esperienza positiva di usare il metodo della rappresentazione geometrica risalente già ai Babilonesi per introdurre (e/o spiegare, motivare) alcuni processi di calcolo in algebra (quadrato del binomio, …)[8]. Sulla validità di questi mezzi didattici sono assolutamente d’ac-

[8] Per esempi storici su questi argomenti vedi (Bottazzini, Freguglia & Toti Rigatelli, 1992).

cordo, anche in coerenza con le mie convinzioni sull'uso della storia in classe; le perplessità, cui ho già accennato nella mia nota (Furinghetti, 1995), riguardano piuttosto la capacità di uso *autonomo* del linguaggio iconico da parte degli studenti. Trovo che le ricerche su questo punto sono ancora insufficienti. Le esperienze che abbiamo fatto ci portano a pensare che, in realtà, anche in un ambito prettamente geometrico, lo studente sia restio ad attivare il registro figurativo. Suggerisco agli insegnanti di studiare con opportune prove se davanti a un problema di geometria euclidea lo studente parte subito con uno schizzo e poi progetta le strategie risolutive o viceversa. Noi abbiamo fatto questa esperienza con i problemi di geometria analitica nello spazio e abbiamo constatato che i buoni risolutori individuano la strategia risolutiva aiutandosi preliminarmente con un disegno, mentre gli altri tendono a innestare gli automatismi manipolativi del trattamento analitico. Questo atteggiamento è risultato accentuato quando sono usati i vettori. Gli studenti hanno anche difficoltà a capire quando è o non è rilevante ai fini dell'individuazione della strategia risolutiva il rappresentare oltre che la figura da studiare anche gli assi del riferimento cartesiano negli schizzi preliminari per impostare la soluzione. Paradossalmente nelle situazioni descritte si potrebbe parlare di un ribaltamento di funzione per cui la rappresentazione grafica è spesso un punto di arrivo nel processo risolutivo di un problema o nell'elaborazione di un concetto, poiché quando lo studente fa una buona rappresentazione della situazione da studiare ha già chiari i concetti o procedimenti.

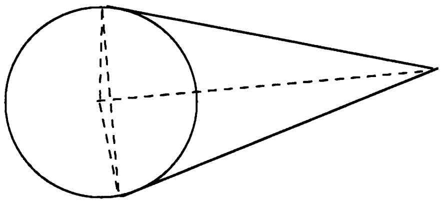
L'uso della figura nella dimostrazione è uno specifico dell'ambito geometrico; da una parte è incoraggiato, dall'altra in questo uso si vedono dei pericoli. Consideriamo i seguenti esempi.

Esempio 1. Nel questionario discusso in (Bosco et alii, 1995) è ripreso un noto 'giochino', si veda (Dubnov, 1965), con cui si dimostra che 25 = 24. Il procedimento è il seguente.



Si scompone un quadrato di lato 5 in due trapezi rettangoli uguali (*A* e *B*) e in due triangoli rettangoli uguali (*C* e *D*), nel modo illustrato a sinistra nella figura; disponendo diversamente le parti *A*, *B*, *C* e *D* si ottiene il rettangolo raffigurato a destra.

Esempio 2. In (Schoenfeld, 1987) è riportata la seguente esperienza.



A studenti di livello scolare equivalente al nostro triennio che avevano seguito un corso di un anno di geometria è richiesto di usare la riga e il compasso per costruire il cerchio tangente a due rette intersecantisi, con il punto di tangenza dato su una delle due rette. Gli studenti avevano precedentemente provato che il centro di un cerchio tangente a due rette date sta nell'intersezione della bisettrice dell'angolo formato dalle due rette e sulle perpendicolari a queste rette dal punto di tangenza.

Malgrado questo il 30% degli studenti afferma che il centro è il punto medio della congiungente i due punti di tangenza, basandosi sulla figura.

In entrambi questi esempi abbiamo un uso mistificante della figura, ma il tipo di errore a mio parere ha origini del tutto diverse. Nel primo caso possiamo parlare di 'mal riposta fiducia' non tanto nella visualizzazione, quanto nel contratto didattico. Infatti lo studente, davanti a un disegno apparentemente così accurato, ha fiducia nell'insegnante e non prende in considerazione la possibilità dell'esistenza di un trabocchetto. Il procedimento presentato è artificioso e mi sembra di poter dire che nessuno studente lo avrebbe pensato spontaneamente, anzi, paradossalmente, direi che non sarebbe del tutto negativo il comportamento di uno studente che concepisse un simile procedimento, anche se non corretto. La pratica scolastica offre una vasta gamma di errori ben più complessi, senza che si debba inventarne degli artificiosi.

Nel secondo esempio l'errore è dovuto a un uso mistificante del disegno, indotto da un comportamento che riguarda il problema del dimostrare in generale. Per molti studenti, dice Alan Schoenfeld in un suo lavoro del 1986, deduzione e metodi empirici sono ambiti separati con differenti modi di stabilire la correttezza.

Oltre che la mal riposta fiducia nella figura e il suo uso mistificante, un altro aspetto tipico della dimostrazione geometrica è l'influenza degli stereotipi grafici, indotti dalle figure presentate dai libri di testo o dall'insegnante, ma anche dall'uso di fogli quadrettati che incoraggia la disposizione di triangoli rettangoli, quadrati ecc. in determinate posizioni. Su questo argomento esiste una vasta letteratura, in Italia ricordo i lavori del tipo (Gallo, 1994). Nei nostri lavori sulle ‘concezioni preesistenti’ degli studenti abbiamo rilevato in vari ambiti l’influenza degli stereotipi (linguistici, grafici, ...). Uno dei punti di forza del calcolatore dovrebbe essere proprio quello di dare facile accesso a una vasta gamma di figure e situazioni. Anche alcuni accorgimenti nel lavorare possono facilitare la creazione di situazioni più variate. Per esempio, se nel disegnare un triangolo si parte da tre punti del piano invece che da tre rette si arriva a triangoli non somiglianti a triangoli isosceli. A proposito degli stereotipi vorrei osservare che essi non devono essere demonizzati oltre una certa misura. In primo luogo ci sono spiegazioni pratiche e fisiologiche per rappresentare certe figure in determinate posizioni (si pensi alla scomodità di lavorare con assi cartesiani ortogonali non paralleli ai bordi del foglio), in secondo luogo talvolta è proprio lo stereotipo (come modello di una situazione nota) che aiuta a risolvere un problema nuovo.

Nel questionario (Bosco et alii, 1995) ci si chiede se le dimostrazioni nell’insegnamento debbano essere un oggetto di attività conoscitive o strumento conoscitivo? Bisogna distinguere tra dimostrazioni complete condotte all’interno di una teoria e incomplete come quelle di enunciati che si incontrano a scuola. Le prime sono uno strumento raffinato per matematici professionisti, inaccessibili a uno studente normale. Le seconde, se riferite a fatti non banali, hanno un valore conoscitivo. Mi sembra che nel biennio le dimostrazioni debbano essere uno strumento conoscitivo (poche, ma significative). Poi con la maturazione dello studente la dimostrazione può (in casi opportunamente studiati) anche diventare oggetto di attività conoscitiva (classificazioni di dimostrazioni, analisi logica di dimostrazioni, regole di inferenza).

Mi sembra che l’attività dimostrativa condotta con opportune cautele abbia un valore sociale indotto dalla necessità di esplicitare e condividere le regole e aiuti lo studente a sviluppare quella metacognizione a livello personale di cui si è già detto, cioè una consapevolezza di come si costruisce la conoscenza matematica e di quali sono le proprie difficoltà[9].

[9] In questa sede ho tralasciato l’esposizione di teorie psicologiche sull’apprendimento. Per una sintesi rimando a (Battista & Clements, 1995); (Johnson-Laird, 1994); (Olive, 1991).

ATTIVITÀ PROPOSTE

1. [10] *Quale è la tua opinione sulle capacità seguenti (Precisare a quale livello scolare ci si riferisce)?*

• Saper ripetere una spiegazione	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]
• Saper fare un esercizio analogo ad altri già fatti	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]
• Saper fare una dimostrazione analoga ad altre già fatte	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]
• Saper applicare una spiegazione appena udita alla soluzione di un esercizio	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]
• Anticipare con un ragionamento deduttivo lo sviluppo di una spiegazione	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]
• Generalizzare una proprietà	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]
• Sapersi destreggiare in un esercizio o in una dimostrazione assolutamente nuovi	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]
• Saper utilizzare le nozione acquisite per costruire un modello matematico di un fenomeno reale	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]

[A] non devono essere acquisite (perché richiedono tempo che va a scapito di altre attività più importanti)
[B] non possono, in generale, essere acquisite (perché non in sintonia con il normale sviluppo intellettivo dello studente al livello scolare in oggetto)
[C] si possono acquisire al livello scolare in oggetto oppure recuperare in seguito al momento opportuno
[D] devono acquisire al livello scolare in oggetto perché la loro acquisizione è peculiare di questa età (in seguito non si recuperano)
[E] devono essere acquisite, perché in seguito saranno supposti noti.

2. *Esplicitare le proprie opinioni sulle seguenti questioni.*
- Perché dimostrare?
- La geometria è un terreno privilegiato per la dimostrazione? Perché?

[10] Questa domanda fa parte del questionario discusso in (Furinghetti & Chiarugi, 1990).

- L’argomentazione è un primo passo nel processo di dimostrazione o è ostacolo?
- Quale è il ruolo della congettura?
- La comunicazione tra studenti favorisce l’attività argomentativa?
- Il calcolatore favorisce o inibisce le congetture?
- Il calcolatore favorisce la generalizzazione?
- Quale è il ruolo del disegno nella dimostrazione?
- Quale è il ruolo della figura nella dimostrazione?
- Quale è il ruolo delle ‘macchine matematiche’ nella dimostrazione?
- Come gli studenti percepiscono la dimostrazione?
- Convincere se stessi, convincere un amico, convincere l’insegnante? Quale di questi obiettivi è raggiunto nel dimostrare?
- È diverso fare una dimostrazione scritta dal farla orale? Quando è meglio fare l’una o l’altra.

3. In (Castelnuovo, 1911) si trova la seguente classificazione dei progetti dell’epoca dal punto di vista dei vari gradi di rigore.

> «A) *Metodo interamente logico*. - (Peano, Hilbert, [Veronese], Halsted) - Tutti i postulati sono posti; si discute la loro indipendenza; lo sviluppo ulteriore è rigorosamente logico. Non si fa appello all’intuizione; le nozioni primitive sono soggette alla sola condizione di soddisfare ai postulati.
>
> B) *Basi empiriche, svolgimento logico*. - Dall’osservazione dello spazio si deducono le proposizioni primitive, sulle quali è fondato lo sviluppo logico ulteriore. Conviene distinguere tre sottogruppi:
> B_A) tutti gli assiomi necessari sono enunciati (Sannia - D’Ovidio, Veronese, Enriques - Amaldi);
> B_B) una parte degli assiomi è enunciata (Euclide, Thieme);
> B_C) si enunciano i soli assiomi che non hanno carattere di evidenza (Kambly, Müller);
>
> C) *Le considerazioni intuitive si alternano col metodo deduttivo* (Borel, Behrendsen, Götting) - Si ricorre all’evidenza ogni qualvolta conviene, senza che apparisca in modo preciso ciò che si ammette e ciò che si dimostra.
>
> D) *Metodo intuitivo* - *sperimentale* (Perry) - Si presentano i teoremi come fatti che hanno carattere intuitivo o possono essere dimostrati sperimentalmente, senza che si scorga il nesso logico che li unisce».

Adattare questa classificazione per individuare il grado di rigore nei libri di testo attualmente più diffusi, in particolare il libro di testo usato in classe.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Barbin, É.: 1994, 'La dimostrazione matematica: significati epistemologici e questioni didattiche', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, v.17B, 212-246

Battista, M. T. & Clements, D. H.: 1995, 'Geometry and proof', *Mathematics teacher*, v.88, 48-54.

Bosco, A., Dapueto, C., Gaggero, M., Mortola, C. & Tiragallo, G.: 1995, 'L'insegnamento della geometria nella scuola secondaria superiore', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, v.18B, 135-146.

Bottazzini, U., Freguglia, P. & Toti Rigatelli, L.: 1992, *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni, Firenze.

Chiarugi, I. & Furinghetti, F.: 1990, 'La matematica nei bienni: nuovi programmi e vecchi problemi. Presentazione di un questionario di indagine', in F. Furinghetti (editor), *Matematica oggi. Dalle idee alla scuola*, B. Mondadori, Milano, 36-46.

Ciceri, C., Furinghetti, F. & Paola, D.: in stampa, 'Analisi logica di dimostrazioni per entrare nella logica della dimostrazione', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*.

Commission Inter-IREM 'Histoire et épistémologie des mathématiques': 1989, *La démonstration mathématique dans l'histoire,* IREM de Besançon et IREM de Lyon, Lyon.

Il gruppo E: 1979, *Scuola media. I nuovi programmi*, B. Mondadori, Milano.

Furinghetti, F.: 1995, 'Che cosa e per chi i simboli simboleggiano', *La matematica e la sua didattica*, n.3, 318-327.

Furinghetti, F. & Paola, D.: 1991, 'On some obstacles in understanding mathematical texts', in F. Furinghetti (editor), *Proceedings of the PME XV* (Assisi), v.2, 56-63.

Galbraith, P.: 1995, 'Mathematics as reasoning', *Mathematics teacher*, v.88, 412-417.

Gallo, E.: 1994, 'Le figure queste sconosciute: come manipolarle, disegnarle, immaginarle per conoscerle meglio', in B. D'Amore (editor), *L'apprendimento della matematica: dalla ricerca teorica alla pratica didattica*, 47-55.

Hanna, G.: 1989a, 'Proofs that prove and proofs that explain', in G. Vergnaud, J. Rogalski & M. Artigue (editors) *Proceedings of PME 13* (Paris), 2, 45-51.

Hanna, G.: 1989b, 'More than formal proof', *For the learning of mathematics*, v.9, 1, 20-23.

Johnson-Laird, P. J.: 1994, *Deduzione induzione creatività*, Il mulino, Bologna; trad. it. di *Human and machine thinking*, L. Erlbaum , Hillsdale, 1993.

Matos, J. M.: 1992, 'Cognitive models in geometry learning', J. P. Ponte, J. F. & J. M. Matos (editors), *Mathematics problem solving and new information technology*, NATO ASI Series F n.89, Springer-Verlag, Berlin ecc., 93-112.

Olive, J.: 1991, 'Logo programming and geometric understanding: an in-depth study', *Journal for research in mathematics education*, v.22, 91-111.

Peano, G.: 1901, 'Dizionario di matematica', *Rivista di matematica*, t.7, 160-172.

Schoenfeld, A. H.: 1987, 'What's are the fuss about metacognition?', in A. H. Schoenfeld (editor), *Cognitive science and mathematics education*, 189-215.

Studi e documenti degli Annali della Pubblica Istruzione: 1991, 56, *Piani di studio della scuola secondaria superiore e programmi dei primi due anni. Le proposte della commissione Brocca*.

7. PER UNA CLASSIFICAZIONE DEI TESTI SCOLASTICI DI GEOMETRIA

Tentiamo una classificazione dei testi scolastici sorti dopo i nuovi programmi in base alle considerazioni precedenti. Elementi da considerare sono i seguenti.

FILOSOFIA - Quale immagine della geometria si vuole trasmettere (nella presentazione e poi, effettivamente, nello sviluppo).

APPROCCIO - Metrico o sintetico. Solo geometria analitica. Vettori. Spazi vettoriali. Spazio dato alle figure e al disegno. Richiami a strumenti meccanici. Legami con il calcolatore. Trattamento dei postulati (collegamento, ordine, congruenza, continuità). Geometria come disciplina a se stante o propedeutica alle applicazioni. Rilievo dato alla geometria dello spazio.

TRASFORMAZIONI - [si], [no]. Come appendice. Come oggetto di studio. Analiticamente, sinteticamente. Per costruire il piano euclideo. Per descrivere il piano euclideo (supposto noto dalle medie). Si introducono i vettori.

GEOMETRIE NON EUCLIDEE - [si], [no]. Approccio storico. Modelli.

OBIETTIVI - Visualizzare/rappresentare lo spazio. Risolvere problemi. Dare un modello di pensiero matematico.

DIMOSTRAZIONE - Quanto un testo è particolarmente attento alla scelta assiomatica, quanto centra l’attenzione sulla dimostrazione (eventualmente prendendo un’assiomatica sovrabbondante). Presenza di esempi che illustrano ambienti dove gli assiomi non valgono. Spazio dato a visualizzazione e disegno come strumenti per congetturare, argomentare. Quale assiomatizzazione. Gradi di rigore

In base a questa lista di elementi l’insegnante classifichi il proprio libro di testo. Rifletta se il libro è adatto a svolgere la geometria secondo i suoi (dell’insegnante) obiettivi. Rifletta se e quanto il libro recepisce le indicazioni dei nuovi programmi.

II - L’insegnamento geometrico: dai programmi alla classe

1. PER UNA LETTURA COSTRUTTIVA DEI NUOVI PROGRAMMI

Negli anni ’80 il lancio dei vari nuovi programmi per la scuola secondaria superiore è stato seguito da un periodo di discussione critica e di confronto delle varie versioni[11]. Superata questa fase iniziale, è ora il momento di fare un’analisi operativa e di configurare alcuni possibili scenari. La mia lettura dei programmi si fonda su alcune convinzioni che espongo brevemente.

Penso che uno degli scopi di un insegnamento ‘ecologico’[12] della matematica dovrebbe essere quello di delineare gli aspetti essenziali della disciplina, evitando, per quanto possibile, l’inquinamento provocato dall’eccessiva attenzione ad aspetti manipolativi e di routine. A questo proposito in alcune ricerche abbiamo constatato che, se l’apprendimento non è ben gestito dall’insegnante, nel lungo termine tendono a rimanere i dettagli di ciò che è insegnato, a scapito delle idee generali. Si genera così quel fenomeno che ho chiamato *sindrome da Muzio Scevola* riferendomi allo studio della storia da parte dei bambini. Se si enfatizzano i dettagli e gli aneddoti e non si dà un inquadramento critico accade che della politica espansionista e delle guerre di conquista del Lazio da parte dei romani l’alunno recepisca e ricordi solo la mano bruciata dell’eroe. La sindrome da Muzio Scevola concerne in particolare l’insegnamento dell’algebra, dove il piano sintattico/manipolativo prevale su quello concettuale. In conseguenza di questo fatto accade che uno studente universitario (di facoltà scientifiche) risolva l’equazione $(x - 1)(x - 3) = 0$ prima eseguendo la moltiplicazione e poi applicando la formula risolutiva dell’equazione di secondo grado o che ricordi la regola di divisione di un polinomio per $x - a$ (detta «di Ruffini»), ma non rifletta sul fatto che $f(a) = 0$ significa che a è radice dell’equazione $f(x) = 0$.

Se l’insegnamento vuol essere un investimento con *guadagno cognitivo* non solo *nell’immediato*, bensì anche *a lungo termine* occorre che si punti non tanto sul *capire strumentale*, quanto su quello *relazionale*. La distinzione tra questi due tipi di capire è stata sviluppata dallo psicologo britannico Richard R. Skemp, recentemente scomparso. In estrema sintesi, per Skemp il capire strumentale è il prodotto di un apprendimento meccanico di regole, teoremi e loro specifiche applicazioni. Il capire relazionale è il prodotto di un coinvolgi-

[11] Si veda (Dapueto & Furinghetti, 1992). Per fissare le idee in questa nota faccio riferimento ai programmi della commissione Brocca.
[12] Sul termine ‘ecologico’ tornerò nell’ultimo paragrafo.

mento personale del discente con oggetti matematici, situazioni, problemi e idee. Il principio generale o il teorema imparato meccanicamente (*strumentalmente*) manca di sostanza e ha pochissime probabilità di mettersi in *relazione* con altri principi o teoremi.

In sintesi, il criterio a cui mi ispiro nello scegliere gli elementi del programma di geometria intorno a cui costruire percorsi didattici e/o innovazioni metodologiche è quello di fare ciò che può lasciare qualcosa negli studenti, rinunciando eventualmente a una certa ‘eleganza’ o completezza nel trattare un argomento. Di un tema o di un processo prima cerco di enucleare le *grandi idee*, cioè le idee portanti intorno a cui si sviluppa la teoria, e poi lavoro intorno a quelle.

Venendo ai nuovi programmi, per quanto riguarda il biennio l’indicazione più forte mi sembra quella che compare nelle prime righe del commento ai temi relativa alle «limitate catene di deduzioni». Leggo questa indicazione come *approccio graduale alla dimostrazione* e come *diverso modo di guardare alla geometria euclidea* individuando *isole deduttive*[13] in cui lavorare. Dal punto di vista più strettamente contenutistico le trasformazioni sono l’innovazione più interessante.

Nei programmi dei trienni ho colto più che altro innovazioni collegate a nuovi argomenti, ma con implicazioni anche sulla metodologia: sistemi di assiomi e concetti connessi, geometrie non euclidee, geometria nello spazio, intesa anche come percezione dello spazio.

Nel corso dei cinque anni ho individuato anche alcuni *elementi serpeggianti* quali *l’introduzione di una prospettiva storica* e l’*uso del calcolatore*, di cui terrò conto nelle mie considerazioni.

Anche se la varietà degli indirizzi rende impossibile un’unica proposta, alcune idee che vedremo mi sembrano sviluppabili in tutti i tipi di scuola; altre mi sembrano più specifiche dei vari indirizzi. Lascio al lettore individuare i contesti privilegiati per l’attuazione.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Furinghetti, F.: 1993, ‘Che cosa resta e che cosa dovrebbe restare della matematica quando si è dimenticata la matematica’, *La matematica e la sua didattica*, v.7, 302-328.

Furinghetti, F.: 1993, ‘Images of mathematics outside the community of mathematicians: evidence and explanations’, *For the learning of mathematics*, v.13, n.2, 33-38.

[13] Il termine «isole deduttive» è in (Grand’Henry-Krysinska, 1992); partendo da questo, e in omaggio alla mia città, nello sviluppo della seconda parte ho continuato a usare l’immagine marinara.

Dapueto, C. & Furinghetti, F.: 1992, 'Lettura critica dei programmi di matematica per il biennio', *Insegnare*, a.3, n.11-12, 38-40.
Skemp, R. R.: 1976, 'Relational understanding and instrumental understanding', *Mathematics teaching*, v.77, 20-27.

ATTIVITÀ PROPOSTE

Analizzare se e come le indicazioni dei nuovi programmi erano già seguite negli importanti progetti degli anni '70.

Speranza, F. & Rossi Dell'Acqua, A.: *Matematica,* Zanichelli Bologna, 1970-1974 (5 volumi) e *Il linguaggio della matematica, Zanichelli, Bologna*, v.1 e 2 (1979), T (1981), *Geometria dello spazio,* 1982.
Prodi, G.: *Matematica come scoperta*, D'Anna, Firenze, v.1 (1975), v.2 (1977).
UMI (a cura di):*Matematica come scoperta: Guida al progetto di insegnamento della matematica nellea scuole secondarie superiori, Esperienze dei Nuclei di Ricerca Didattica,* D'Anna, Firenze, v.1 (1977), v.2 (1978).
Mancini Proia, L. & Lombardo Radice, L.: *Il metodo matematico*, Principato, Milano, v.1 e 2 (1977), v.3 (1979).
Villani, V. & Spotorno, B.: *Matematica. Idee e metodi*, La Nuova Italia, Firenze, v.1 (1979), v.2 (1982).

Isole deduttive

Nel paragrafo sulla dimostrazione sono state illustrate alcune difficoltà incontrate dagli studenti nel dimostrare; d'altra parte è riconosciuta l'importanza della dimostrazione sia nella ricerca matematica che nell'insegnamento, quindi il problema di avviare alla dimostrazione si pone. Vediamo alcune idee che si possono sviluppare.

Nel biennio si può rinunciare a una presentazione rigidamente assiomatica, assumendo però come punto fermo l'idea in (Vailati, 1907, 142) di praticare un insegnamento teso

> «[...] a educare e ad affinare l'attitudine dell'alunno a ragionare in modo preciso e rigoroso. Ciò che per questo fine è richiesto è soltanto questo: che ogni ipotesi, o ammissione, a cui in ciascuna dimostrazione è fatto appello, sia chiaramente riconosciuta, e formulata in modo esplicito, qualunque siano del resto le ragioni che possono aver indotto ad assumerla tra i punti di partenza del ragionamento».

Si possono impegnare gli studenti in attività di congettura e argomentazione, partendo da assunzioni facilmente accettabili e da proprietà significative e non banali. A tale scopo si potrebbe introdurre un modo di lavorare che chiamo *negoziazione dell'assioma, della definizione o del teorema*. Esso consiste nel 'concordare' con gli studenti un insieme di fatti che possono essere accettati come punto di partenza per dimostrare. La negoziazione può avvenire tra insegnante e alunni o tra alunni e alunni. Nel primo caso si ha il vantaggio di un più facile controllo, con il pericolo che lo studente senta ancora il suo lavoro come un'imposizione. Nel secondo caso il controllo da parte dell'insegnante è più difficile, ripagato da una maggiore ricchezza nei risultati che scaturisce dalla discussione nella classe. I prodotti di questo lavoro di negoziazione vanno raccolti e considerati come parte del libro di testo. Ciò fa sentire gli studenti importanti nella costruzione di un progetto. La discussione sulle varie assunzioni aiuta a capire che cosa c'è dietro una certa teoria geometrica e gli studenti possono arrivare a giudicare quali definizioni sono essenziali, quali ridondanti, quali scorrette, quali ambigue.

Il lavoro che propongo è chiaramente collegato a un'attività fortemente centrata sulla congettura, sull'argomentazione e sulla comunicazione. È oggetto di studio quali sussidi possano favorire queste attività. Le macchine matematiche presentate in (Pergola & Zanoli, 1995) sono un elemento suggestivo, ma non è del tutto chiaro quanto possano effettivamente influire o come gli stimoli che vengono da esse si differenzino da quelli che vengono dall'impiego del calcolatore nel trattamento di situazioni matematiche analoghe.

A proposito del calcolatore cito due esperienze, che, seppure limitate, possono offrire spunti di riflessione per attività in classe. Entrambe si riferiscono all'uso di Cabri, ma è ovvio che altri tipi di software (SuperPaint, pacchetti professionali usati nei licei artistici), possono essere altrettanto proficuamente usati per il tipo di lavoro di cui stiamo parlando.

Esperienza 1 (Paola, 1995). In due classi di quarta ginnasio che seguono un corso sperimentale PNI si è condotta un'attività di produzione di congetture sul problema «Trovare la somma dei primi numeri interi». La consegna data agli studenti era:

> 1. Dati tre punti non allineati, quante sono le rette che li congiungono in tutti i modi possibili?
> 2. Dati quattro punti a tre a tre non allineati, quante sono le rette che li congiungono in tutti i modi possibili?
> 3. Dati cinque punti a tre a tre non allineati, quante sono le rette che li congiungono in tutti i modi possibili?
> 4. Dati n punti a tre a tre non allineati, quante sono le rette che li congiungono in tutti i modi possibili?
>
> Per rispondere alle varie domande puoi utilizzare, oltre alle tue conoscenze, l'elaboratore elettronico (Cabri).

Gli studenti hanno scelto di lavorare con Cabri (in questi caso sotto utilizzato) oltre che con carta e penna e hanno lavorato a gruppi. Il lavoro è stato caratterizzato da uno scambio di informazioni tra i componenti del gruppo e tra i gruppi. Si sono evidenziate differenti strategie e procedimenti risolutivi.

Esperienza 2 (Bozzo, Ferrera & Pedemonte, 1996). Si tratta di un'esperienza di autoaggiornamento di un gruppo di insegnanti in un istituto tecnico commerciale genovese. Con Cabri si sono studiate alcune classiche costruzioni di coniche e si è visto come l'ambiente 'coniche' sia veramente adatto per produrre ipotesi (da provare o da confutare)[14], specialmente se arricchito dall'uso di un software opportuno che stimola l'attivazione di registri diversi (qui quello grafico/visuale). Consideriamo ad esempio lo svolgimento dell'esercizio: «Con Cabri costruire l'ellisse come luogo dei punti P del piano per cui la somma delle distanze da due punti fissi F e F' è costante (e vale $2a$)».

Dopo che si è fatta la figura al calcolatore partendo dalla classica costruzione, al variare di P le figure sullo schermo hanno fatto supporre che valesse la proprietà «l'asse di FQ (Q è il punto intersezione della circonferenza α di centro F' e raggio $2a$ con una semiretta uscente da F') è tangente all'ellisse in P». È sorta allora la necessità di provare questa proposizione e sono così nate due dimostrazioni [15]. Il lettore faccia le figure.

Dimostrazione 1. Per assurdo, se l'asse fosse secante, taglierebbe l'ellisse in un ulteriore punto P', che per la costruzione dell'ellisse dovrebbe appartenere anche all'asse di FQ' (Q' è l'intersezione di $F'P'$ con la circonferenza α). Si avrebbe così l'assurdo

$$2a = d(F',Q') = d(F',P') + d(P',F) = d(F',P') + d(P',Q) > d(F',Q) = 2a.$$

Dimostrazione 2. Se si trasforma per affinità l'ellisse in un cerchio e si richiamano le proprietà delle tangenti al cerchio la proposizione è dimostrata.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Bozzo, C., Ferrera, G. & Pedemonte, A.: 1996, 'Cabri, il quaderno interattivo di geometria', *Rapporto interno*.

[14] Le coniche costituiscono un tipico esempio di ricorrenza nella didattica: sono o non sono di moda a seconda dei paesi e dell'epoca.
[15] La prima è di Giuseppe Ferrera, la seconda è di Domingo Paola. Si vedano i vecchi manuali di geometria per altre prove di questa proprietà.

Lo, J.-J., Gaddis, K. & Henderson, D.: 1996, 'Building upon student experience in a college geometry course', *For the learning of mathematics*, v.16, n.1, 34-39.
Marchini, C., Speranza, F. & Vighi, P. (editors): 1995, *Atti del terzo incontro internuclei matematici della scuola secondaria superiore* (Parma).
Paola, D.: 1995, 'Attività congetturali in ambienti informatici', *Rapporto interno*.
Pergola, M. & Zanoli, C.: 1995, 'Trasformazioni geometriche e macchine matematiche', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, v.18A/B, 689-714.
Testa, G.: in stampa, 'How to treat students to ... conics and how to read an ancient French text at school without knowing ... French!', in *Proceedings of Second European summer university* (Braga, 1996).

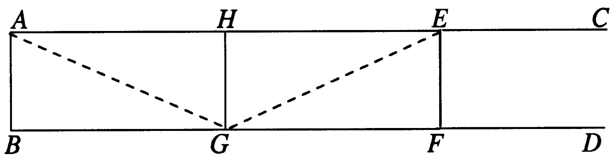
2. ARCIPELAGHI DI ASSIOMI

Per quanto concerne i programmi del triennio in primo luogo devo confessare che nel tracciare itinerari didattici sarei molto propensa a usare quella che in (Eco, 1994) è detta *decimazione dell'informazione*, poiché nell'attuale formulazione i programmi sono veramente densi ed è d'obbligo la cautela nell'aggiungere argomenti. In realtà, per indicare ciò che intendo fare nella lettura dei programmi, è più rassicurante usare la parola *potatura* che evoca l'idea di tagli finalizzati a rinvigorire ciò che resta. Consideriamo, ad esempio, il caso dei sistemi di assiomi. Negli indirizzi scientifico e scientifico tecnologico i programmi sembrano abbastanza orientati a una trattazione assiomatica, un po' ammorbidita negli altri indirizzi. Uno sviluppo completo della teoria sui sistemi assiomatici mi sembra fuori luogo, conviene circoscrivere la discussione ad alcuni punti, per esempio, quelli che seguono.

- Fare un confronto tra il sistema euclideo e il sistema di assiomi dei libri di testo.
- Discutere le scelte euclidee e metterne in risalto i nei, per esempio quelli legati alla continuità. Nella prima proposizione del libro primo Euclide risolve il problema di costruire un triangolo equilatero che ha per lato un segmento di estremi A e B costruendo il terzo vertice C come intersezione dei cerchi di centro A e B rispettivamente e raggio AB. È noto che l'esistenza dei due punti in questione può essere dimostrata in seguito all'enunciato di un postulato di continuità; questa considerazione ci fa intravvedere un modo di collegare parti diverse della matematica (in questo caso geometria e analisi) mediante l'individuazione di problematiche comuni: una preliminare introduzione geometrica può essere utile per facilitare la comprensione del difficile concetto di continuità
- Riprendere alcuni spunti dal progetto Speranza sulla assiomatizzazioni in ambienti speciali

– Rinunciare a fare un confronto con assiomatizzazioni in altri contesti e limitarsi alla geometria, confrontando l'assiomatizzazione euclidea con un altro tipo di assiomatizzazione, per esempio quella metrica[16]. Tale confronto potrebbe essere fatto usando un testo come quello del progetto Prodi
– Tentare un approccio storico, se si vuole accogliere il suggerimento delle geometrie non euclidee. Si possono vedere vari enunciati del postulato di Euclide e vari enunciati nella storia, come è esemplificato in (Testa, 1994). Ciò permette di lavorare sulla dimostrazione in maniera critica, scoprendo i buchi logici. Come esempio propongo la seguente dimostrazione dovuta a Posidonio (secondo-primo secolo a. C.); il lettore scopra l'assunzione tacitamente sostituita al postulato quinto.

Siano $AB \perp BD$ e l'angolo $\angle CAB$ acuto. Per assurdo proviamo che le rette AC e BD si incontrano. Supponiamo che AC sia parallela a BD. Tiriamo da un punto qualunque F (distinto da B) la perpendicolare che incontra la retta AC in E e dal punto medio di BF tiriamo la perpendicolare fino a incontrare la AC in H.



Congiungiamo A e E con G. Poiché AC è parallela a BD si ha che $FE = GH = BA$. I triangoli ΔABG e ΔEFG sono congruenti e quindi $AG = GE$, $\angle BGA = \angle EGF$. I triangoli ΔAGH e ΔEGH sono congruenti poiché hanno un lato in comune, $AG = GE$ e gli angoli in G sono congruenti perché ottenuti togliendo da un angolo retto angoli congruenti. Allora $\angle BAC = \angle AEF$. Ripetendo il procedimento (dal punto medio tirare la perpendicolare, ...) relativamente ai segmenti BG e GF si prova che $\angle HAB = \angle AHG$ e $\angle EHG = \angle HEF$. Allora gli angoli $\angle AHG$ e $\angle EHG$ sono acuti. Da qui segue l'assurdo e quindi le due rette AC e BD si incontrano.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Eco, U.: 1994, 'Sarà la filosofia a insegnarci come usare l'informazione', *L'espresso*, a.40, n.29, 170.
Chabert, J.-L.: 1987, 'Les géométries non euclidéennes', IREM de Picardie.

[16] Segnalo che in questa direzione esistono esperienze già attuate, si veda (Gallo & Goldin, 1995).

Gallo, E. & Goldin, C.: 1995, ‘Diverse assiomatiche della geometria: analisi di una situazione didattica’, *NUMI*, a.22, supplemento al n.8-9, 135-139.
Manara, C. F.: 1988, ‘La continuità in geometria’, *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, v.10, 908-937.
Millmann, R. S. & Parker, G. D.: 1991, *Geometry. A metric approach*, Springer-Verlag, Berlin ecc., II edizione.
Testa, G.: 1994, *Il V postulato di Euclide*, Liceo Lioy, Vicenza.

3. BATTELLI SPAZIALI

Vedo la geometria nello spazio non come un ulteriore ambito in cui introdurre i teoremi, ma proprio come l’ambito in cui determinati problemi si risolvono (uno degli obiettivi che sono stati rilevati per l’insegnamento della geometria). Quindi lo spazio è un ambiente da padroneggiare. Si è spesso osservato come ciò non avvenga, anzi, come proprio l’insegnamento geometrico tenda ad appiattire quello che di intuizione spaziale lo studente possiede. La sfera può essere usata come ambiente per discutere aspetti della geometria non euclidea.

Nel 1844 fu pubblicato in Germania un trattato di Carl Anton Bretschneider che è considerato il primo tentativo di introdurre contemporaneamente la geometria piana e spaziale (*fusionismo*). Questo progetto fu ripreso in Francia da Charles Meray e in Italia nel trattato di Riccardo De Paolis (Loesher, Torino, 1884) e in quello di Giulio Lazzeri e Anselmo Bassani (*Elementi di geometria* - Giusti, Livorno, 1891). Un cenno a questo dibattito si trova ancora nel già citato articolo (Castelnuovo, 1911). I professori italiani di scuola secondaria e l’associazione di insegnanti *Mathesis* erano favorevoli a questo progetto, di cui si tenne conto nella stesura dei programmi del 1900. Ma nei programmi successivi l’idea fu abbandonata. Eppure l’esperienza della fusione non è irrealizzabile. Per esempio, usando i vettori praticamente tutti i concetti si possono introdurre contemporaneamente. Naturalmente lavorando coi vettori può accadere che l’algebra si configuri come uno strumento per la geometria, invece che essere la geometria il contesto in cui introdurre nozioni algebriche. Risulta quindi che l’attenzione slitta sulla manipolazione algebrica e si può perdere una delle potenzialità della geometria, la percezione dello spazio.

La geometria nello spazio può essere anticipata al biennio. Un approccio potrebbe essere quello della geometria della sfera, cui si riferisce l’esperienza con studenti di 16 anni descritta in (van der Brink, 1995).

Lo studio delle proprietà di simmetria di particolari solidi (cui accennano i programmi) può essere l’occasione per discutere l’estensione o la non estensione di certe proprietà della geometria piana alla geometria nello spazio, ma ai fini del padroneggiare lo spazio mi sembra più interessante studiare qualche esempio di proprietà che si conservano o si perdono nelle trasformazioni. Per esempio, sarebbe fattibile la proiezione stereografica della sfera, trasformazione che si presta bene anche a un trattamento analitico.

Cito due semplici esperienze realizzate in classe, dedicate a trasformazioni spaziali. Nella prima, descritta in (GEM, 1991), si studia la proiezione di un cerchio da un punto su un piano orizzontale, seguendo l'approccio al problema del pittore Albrecht Dürer. Con dei materiali sperimentali e con la geometria elementare si introduce in maniera abbastanza naturale la nozione di rapporto armonico, che è un invariante non banale. L'altra esperienza, descritta in (D'anna, 1995), si riferisce allo sviluppo di alcune idee sulla prospettiva ispirate a un manuale scolastico di Emma Castelnuovo in classi del liceo artistico. L'interesse di questo lavoro è nel fatto che per risolvere i problemi si usano a seconda delle necessità sia procedimenti analitici che grafici.

Esperienze come queste mi sembrano particolarmente significative in classi in cui si fa parallelamente al corso di matematica un corso di disegno, per collegare le due attività e dare al disegno una base scientifica. Ovviamente, è anche interessante il collegamento con la storia dell'arte. A proposito del disegno, inteso come costruzione della figura geometrica, esso è una specificità della geometria, importante come strumento di apprendimento che catalizza informazioni e abilità. Lo schizzo stesso andrebbe molto rivalutato, come oggetto per congetturare e decidere strategie risolutive.

Anche se non si riesce a raggiungere appieno l'obiettivo della fusione, la geometria nello spazio si può configurare realmente come un battello che permette di navigare nella geometria collegando varie problematiche.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Castelnuovo, E., Gori-Giorgi, D. & Gori-Giorgi, C.: 1976, 'La géométrie à l'école', *Educational studies in mathematics,* v.7, 443-463.

D'Anna, P.: 1995, *Una trasformazione proiettiva,* Appunti redatti in collaborazione con studenti del L. A. 'Niccolò Barabino' di Genova.

Forcheri, P., Furinghetti, F. & Molfino, M. T.: 1981, 'Nouveaux moyens pour vieux sujets: la représentation des objets', in M. Pellerey (editor), *Proceedings of the 33th CIEAEM's meeting* (Pallanza), 163-174.

Field, J. V. & James, F. A. J. L.: 1994, *Renaissance and revolution,* CUP, Cambridge.

GEM: 1991, 'Jeux d'ombres à la lumière de Dürer', in Commission Inter-IREM 'Histoire et épistémologie des mathématiques' (editor), *La figure et l'espace*, IREM de Lyon, Lyon, 171-183.

Grand'Henry-Krysinska, M.: 1992, *Géométrie dans l'espace et géométrie de l'espace,* GEM, Éditions Erasme, Namur.

Lombard, P.: 1991, 'La représentation en perspective comme obstacle épistémologique', in Commission Inter-IREM 'Histoire et épistémologie des mathématiques' (editor), *La figure et l'espace,* IREM de Lyon, Lyon, 139-169.

Menghini, M. & Mancini Proia, L.: 1988, *La prospettiva: un incontro tra matematica e arte*, Quaderno TID - CNR, serie IDM, n.2.
Speranza, F.: 1990, ‘Nuove prospettive per la geometria nelle scuole suoperiori’, *Nuova secondaria*, n.7/8, 73-75; n.9, 65-67.
van den Brink, J.: 1995, ‘Geometry education in the midst of theories’, *For the learning of mathematics*, v.15, n.1, 21-28.

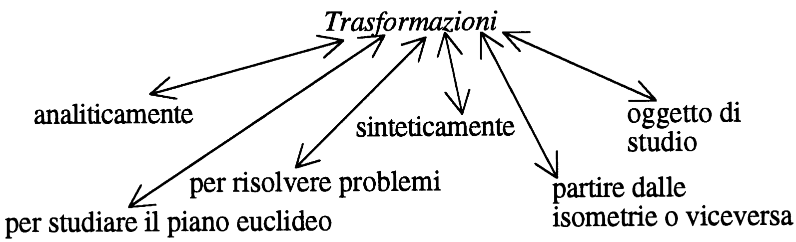
4. LE TRASFORMAZIONI COME BOE NELLA NAVIGAZIONE DEI PROGRAMMI

Si è detto che nell’ambito della geometria le trasformazioni sono il discorso più nuovo dal punto di vista contenutistico. Leggendo i brani dei programmi riportati di seguito vediamo che esse sono importanti perché possono rappresentare un elemento di continuità tra la geometria svolta alle medie e quella svolta nel biennio; inoltre esse costituiscono un esempio di evoluzione nella trattazione di un argomento a diversi livelli di formalizzazione a partire dall’intuitivo/sperimentale.

- Scuola media di primo grado. Indicazioni per la matematica. 1. Obiettivi, p. 39:
«[...] guidare alla capacità di sintesi, favorendo una progressiva chiarificazione dei concetti e facendo riconoscere analogie in situazioni diverse, così da giungere a una visione unitaria su alcune idee centrali (variabile, funzione, trasformazione, struttura,...)».
- Scuola media di primo grado. Trasformazioni geometriche, p. 41:
«a) Isometrie (o congruenze) piane - traslazioni, rotazioni, simmetrie - a partire da esperienze fisiche (movimenti rigidi). Composizioni di isometrie. Figure piane direttamente o inversamente congruenti.
b) Similitudini piane, in particolare omotetie, a partire da ingrandimenti e rimpicciolimenti. Riduzioni in scala.
c) Osservazione di altre trasformazioni geometriche: ombre prodotte da raggi solari o da altre sorgenti luminose, rappresentazioni prospettiche (fotografie, pittura ecc.), immagini deformate,...»
- Scuola media di primo grado. Orientamenti per la «lettura» dei contenuti, p. 42:
«Lo studio della geometria trarrà vantaggio da una presentazione non statica delle figure, che ne renda evidenti le proprietà nell’atto del loro modificarsi; sarà anche opportuno utilizzare materiale e ricorrere al disegno. La geometria dello spazio non sarà limitata a considerazioni su singole figure, ma dovrà altresì educare alla visione spaziale. È in questa concezione dinamica che va inteso anche il tema delle trasformazioni geometriche.
Il metodo delle coordinate con il rappresentare graficamente fenomeni e legami fra variabili, aiuterà a passare da un livello intuitivo ad uno più razionale. Alcune trasformazioni geometriche potranno essere considerate anche per questa via».
- Scuola media di secondo grado: Matematica ed informatica. Obiettivi di apprendimento, p. 160:
«Alla fine del biennio lo studente *deve dimostrare* di essere in grado di:

1. individuare proprietà invarianti per trasformazioni elementari».
- Scuola media di secondo grado. Matematica ed informatica. Tema 1: Geometria del piano e dello spazio, p.161:
1.1. Piano euclideo e sue trasformazioni isometriche. Figure e loro proprietà. Poligoni equiscomponibili; teorema di Pitagora.
1.2. Omotetie e similitudini del piano. Teorema di Talete.
1.3. Piano cartesiano: retta, *parabola, iperbole equilatera*.
1.4. Coseno e seno degli angoli convessi. Relazione fra lati ed angoli nei triangoli rettangoli.
1.5. Esempi significativi di trasformazioni geometriche nello spazio.
Individuazione di simmetrie in particolari solidi geometrici.

Nei programmi del biennio il discorso sulle trasformazioni non è opzionale, anche se tale può apparire ad una prima lettura del commento ai singoli temi («utilizzando la geometria delle trasformazioni oppure seguendo un percorso più tradizionale»). Il seguente schema dà un'idea delle scelte di base che l'insegnante si trova a fare.



Fondamentalmente si possono intravvedere due possibilità:
– fondare la costruzione del piano euclideo sulla nozione di trasformazione (per esempio con l'approccio metrico alla Choquet)
– utilizzare le trasformazioni per descrivere un piano che in qualche modo è già dato o, più semplicemente, per descrivere le figure del piano e le loro proprietà.

In entrambi i casi l'introduzione efficace ed efficiente delle trasformazioni si basa sull'idea che esse vanno *integrate* nella trattazione della geometria e non pensate come appendice. Questo principio dell'integrazione di argomenti caratterizza il lavoro del gruppo GREMG in vari campi: abbiamo fatto esperienze di integrazione di informatica e matematica, di storia e matematica. Integrare per noi vuol dire individuare obiettivi comuni ai soggetti da integrare e usare le potenzialità dell'uno o dell'altro soggetto nel perseguirli. Per esempio, nel biennio il concetto portante di algoritmo trattato nei due ambiti matematico e informatico risulta rafforzato, grazie ai differenti stimoli offerti. Un altro concetto portante nei programmi del biennio è quello di funzione o, più in generale, di corrispondenza. Appunto, le trasformazioni sono un elemento utilissimo per mettere a fuoco tale concetto (non a caso le trasformazioni hanno un posto di rilievo nel progetto Prodi), poiché forniscono un altro punto di vista distinto da quello dell'analisi, collegando ambiti diversi, come già abbiamo visto nel caso della continuità. Questo aspetto delle trasformazioni mi sembra più interessante di quello troppo enfatizzato e sopravvalutato del presunto dinamismo introdotto con le trasformazioni. Concordo con quanto detto in (Villani, 1995, p.681) a questo proposito: «L'affermazione [che lo studio delle trasformazioni favorisce una visione dinamica della geometria] si basa su una identificazione arbitraria e ingiustificata fra "isometrie" e "movimenti rigidi". [...] Nel caso delle trasformazioni geometriche il legame che intercorre tra una figura e la sua trasformata è statico». Non sempre la presentazione che si trova nei libri di testo favorisce l'acquisizione di questo concetto di corrispondenza e lo studente recepisce lo studio delle trasformazioni come lo studio delle trasformate di figure. A questo proposito si veda (Villani, 1990). Analogamente, spesso delle trasformazioni non si percepisce la specificità di studiare il piano non localmente, ma nella sua globalità.

Il concetto di corrispondenza è acquisito in primo luogo curando la definizione. Per esempio, oltre alla definizione statica «Un punto è la riflessione di un altro rispetto a una retta se la retta è la perpendicolare nel punto medio del segmento congiungente i due punti. Se il punto sta sulla retta, la sua riflessione è il punto stesso», conviene dare quella legata all'idea di corrispondenza «Siano dati un piano E e una retta L in E. Per ogni punto P di E, sia P' la riflessione di P rispetto a L. La corrispondenza $P \leftrightarrow P'$ è detta la *riflessione del piano E rispetto a L*»[17]. Puntando sull'aspetto della corrispondenza si introducono nuove abilità, poiché la trasformazione presenta un maggior grado di astrazione rispetto alla figura.

A proposito del supposto dinamismo introdotto dalle trasformazioni si osserva nelle usuali presentazioni dei libri di testo una scarsa attenzione alla genesi spaziale delle trasformazioni, mentre alcuni argomenti legati a questo fatto (si vedano i già citati testi della Castelnuovo) sono alla portata degli studenti e possono anzi costituire un primo avvicinamento ai problemi della rappresentazione e della gestione dello spazio a tre dimensioni. Ancora una volta la storia della matematica ci insegna, poiché le trasformazioni sono proprio nate nel-

[17] Da (Moise, 1982, pp.596, 601).

lo spazio con le rappresentazioni in prospettiva. Non stupisce che la geometria tridimensionale sia entrata poco nell'insegnamento, se permane costantemente un certo orrore a uscire dal piano, anche laddove sarebbe fisiologico farlo.

Un altro aspetto della presentazione nei libri di testo che ha effetti negativi è lo spezzettamento dell'introduzione delle varie trasformazioni in capitoli non collegati. Si perde in questo caso una delle *grandi idee* delle trasformazioni, che dà un senso alla loro introduzione, quella di *invariante*. E in effetti, gli esercizi che poi sono proposti puntano molto poco sull'individuazione degli invarianti, delle figure 'equivalenti' in una certa geometria, delle proprietà e i teoremi 'appartenenti' a una certa geometria. Un altro punto poco sviluppato è l'individuazione di quanti elementi occorrono per individuare una trasformazione. Questo è un esercizio che può essere svolto sinteticamente o ricorrendo alle equazioni della trasformazione, eventualmente in forma vettoriale: si attiva in questo caso un nuovo registro (analitico) e si induce nello studente la flessibilità necessaria a risolvere problemi.

Quest'ultimo è il vero punto di forza delle trasformazioni, per cui vale la pena di introdurle nell'insegnamento: offrire l'occasione di lavorare su uno stesso problema in ambiti diversi e quindi dare nuove possibilità di soluzione. Del resto, come è osservato nel già citato articolo (Valabrega, 1989), storicamente le trasformazioni nacquero proprio per risolvere problemi e in un secondo tempo ebbero uno sviluppo teorico. In (Sabbatini, 1926) c'è una panoramica sulla presenza delle trasformazioni nella storia della matematica; pur nei limiti di questa breve nota, si vede come l'uso delle trasformazioni sia stato funzionale alla risoluzione di problemi e inizialmente siano state sviluppate trasformazioni ad hoc per ogni singolo problema, ma non una teoria generale su di esse. L'impulso allo studio delle trasformazioni si ha con la nascita della geometria proiettiva e mi pare condivisibile l'opinione espressa in (Valabrega, 1989, p.141) che è con Jean-Victor Poncelet[18] che «incomincia a delinearsi chiaramente quel metodo delle trasformazioni geometriche per risolvere i problemi geometrici» che sarà ampiamente usato in seguito».

Le trasformazioni sono dunque uno strumento in più offerto allo studente per risolvere problemi, che danno la possibilità di attivare registri diversi e mettersi in differenti contesti. L'esperienza citata precedentemente sulle due dimostrazioni nate dopo la congettura indotta dalla visualizzazione con Cabri (si veda il paragrafo sulle *Isole deduttive*) dà un'idea di questo fatto. Alcuni ar-

[18] A tale proposito si legga quanto scrive Poncelet nella prima parte del capitolo primo del *Traité des propriétés projéctives des figures*, (due volumi, il primo è stato pubblicato nel 1822, Metz e Parigi).

ticoli[19] presentano problemi geometrici sviluppati 'alla Euclide' o con le trasformazioni e mettono in risalto che non esiste il metodo migliore in assoluto ai fini della risoluzione, ma quello adatto al singolo caso. Nella pratica scolastica lo studente non dovrà essere forzato a prendere una determinata strada, bensì abituarsi a esaminare le varie possibilità e considerare come parte della soluzione dell'esercizio la scelta del procedimento più efficiente.

Per informazione del lettore ricordo che nel citato articolo (Sabbatini, 1926) sono presentati i metodi per risolvere problemi: - metodo dei luoghi geometrici, - il metodo di trasformazione delle figure. Le trasformazioni ivi considerate sono: movimenti, similitudini (in particolare, omotetie e omotetie composte con le traslazioni), inversioni per raggi vettori reciproci, affinità omologiche. I seguenti esercizi sono svolti da Luigi Campedelli nel *Repertorio di matematiche* curato da Mario Villa (CEDAM, Padova, 1951, pp. 272-273):

> 1. Data una retta, *r*, e due punti *A* e *B*, determinare sulla retta *r* un punto, *C*, tale che le semirette *CA* e *CB* formino un medesimo angolo, l'una con il senso positivo e l'altra con quello negativo della *r*. (Si risolve con il ribaltamento degli elementi dati).
> 2. Costruire le tangenti comuni a due cerchi dati, *C* e *C'*. (Si risolve mediante una traslazione della figura incognita).
> 3. Costruire un cerchio tangente a due rette date, *a*, *b*, e passante per un punto assegnato, *A*. (Si risolve mediante una omotetia).

Le trasformazioni possono essere molto utili anche per risovere problemi pratici. Sto pensando, ad esempio, ai problemi che si pongono disegnando al calcolatore con SuperPaint o altri strumenti ausili di questo tipo: si puo partire da situazioni che si creano spontaneamente per riflessioni anche non banali e certo non artificiose sulle tasformazioni elementari.

Alla luce delle precedenti considerazioni mi sembra che le trasformazioni possano configurarsi non come un ulteriore porto (obiettivo contenutistico) da raggiungere nella navigazione dei programmi, ma come una boa a cui appoggiarsi per affrontare la navigazione rinfrancati.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Martini, T.: 1994, 'Esercizi di geometria: vecchio e nuovo a confronto', *Archimede*, a.46, 179-188.

Nardini, P.: 1995, 'Il tema di matematica per la maturità scientifica', *Archimede*, a.47, 115-124.

[19] Per esempio, (Martini, 1995; Nardini, 1995).

Peano, G.: 1924, ‘Sui fondamenti della geometria’, *Rivista di matematica*, v.4, 51-90.
Sabbatini, A.: 1926, ‘Sui metodi elementari per la risoluzione dei problemi geometrici’, F. Enriques (editor), *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, Zanichelli, Bologna, 1-154.
Villani, V.: 1990, ‘Similitudini e figure simili’, *L’educazione matematica*, a.11, supplemento al n.2, 55-64.
Villani, V.: 1994, ‘Il ruolo delle trasformazioni nell’insegnamento della geometria’, *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, v.17A/B, 440-457.
Villani, V.: 1995, ‘Le trasformazioni geometriche nella scuola secondaria superiore’, *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, v.18A/B, 669-688.

5. UN EPILOGO COME SALVAGENTE PER SOPRAVVIVERE ALLE DIFFICOLTÀ DELLA TRASPOSIZIONE DIDATTICA

L’assetto della scuola secondaria superiore in Italia, divisa tra biennio e triennio e molto diversa nei suoi indirizzi, ha in pratica costretto a rinunciare a proporre degli itinerari didattici compiuti. Questa rinuncia forzata è però funzionale al messaggio di fondo che ho inteso trasmettere e che qui riassumo. Non è tanto importante quello che si insegna, ma come lo si insegna. Tentiamo di individuare qualche elemento su cui si basa un insegnamento efficace e efficiente.

– Conoscere, interpretare e sfruttare al meglio le risorse a disposizione: libri di testo, ausili didattici ‘antichi’ come riga e compasso o le macchine matematiche, ‘moderni’ come i software didattici o professionali e altre tecnologie
– Interpretare con flessibilità, creatività e un po’ di audacia le indicazioni dei programmi
– Puntare molto sulla comunicazione in classe tra gli allievi e con gli allievi. Il tempo impiegato nella discussione di un esercizio (oculatamente, seppure occultamente, condotta dall’insegnante) non è tempo perso, ma darà frutti a distanza (cosa che non sempre accade quando si fanno molti esercizi varianti di un modello trasmesso passivamente). La comunicazione coi compagni è un buon addestramento alla tolleranza
– Puntare molto sulla comunicazione al di fuori della classe con altri insegnanti, con la comunità scientifica, con associazioni e enti preposti all’aggiornamento degli insegnanti. Fare un tentativo e farlo conoscere è già di per sé un valore, indipendentemente dal risultato che si ottiene in classe. Occorre documentarsi su quanto accade attraverso le pubblicazioni per insegnanti di matematica (libri, riviste, …) su quanto accade. Continuando con le immagini marinare, nella scuola i Robinson Crusoè vivono male e, inoltre, non hanno il loro Venerdì
– Essere cauti nello spontaneismo in classe (vedi oculatezza nel gestire le discussioni tra alunni e le attività in laboratorio), ma incoraggiare la sponta-

neità degli alunni come sinonimo di creatività. Le nostre ricerche riguardo le prestazioni su determinati argomenti al variare dell'età mostrano che c'è un degrado nella produzione di idee (per esempio, nelle rappresentazioni grafiche) forse dovuto all'omologazione che si tende a operare nei comportamenti matematici degli allievi

– Fornire agli studenti molte risorse sia in conoscenza (vari registri da attivare) che in tecnologie o strumenti meccanici e incoraggiare a usarle al momento opportuno con flessibilità. In questa nota sono accennati esempi (grafico/analitico, analitico/sintetico, euclideo/trasformazioni, calcolatore/carta e penna, intuizione / rigore)
– Costruire l'esperienza matematica dello studente tenendo conto della sua personale esperienza (si veda quanto si è detto sul 'livello 0' nell'introduzione)
– Dare almeno una volta, pur nella limitatezza del contesto, l'idea di come lavora un matematico, o di che cosa vuol dire fare matematica. Si parla spesso di 'vera natura' della matematica; mi sembra che questo concetto sia vago, poiché anche ai matematici professionisti non è chiaro quale sia la 'vera natura' della matematica. Preferisco, come ho fatto all'inizio, riferirmi al concetto di immagine 'ecologica' della matematica, come immagine depurata da certe incrostazioni che la inquinano. Il ripercorrere il cammino della creatività matematica, seppure su un semplice esercizio, aiuta a questo scopo. Per un esempio di realizzazione si veda (Furinghetti & Paola, in stampa)
– Usare chiarezza nel contratto didattico. È mia convinzione che la chiarezza dovrebbe essere sempre presente in classe nel contratto didattico tacitamente stipulato tra insegnante e allievo, per introdurre una simmetria tra i due protagonisti; infatti l'allievo è spesso tenuto a scoprirsi e penso che anche l'insegnante si debba scoprire. Con il questionario iniziale di ambientamento avevo voluto, appunto, mettere l'insegnante nella condizione dello studente e fargli percepire il disagio di una navigazione a vista.

L'insegnamento è un continuo mediare per far diventare posizioni complementari quelle che inizialmente possono presentarsi come posizioni contrastanti: tradizionale/innovativo, rigoroso/intuitivo, pratico/teorico. Siamo tutti consci che la matematica è un prodotto difficile da vendere, malgrado i più disparati tentativi di promozione. Accade spesso che l'impegno in un itinerario didattico meditato e rigoroso abbia come riscontro delusioni per l'insegnante nel momento in cui percepisce che per lo studente la matematica è una successione di segni e parole senza significato[20]. Allora si pensa di rimediare orientandosi verso un approccio utilitaristico, sfrondato di ogni aspetto critico/teori-

[20] Insegnante:«Che cos'è un vettore?». Studente: «Una grandezza scalare». Citazione da (Bozzo & Ferrera, 1996).

co. Ma poi capita tra le mani il trattatello di geometria pratica ad uso di bottai, contadini, carpentieri scritto nel XVI secolo dal cronista savonese Giovanni Agostino Abate, e si trova spiegato con dovizia di istruzioni pratiche come trovare il perimetro di un triangolo, i cui lati (si veda l'ultima illustrazione antica) misurano 7, 8 e 25. Dunque la matematica ridotta a soli procedimenti empirici ha pesanti limiti: un momento legato alla riflessione critica è necessario.

È difficile risolvere i molti problemi didattici, ma non è inutile ai fini della ricaduta in classe impegnarsi a fondo nel cercare soluzioni, sia per gli eventuali risultati positivi che si possono ottenere, sia perché, e qui mi rifaccio alle mie esperienze negative come insegnante, accade spesso che quello che si fa di buono sia dimenticato, ma quello che si sbaglia (non tanto nel dettaglio, quanto nelle scelte educative di fondo) lasci un segno e provochi rovinosi naufragi.

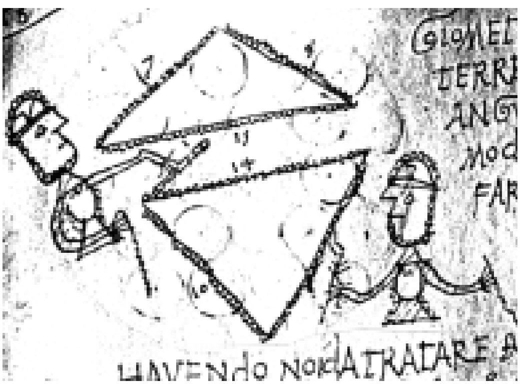
RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Abate Giovanni Agostino: 1992, *Giometria de figure quadre*, a cura di G. Farris, M. Sabatelli, Savona.

Bozzo, C. & Ferrera, G.: 1996, *Raccolta di interventi 'interessanti' di studenti di Istituto tecnico*, Manoscritto.

Furinghetti, F. & Paola, D.: in stampa, 'Students, mathematics, applications: an attempt at linking three different domains through the computer', in C. Keitel (editor), *Proceedings of CIEAEM 47* (Berlin, 1995).

Garibaldi, A. C.: 1995, 'Giovanni Agostino Abate', in *Studi in occasione del quinto centenario della nascita (1495-1995)*, 93-144.



STORIA DELLA GEOMETRIA E DIDATTICA: QUALCHE OSSERVAZIONE

Massimo Galuzzi - Daniela Rovelli
Dipartimento di Matematica - Università di Milano, ITIS "G. Marconi" - Dalmine

1. STORIA DELLA MATEMATICA E DIDATTICA

L'utilità della storia della matematica per la didattica è stata spesso affermata, e con particolare vigore, negli ultimi tempi sia in Italia che in altre nazioni.

I programmi recentemente proposti dalla "Commissione Brocca", largamente utilizzati in molte scuole, concludono le *Finalità* dell'insegnamento della matematica affermando, al punto 9, che "*l'insegnamento di Matematica e Informatica promuove* [...] *l'interesse per il rilievo storico di alcuni importanti eventi nello sviluppo del pensiero matematico*." [1]

Tra le recenti discipline previste per un possibile insegnamento nel Corso di laurea in Matematica figura ora espressamente una *Storia e didattica della matematica*, a ulteriore prova dell'accresciuto interesse per questo connubio. Ma si può osservare che l'interesse per l'uso della storia in contatto con la didattica appartiene da sempre alla scuola italiana, almeno a livello universitario: basta solo pensare alla vasta opera di Enriques e dei suoi collaboratori.

Tuttavia, se si considera concretamente il <u>modo</u> con il quale storia e didattica dovrebbero reciprocamente interagire, si scopre che in realtà questo modo si scioglie in una pluralità di 'modi', corrispondenti a finalità che possono anche essere assai divergenti. Per chiarezza, e senza pretesa di completezza, sarà bene fare riferimento a qualche esempio.

Talvolta l'utilità della storia della matematica viene affiancata ad argomentazioni di vasto respiro. In [Heiede 1992] un articolo ricco di numerosi riferimenti bibliografici, sono elencate ragioni molto generali per affiancare la storia della matematica all'insegnamento della matematica ("L'uomo è una creatura storica...", "Ogni cosa con cui l'uomo entra in contatto è nella storia...", ecc.). Anche se ragioni di questo tipo sono spesso presentate come validi argomenti, esse sono, a nostro giudizio, un po' generiche. Le stesse argomentazioni possono essere usate, nello <u>stesso</u> modo, per sostenere la necessità della storia della zoologia, della botanica, della fisica,...

Ma ogni scienza ha la sua <u>propria</u> relazione con il passato, e la necessità della storia va dimostrata non attraverso l'uso di varie generalità, ma con attenzione alle sue <u>specifiche</u> caratteristiche. Certamente la fisica di Aristotele fu

[1] Citiamo dall'*Appendice* di [Manara - Marchi, 1993], p. 167.

un'enorme impresa scientifica, ma non vi è alcun enunciato di essa che possa trovar luogo in un moderno libro di testo, mentre gli *Elementi*, per esempio, possiedono centinaia di teoremi che sono riprodotti più o meno esattamente nei libri moderni (si pensi, per esempio, alla dimostrazione euclidea dell'esistenza di infiniti numeri primi). Di conseguenza la necessità della storia della fisica e della storia della matematica vanno esaminate in modo differente.

Tuttavia Heiede fa un'affermazione importante quando osserva che "la storia della matematica non va insegnata per rendere la matematica più divertente, o più facile, o più umana". [2]

In qualche modo all'estremo opposto si collocano quelle argomentazioni che vorrebbero promuovere l'uso della storia della matematica come un utile 'espediente' didattico. [Grugnetti 1989] è un esempio notevole in questa direzione. Questo uso della storia, ad esempio l'uso del *Liber Abbaci* per stimolare la curiosità dei ragazzi, è perfettamente legittimo. Importante è però non annettere valore teoretico a questo utilizzo della storia; ché, se per una data scolaresca un certo documento può riuscire di stimolo allo studio della matematica, forse per un'altra potranno essere più fruttuose le avventure di Paperino nel mondo della matemagica, o qualche altro espediente ancora.

Bourbaki ha vigorosamente affermato la forte compenetrazione della matematica e della sua storia, giungendo talvolta a sostenere l'identità delle due discipline. [3] Si collegano, in qualche misura, all'ispirazione bourbakista numerosi tentativi di strutturare la comprensione di una teoria matematica seguendo la scansione storica e percorrendo una via di progressiva generalità. Un modello in questo senso, a livello molto avanzato, è dato da [Edwards 1984] (anche se la concezione della matematica dell'autore, fortemente costruttiva, è assai divergente rispetto a quella di Bourbaki). Un esperimento didattico in questa direzione nella scuola italiana è descritto in [Pergola - Zanoli 1995]; ma si potrebbero citare numerosi altri esempi.

Per chiudere, in qualche modo, questa breve rassegna vogliamo esaminare dal punto di vista della storia della matematica due libri di testo che hanno avuto notevole rilevanza nella scuola italiana alcuni anni or sono e che ancora rivelano possibilità differenti di utilizzo della storia della matematica.

In [Lombardo Radice - Mancini Proia 1977] troviamo abbondanza di *Note storiche* che accompagnano l'esposizione strettamente tecnica. Queste note,

[2] [Heiede 1992, p. 153]. Osserva giustamente Nagaoka che "*Non bisogna dimenticare che la storia della scoperta di una verità matematica è eccitante solo per coloro che sono colpiti dalla bellezza di una verità inattesa ed hanno interesse nella sua origine, non da coloro che hanno difficoltà a studiare matematica*" [Nagaoka 1989, p. 176].

[3] [Weil 1978].

molto curate, ed alle quali spesso hanno collaborato persone vicine a Lombardo Radice, sono, a giudizio degli autori, una sorta di 'complemento culturale' dell'esposizione scientifica, la quale possiede sì una sua indipendenza, ma è come arricchita, resa più 'scientifica' se vista in connessione con queste *Note*. Obiettivo delle *Note* è, insomma, quello di esibire il valore <u>culturale</u> della matematica, che <u>non è</u> un insieme di tecniche per le quali non si dà storia se non di un accrescimento meramente cumulativo, ma una disciplina ricca di idee, di contrasti, di sviluppi, così come ogni disciplina realmente 'scientifica'. [4]

Le *Note storiche* sono giudicate dunque un fondamentale complemento per inserire la matematica in un disegno culturale complessivo, una prospettiva assai cara ad Enriques, al quale Lombardo Radice si è spesso richiamato. [5]

Va osservato, tuttavia, che la concezione della storia della matematica espressa nelle note è piuttosto tradizionale, in qualche modo contrastante con il tipo di 'matematica moderna' presentato nel volume. Questo può avere creato motivi di difficoltà.

In [Villani - Spotorno, 1979] la storia della matematica non compare con la stessa sistematicità a lato del discorso tecnico, ma è, talvolta, utilizzata come 'strumento dimostrativo' ancora secondo un modello vicino ad Enriques.

A conclusione delle "Osservazioni generali sui problemi geometrici", il saggio che chiude la Parte Seconda delle *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, Enriques osservava:

"*…se i concetti della Scienza moderna ci appaiono più generali e potenti degli antichi, e se perciò siamo tratti a far valere la superiorità, dobbiamo pure tener presente che essi ci presentano a prima vista come più astratti e quindi più lontani dalla forma immediata in cui sono posti d'ordinario i problemi pratici. Per cogliere in quell'astrattezza il contenuto concreto, ottima via è di rifare la strada che la mente umana ha percorso per giungervi, ripigliando dunque i metodi ed i principi elementari dei Greci.*

Pertanto noi non vogliamo metter da banda nulla di ciò che i geometri antichi ci hanno insegnato; *e domandiamo soltanto ad una più larga ed alta coltura scientifica, di renderci chiari i rapporti di quella geometria elementare, i cui mirabili particolari meglio rispondono al lume dei generali concetti moderni* !". [6]

[4] Si veda in particolare la Nota X del secondo volume, trasparentemente 'hegeliana' nei riferimenti all'astratto ed al concreto.

[5] Si veda in proposito [Di Sieno - Galuzzi 1995].

[6] [Enriques 1983 parte seconda, pp. 595-596]. Si veda anche [Di Sieno - Galuzzi 1986], p. 162.

La dimostrazione del ‘teorema di Pitagora’ proposta nel cap. VI di [Villani - Spotorno, 1979], fondata sul ‘teorema dello gnomone’ e sul confronto ‘visivo’ di figure mostra un atteggiamento simile. Anche se non possediamo un testo greco ove essa compaia in modo esplicito, tuttavia si fonda su alcune delle conoscenze più semplici della geometria greca presentate negli *Elementi*, ed è, con estrema plausibilità, una delle molte dimostrazioni pre-euclidee del teorema.

Nella sua immediatezza, è quasi la constatazione empirica di una evidenza, e possiede una sorta di primazia intellettuale che la rende un opportuno punto di partenza per iniziare uno studente alla geometria. [7]

La storia della matematica è utilizzata in questo libro per fornire elementi dimostrativi dotati di “*contenuto concreto*”, all’interno di un disegno che, di necessità dovrà progressivamente volgersi verso l’astrazione della matematica moderna. Ma questa astrazione verrà sentita come una necessità, piuttosto che come un’imposizione, nella prospettiva adombrata nelle parole di Enriques.

Si potrebbero produrre altri esempi, ma già quelli visti sono sufficienti per mostrare come la storia della matematica possa comparire nella didattica con modalità assai differenziate.

La nostra proposta di utilizzazione della storia della matematica si pone, ulteriormente, in modo differente. Poiché non abbiamo il compito di produrre un libro di testo, e d’altra parte il pubblico al quale ci rivolgiamo è costituito da insegnanti, abbiamo il duplice vantaggio di non dover proporre un impiego sistematico della storia della matematica e di poter attingere ad un notevole patrimonio di conoscenze matematiche preesistenti. Possiamo così presentare una lettura critica di alcuni momenti dello sviluppo della matematica lasciando, poi, all’azione concreta degli insegnanti un eventuale ‘uso’ di ciò che qui verrà discusso.

2. QUALCHE OSSERVAZIONE SULLA TEORIA DELLE PROPORZIONI NEGLI *ELEMENTI* DI EUCLIDE

Certamente gli *Elementi*, opera di quei ‘geometri greci’ dei quali scriveva Enriques nel brano che abbiamo riportato poco sopra, presentano una matematica, e particolarmente una geometria[8], assai vicine all’esperienza sensibile. I

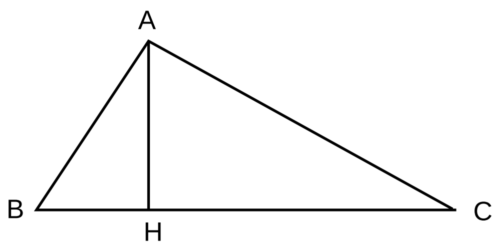
[7] Questa dimostrazione non è però quella degli *Elementi*. Come chiariremo tra breve, gli *Elementi* sono composti con ben precise scelte metodologiche tra le quali vi è anche quella di affidare, possibilmente, ogni dimostrazione ad una singola figura, e non al confronto tra figure.

[8] Dei tredici libri che compongono gli *Elementi* i primi sei sono dedicati alla geometria

‘contenuti concreti’ sono in genere chiaramente visibili. Ma non bisogna assolutamente trascurare il fatto che la composizione degli *Elementi* è una complessa architettura, che risponde a raffinate esigenze metodologiche, e non necessariamente la chiarezza cristallina dell’opera intera si riflette sulle singole parti. E non va sottaciuto il fatto che talvolta vi compaiono veri e propri ‘tour de force’ logici.

È molto importante cogliere questo punto, poiché gli *Elementi* sono un’opera a tal punto inserita nella nostra cultura[9] che l’abitudine può rendere ‘facili’, nella mente di chi le propone, dimostrazioni che non sono per nulla tali, soprattutto se presentate in frammenti dimostrativi piuttosto che in un contesto complessivo.

Consideriamo il caso del teorema di Pitagora. Poche dimostrazioni hanno carattere più immediato di quella fondata sull’osservazione che l’altezza relativa all’ipotenusa suddivide il triangolo dato in due triangoli simili e simili al triangolo dato.



Considerando il triangolo ABH ed il triangolo ABC abbiamo infatti

$$BH : AB = AB : BC \,.$$

Dai triangoli ACH e ABC abbiamo simmetricamente

$$CH : AC = AC : BC \,.$$

Possiamo dunque scrivere

$$AB^2 + AC^2 = BH \times BC + CH \times BC = (BH + CH) \times BC = BC^2 \,.$$

piana, i libri dal settimo al decimo trattano questioni aritmetiche e gli ultimi tre si occupano della geometria solida.

[9]Talvolta in modo non esplicitamente consapevole. Innumerevoli manuali ripropongono le dimostrazioni geometriche di Euclide senza menzionare in modo esplicito la fonte.

Perché negli *Elementi* troviamo una dimostrazione assai più complessa fondata sull'equivalenza delle aree, corrispondente alla nota figura della I.47 ?

Il fatto è che la semplicissima dimostrazione fondata sulla similitudine presuppone un uso libero della teoria delle proporzioni, e questa teoria, è presentata solamente nel Libro V, perché è, come vedremo, una costruzione logica mirabile ma assai complessa. Euclide ha così preferito anticipare molti risultati geometrici ottenibili facilmente con l'uso della teoria delle proporzioni pur pagando il prezzo di fornire per essi nuove dimostrazioni più complicate nell'articolazione dimostrativa, ma più semplici dal punto di vista degli strumenti impiegati.

È importante tener presente questa osservazione per evitare veri e propri errori didattici. Se per esempio la teoria delle proporzioni viene presentata prima del teorema di Pitagora, non ha alcun senso riproporre la dimostrazione del Libro I, proprio perché la caratteristica essenziale di tale dimostrazione è quella di voler essere indipendente dalla teoria delle proporzioni.

Ma vediamo brevemente l'articolazione di questa teoria come presentata nel Libro V. Le difficoltà connesse al problema degli incommensurabili sono ben note. In un immaginario[10] mondo ideale privo di incommensurabili per ogni coppia di segmenti a, b si dà un numero razionale[11] che possiamo indicare con a/b. Avere lo stesso rapporto per quattro segmenti a, b, c, d significa semplicemente constatare l'uguaglianza $a/b = c/d$.

Ma che fare nel nostro mondo concreto ove è estremamente problematico[12] proprio assegnare un significato al rapporto a/b ?

Ebbene, la grande idea che la tradizione attribuisce ad Eudosso, ed i cui sviluppi sono contenuti nel Libro V, è questa: in realtà, nei concreti sviluppi matematici, non occorre prima disporre del rapporto a/b, poi del rapporto c/d per porre l'uguaglianza. Ciò che occorre è l'uguaglianza stessa. Il problema è dunque quello di assegnare significato alla relazione tra quattro segmenti che esprima congiuntamente l'uguaglianza del rapporto.

Ma come fare ? Come dare significato ad $a/b = c/d$ prescindendo dal significato dei termini dei quali si pone l'uguaglianza? [13]

[10] Possibile ? È un problema filosofico che ha una lunga tradizione...

[11] Nel contesto della matematica greca bisognerebbe dire una coppia di interi.

[12] L'esistenza di una teoria delle proporzioni pre-euclidea ed i possibili significati del rapporto di segmenti attraverso l'uso della 'antiphairesis' sono questioni molto dibattute dagli storici della matematica antica. Ci limitiamo a segnalare i nomi di W. Knorr e di D.H. Fowler. I lettori interessati possono rapidamente risalire ai necessari riferimenti bibliografici.

[13] La notazione $a/b=c/d$ per indicare una proporzione è forse la meno adatta. Ma la utilizziamo, pur scusandoci con i lettori, per comodità di scrittura.

Torniamo in un mondo irreale e supponiamo, per un istante, di possedere a/b e c/d. Se questi 'numeri' sono uguali non potrà esservi alcun 'numero' che si frappone tra di essi...e, in particolare, poiché certo in questo mondo fittizio ritroveremo i vecchi numeri razionali, non potrà esservi alcun numero razionale n/m tale che $a/b < n/m < c/d$.

Ma $a/b < n/m$ può essere riscritto nella forma $ma < nb$ ... e siamo ritornati nella realtà prosaica. Allora l'uguaglianza dei rapporti, intesa come la proprietà data dal fatto che nessun numero razionale 'si pone in mezzo', può dar luogo a questa definizione <u>assolutamente rigorosa</u>:

$$a/b = c/d \text{ significa: } \forall m,n \quad \begin{cases} ma < nb \Rightarrow mc < nd \\ ma > nb \Rightarrow mc > nd \\ ma = nb \Rightarrow mc = nd \end{cases}$$

L'idea intuitiva di un numero razionale n/m 'più grande' di a/b è sostituita dalla formulazione precisa $ma < nb$ (e similmente per 'più piccolo' od uguale), e l'idea della 'assenza di numeri' tra a/b e c/d è sostituita dalla implicazione logica: l'idea intuitiva dà luogo ad una definizione precisa.

Si tratta, come si vede, di una definizione realmente brillante che, da molti storici, soprattutto in anni passati, è stata avvicinata alla moderna definizione dei numeri reali. Le differenze in realtà sono notevoli, ma esaminare in dettaglio queste differenze ci porterebbe al di là dei limiti di questo scritto. [14]

Si deve tuttavia notare il carattere assolutamente rigoroso della definizione. Al tempo stesso sono chiari anche i 'problemi tecnici' della teoria. Per esempio, non è certo deducibile immediatamente dalla definizione che $a/b = c/d$ equivalga a $a/c = b/d$.

In effetti, questa proprietà costituisce la Prop. 16 del Libro V, rigidamente connessa a tutte le proposizioni precedenti. Vedremo tra poco la struttura dimostrativa di questa proposizione. Ma per avere un'idea introduttiva della struttura del Libro V, vediamo dapprima la più semplice Prop. 4: essa afferma che, se $a/b = c/d$ allora, comunque scelti due interi m, n sarà

$$(ma)/(nb) = (mc)/(nd).$$

Scegliamo due altri interi arbitrari p, q. Consideriamo $p(ma)$ e $q(nb)$. Per quanto Euclide precedentemente dimostra nelle Proposizioni 1-3, possiamo sostituire queste quantità con $(pm)a$ e $(qn)b$. Similmente possiamo sostituire $p(mc)$ con $(pm)c$ e $q(nd)$ con $(qn)d$. In base alla definizione deve valere l'im-

[14] Tuttavia almeno un rinvio bibliografico si impone: si veda la *Nota* IX di Zariski a [Dedekind, 1926].

plicazione $p(ma) > q(nb) \Rightarrow p(mc) > q(nd)$. Per quanto osservato questa implicazione può essere sostituita da $(pm)a > (qn)b \Rightarrow (pm)c > (qn)d$. Abbiamo ora i multipli pm e qn che sono particolari (infiniti) multipli di a, c e b, d. Poiché per ipotesi $a/b = c/d$ tutte le precedenti implicazioni sono vere, ed abbiamo così esaurito il caso della relazione >. Chiaramente, con argomentazioni pressoché identiche, si esaminano anche i casi di < e =. E con ciò la dimostrazione è completata.

Veniamo ora ad illustrare, per sommi capi, la Prop. 16.

Occorre dimostrare che, se $a/b = c/d$ allora $a/c= b/d$. È possibile permutare i medi.

In base alla definizione, ciò significa dimostrare che $\forall m,n$ la relazione che intercede tra ma ed nc deve implicare la corrispondente relazione tra mb ed nd. Enunciamo, senza dimostrarli, per brevità, tre risultati ottenuti in precedenza.

Nella Prop. 11 Euclide dimostra la *transitività* della uguaglianza di rapporti, ossia che da $a/b = c/d$ e da $c/d = e/f$ possiamo dedurre $a/b = e/f$.

Nella Prop. 14, Euclide dimostra poi che, se $a/b = c/d$ allora da $a > c$ segue $b > d$, e similmente per < ed =.

Nella Prop. 15, infine, egli dimostra che date due grandezze a,b ed un qualsiasi intero m sussiste la proporzione $a/b = ma/mb$.

Ed ecco ora la dimostrazione della Prop. 16.

In base alla Prop. 15, abbiamo che $ma/mb = a/b$, e similmente $nc/nd = c/d$.

Ma dalla transitività dell'uguaglianza dei rapporti dimostrata nella Prop. 11 abbiamo che $ma/mb = nc/nd$.

Dalla Prop. 14 deduciamo ora che se $ma > nc$ allora anche $mb > nd$. E similmente per le relazioni di < ed =. Ma il contenuto dato da queste tre implicazioni coincide esattamente con $a/c = b/d$, e dunque da $a/b = c/d$ abbiamo dedotto esattamente $a/c = b/d$.

Crediamo sia risultato chiaro da questi esempi, pur al di là delle molte omissioni, come la teoria delle proporzioni degli *Elementi* abbia un carattere molto sofisticato. È ricca di sottigliezze logiche, [15] di rigidi concatenamenti di proposizioni, ecc. Inoltre, la teoria è svolta interamente in modo logico-discorsivo, senza alcun supporto di elementi grafici, figure, disegni, ecc.

Si comprende dunque bene la scelta euclidea di ritardarne l'uso presentando prima, nei Libri I-IV, contenuti geometrici di maggiore fruibilità visiva. Tuttavia il carattere delle dimostrazioni euclidee è <u>vincolato</u> a questa scelta. La possibilità di disporre dei numeri reali, e con ciò di una teoria delle proporzio-

[15] Anche se non manca un 'errore', quale l'assunzione implicita dell'esistenza di una grandezza quarta proporzionale nella Prop. 18.

ni molto elementare, rende l'uso delle originali dimostrazioni euclidee dei libri I-IV in gran parte vuoto di senso.

Un altro aspetto metodologico degli *Elementi* sul quale spesso gli studiosi si sono soffermati è dato dalla scelta di Euclide di problematizzare l'uso del Quinto Postulato, creando, nel Libro Primo (con le prime 28 proposizioni e con la 31) una 'geometria generale' indipendente da esso.

Già negli *Elementi* vi è dunque una sorta di propensione verso la geometria non euclidea. È un punto molto interessante, per il quale tuttavia vi è abbondanza di letteratura a cui riferirsi. In particolare il bel libro di Trudeau (si tratta di [Trudeau 1991]) contiene un'accurata analisi del Libro Primo e della sua valenza non euclidea. [16]

3. LE 'COORDINATE' PRIMA DELLA GEOMETRIA ANALITICA

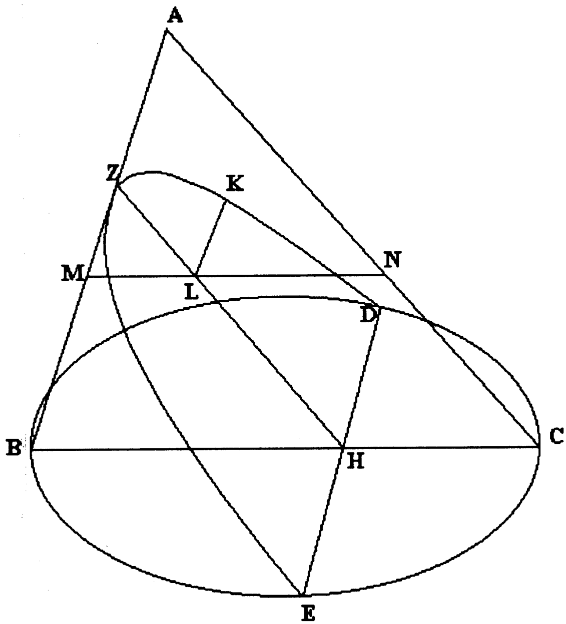
Oggetto di questo paragrafo è l'indagare intorno alla natura della presenza del 'metodo delle coordinate' nella matematica greca. [17] Discuteremo più ap-

[16] Si veda anche [Speranza 1992]. Per quanto possibile consigliamo la lettura del testo di Trudeau in lingua originale, perché la traduzione italiana, per quanto ben eseguita, contiene anche molte scelte arbitrarie. Per esempio, il periodo, nel capitolo 3, che immediatamente precede il paragrafo *Le distinzioni di Kant* (pp. 123-124) è completamente diverso dall'originale. Trudeau scrive della "teoria dei diamanti" senza alcun riferimento alla metafora di Morris Kline in *La matematica nella cultura occidentale*. Ma i traduttori suppliscono alla sua 'dimenticanza' facendo scrivere a Trudeau "*Riprendendo una bella metafora di Morris Kline chiamerò questa concezione* «*teoria della verità come diamante*»...". Può anche darsi che il testo di Trudeau sia arricchito in questo modo, ma è un procedimento discutibile. La prima nota del capitolo, dedicata a qualche dettaglio bibliografico relativo a Kant è soppressa, poiché naturalmente si suppone che, a differenza di quanto avviene in altre nazioni, il lettore italiano abbia piena familiarità con Kant. Intere parti del capitolo 8 sono state soppresse perché forse giudicate irrilevanti. La bibliografia, che è molto interessante, non fosse che per la presenza in essa del primo libro di Robert Pirsig, è stata eliminata, ecc. L'elenco potrebbe continuare. Può anche darsi che l'edizione italiana del libro di Trudeau sia migliore dell'originale, ma il lettore non dovrebbe essere avvertito dei cambiamenti ? Il libro di Trudeau contiene un capitolo su Kant (il terzo) ed alcune considerazioni conclusive alla fine del volume dedicate ancora a Kant notevolmente al di là di alcuni luoghi comuni purtroppo assai diffusi. Tuttavia il lettore interessato ad ulteriori approfondimenti su Kant e la matematica può vedere con profitto [Panza 1995].

[17] L'obiettivo di [Pergola - Zanoli 1995], in riferimento ad Apollonio, è diverso dal nostro, tuttavia ci sembra che vi sia consonanza metodologica nell'uso della storia della matematica per fini didattici.

profonditamente questo punto dopo l'esame di alcune proposizioni tratte dalle *Coniche* di Apollonio e dopo aver svolto qualche osservazione generale sulla struttura di questo trattato. [18]

All'inizio del Libro I, Apollonio dà le 'equazioni' delle tre sezioni coniche. Cosa debba intendersi per 'equazione' risulterà chiaro dall'esame del contenuto della Prop. 11, che descrive il caso della parabola



Consideriamo il cono di vertice A, luogo delle rette che, passanti per A, intersecano il cerchio BCDE, posto in un piano differente da A. [19] Un piano passante per il vertice e per il centro del cerchio determini come sezione con il cono il triangolo ABC, ove BC è un diametro del cerchio BCDE. Un piano

[18] Le principali conoscenze sulle sezioni coniche della matematica greca sono contenute nelle *Coniche* di Apollonio. Degli otto libri che costituivano il suo trattato possediamo il testo greco dei primi quattro ed il testo arabo dei libri V-VII. L'ottavo libro è da giudicarsi perduto. Purtroppo il testo di Apollonio non è stato tradotto in italiano. Noi utilizziamo la traduzione francese del testo greco dei primi quattro libri di Ver Eecke [*Coniche*]. Un'ottima esposizione della storia della matematica greca è tuttora data da [Heath 1921].

[19] L'uso di un cono così generalmente definito è dovuto ad Apollonio, e realizza un notevole progresso rispetto agli autori precedenti, ma non vogliamo soffermarci su questo punto.

ulteriore, parallelo alla generatrice AC, intersechi il cono in modo che D, E, H (definiti come la figura suggerisce) siano su una corda perpendicolare al diametro BC. Questo piano intersecherà il cono secondo la parabola EZD illustrata in figura.

Consideriamo ora un piano parallelo al cerchio BCDE che intersecherà AB in M, AC in N e la parabola in due punti K, K', dei quali rappresentiamo in figura solo il primo, K. Sia, infine L un punto su MN tale che KL sia parallelo a DH. Vogliamo vedere quale relazione intercede tra i segmenti ZL e KL. [20]

Dalla similitudine dei triangoli ABC, ZML deduciamo ML : ZL = BC : AC. Dunque (usando la teoria delle proporzioni con scarso rigore filologico, ma a vantaggio del lettore moderno)

$$ML = ZL \text{ x } \frac{BC}{} \,.$$

Similmente, dalla similitudine di AMN, ZML ed ABC deduciamo la proporzione LN : ZA = MN : MA = BC : AB, e dunque

$$LN = ZA \text{ x } \frac{BC}{AB} \,.$$

Ma i punti M, K e N sono su uno stesso cerchio, e MN è altresì un diametro. Poiché KL è perpendicolare a MN, abbiamo $KL^2 = ML\text{x}LN$. Sostituendo i valori trovati per ML e LN abbiamo

$$KL^2 = ML \text{ x } LN = ZL \text{ x } \frac{BC}{AC} \text{ x } ZA \text{ x } \frac{BC}{AB} = ZL \text{ x } ZA \text{ x } \frac{BC^2}{AC\text{x}AB}$$

Si osserverà ora che la quantità $ZA \text{ x } \dfrac{BC^2}{AC \text{ x } AB}$

è *data*, una volta fissata la posizione del piano. Questa quantità può dunque immaginarsi come esprimente la lunghezza ZT di un certo segmento. [21] Abbiamo dunque stabilito il sussistere della relazione, per ogni punto K sulla parabola, data da

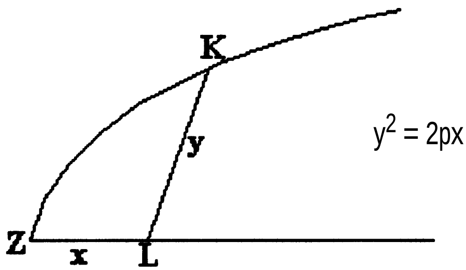
$$KL^2 = ZL \text{ x } ZT \,. \tag{3.1}$$

[20] Per maggiore chiarezza espositiva non seguiamo 'alla lettera' il testo di Apollonio ove questa relazione è posta all'inizio e poi dimostrata. Invece della 'sintesi' apolloniana preferiamo (ad uso del lettore moderno) dare l' 'analisi'.

[21] Nella dimostrazione originale di Apollonio si determina all'inizio un segmento ZT tale che $ZT:ZA=BC^2:AB\text{x}AC$ e poi si esaminano i valori dei rapporti BC/AB e AB/AC ...

Come dobbiamo interpretare la (3.1) ? Osserviamo intanto che questa relazione permette ad Apollonio nel seguito della trattazione, ogni qual volta abbia ad occuparsi di una parabola, di liberarsi da ogni riferimento al cono. La parabola in linea di principio un *luogo solido* è, di fatto considerata, nel seguito del trattato, come una *curva piana* completamente descritta dalla (3.1). Ogni proprietà della parabola viene successivamente dimostrata solo a partire dalla (3.1) con manipolazioni di segmenti aventi una struttura assimilabile a quella dell'algebra elementare. [22] Analogamente accade per le altre sezioni coniche per le quali le proposizioni successive forniscono le corrispondenti 'equazioni'.

In sé considerata, la (3.1) afferma che i punti di una parabola (di una parte della parabola, tutti quelli dalla stessa parte rispetto ad un diametro, ma è un'osservazione di poco rilievo data la simmetria...) sono descritti da coppie di segmenti che verificano la (3.1). Se cediamo alla tentazione di sostituire KL con *y*, ZL con *x* e il segmento costante ZT con 2*p*, abbiamo in effetti $y^2 = 2px$, l'equazione consueta della parabola riferita ad una coppia di diametri coniugati.



Ma, come è ben noto, la matematica greca è priva di un'algebra simbolica e dobbiamo dunque cercare di attenerci strettamente al contenuto della (3.1). Questo contenuto è però, vogliamo ribadirlo, di grande importanza: i punti del piano appartenenti alla parabola sono individuati esattamente dalle coppie di segmenti che verificano la (3.1). Siamo, almeno, in presenza di un *riferimento intrinseco*. E l'uso di questo riferimento consente di svolgere ogni considerazione sulla parabola disponendo di un oggetto assimilabile ad una 'equazione'.

[22] Il libro II degli *Elementi* che fornisce il materiale principale per queste manipolazioni è stato spesso interpretato come una sorta di 'algebra geometrica' secondo una dizione risalente a Zeuthen.

Quanto accennato per la parabola si estende nell'opera di Apollonio all'intera teoria delle sezioni coniche: esse sono considerate come curve dotate di un riferimento intrinseco (una coppia di diametri coniugati). Un riferimento che può mutare (scegliendo un'altra coppia di diametri) e che consente, attraverso la manipolazione delle 'equazioni' che se ne deducono, di ottenere tutti i principali risultati della sua opera.

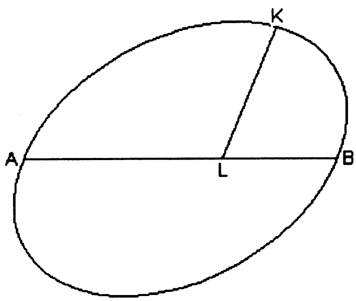
Vogliamo esemplificare quanto detto esaminando una importante proposizione all'inizio del Libro III: esattamente la III.1, limitandoci al caso della ellisse, per semplicità.

Alcune premesse sono necessarie.

In conformità con la (3.1), la 'equazione' della ellisse risulta data (con riferimento alla figura seguente) da

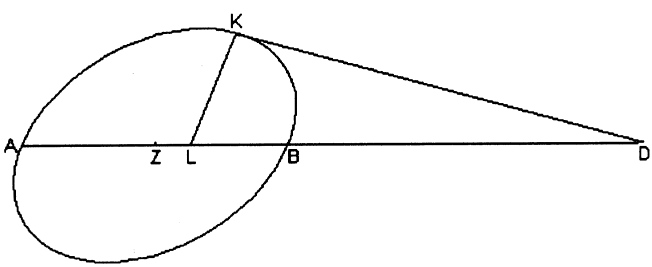
(3.2) $$KL^2 = k \cdot ALxLB ,$$

dove AB è un diametro e KL è una ordinata presa nella direzione del diametro coniugato.

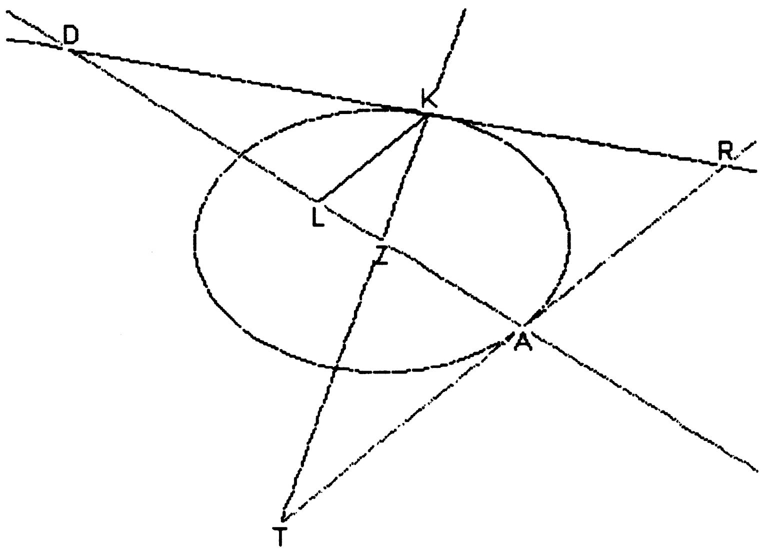


La costante k si ottiene in modo evidente: quando L è nel punto medio del diametro AB, il punto K si trova ad una delle due estremità del diametro coniugato. Indicate con $2a$ e $2b$ le misure di questi diametri sarà $k=b^2/a^2$.

A partire dalla (3.2), è facile caratterizzare le proprietà di tangenza: ad esempio, la I.37 afferma che, con riferimento alla figura, $ZDxZL=ZA^2$.



Utilizzando queste premesse vediamo la dimostrazione della III.1. Si tratta di dimostrare, con riferimento alla figura, che i triangoli KTR e DAR hanno la stessa area.



Per la proprietà vista nella I.37 sarà LZxZD=ZA^2. Questa uguaglianza può riscriversi nella forma di proporzione, ossia ZA : ZD = LZ : ZA.

Da qui si deduce LZ^2 : ZA^2 = LZ : ZD. Dalla similitudine dei triangoli KZL, AZT, segue *area* (KZL) : *area* (AZT) = ZL^2 : ZA^2. Ancora essendo KZL e KZD triangoli aventi le basi su una stessa retta ed il vertice opposto comune, sarà *area* (KZL) : *area* (KZD) = LZ : ZD.

Quindi *area* (KZL): *area* (AZT) = *area* (KZL) : *area* (KZD). E dunque l'area del triangolo AZT è uguale all'area del triangolo KZD. Aggiungendo ad ambo le aree quella del quadrilatero RKZA abbiamo l'asserto.

Crediamo che la dimostrazione vista, sia sufficiente per intuire lo 'stile' di Apollonio. Indubitabilmente il 'motore' della dimostrazione è dato dalla (3.2), perché è da essa che si trae facilmente la I.37, che gioca il ruolo fondamentale nella dimostrazione. Ma anche gli apporti che provengono dalla geometria elementare sono molto importanti. A tal punto che, volendo trascrivere la dimostrazione nei termini della moderna geometria analitica si incontrano calcoli tediosi.[23]

Dall'esame di questa e di altre proposizioni di Apollonio, il lettore può valutare in che misura il metodo delle coordinate sia presente nella geometria greca e in che misura l'algebra (intesa nel senso moderno) sia invece, a nostro giudizio, assente.

Per chiarezza, vogliamo comunque concludere questo paragrafo enunciando quattro punti di vista possibili.

Naturalmente ogni punto di vista sarà tanto più significativo quanto più esso verrà a corrispondere ad una migliore conoscenza della matematica classica, in particolare di Apollonio, ben al di là delle poche osservazioni qui presentate. I punti di vista che ora formuliamo sono dunque da intendersi più che altro come indicazioni delle molteplici direzioni nelle quali una ricerca personale potrebbe svolgersi.

1) Possiamo pensare che il trattamento delle sezioni coniche (e più in generale delle curve geometriche) presente nell'opera di Apollonio sia in effetti equivalente al metodo delle coordinate e che esso sia effettuato per mezzo di manipolazioni di segmenti del tutto equivalenti alle procedure dell'algebra elementare;

2) possiamo assumere la prima parte dell'affermazione precedente relativa al metodo delle coordinate ma rifiutare la seconda: ossia negare che nella matematica greca vi sia qualcosa di simile alle manipolazioni dell'algebra moderna;

3) possiamo negare che l'uso di un riferimento intrinseco corrisponda al moderno metodo delle coordinate, ponendo l'accento sull'importanza di avere un sistema di riferimento per l'intero piano preesistente agli oggetti geometrici, ma possiamo assumere l'esistenza della 'algebra geometrica' ;

4) infine possiamo negare sia la prima che la seconda parte di 1): né il metodo delle coordinate né l'algebra sono presenti nella matematica greca.

I punti 1)…4) sono molto schematici: è possibile graduare o rinforzare le affermazioni che vi sono contenute. È possibile anche immaginare situazioni intermedie…. Tuttavia è importante orientare, in qualche modo, le nostre opinioni in riferimento ad essi.[24]

Si immagini di assumere la posizione espressa da 4): tra la matematica moderna e la matematica classica si dà una forte cesura. Poiché ovviamente a noi

[23] Ma non privi di interesse. Si scopre per esempio che la proprietà (opportunamente riformulata) è valida anche sostituendo le polari alle tangenti...

[24] Per chiarezza vogliamo esprimere anche il nostro orientamento: esso è sostanzialmente riflesso dal punto 2).

spetta il compito di insegnare la matematica moderna, questo può compiersi in piena indipendenza di contenuti e di principi rispetto alla matematica classica.

O immaginiamo di assumere l'atteggiamento espresso da 1). Poiché anche in Descartes la trattazione degli oggetti geometrici avviene sempre con l'uso di un riferimento intrinseco[25] non potremo certo considerare la sua matematica come dotata di grande originalità.[26] E tra la matematica classica e quella moderna dobbiamo scorgere una grande continuità. Ne consegue l'indicazione didattica di fondare un insegnamento della geometria che ripercorra, per quanto possibile, i contenuti della matematica classica.

Dalla posizione che noi assumiamo esplicitamente consegue, naturalmente, che l'originalità del metodo di Descartes si trova in ciò che egli compie mediante l'uso dell'algebra. È ciò che cercheremo di mostrare nel prossimo paragrafo.

4. DESCARTES E LA GEOMETRIA ANALITICA

A Descartes (ed a Fermat) si suole attribuire il merito di avere 'inventato' la geometria analitica. Alla luce di quanto esposto nel paragrafo precedente il merito di Descartes sta più, a nostro giudizio, nell'importanza e nel significato che egli attribuisce all'algebra che nel mero 'metodo delle coordinate'.

In ogni caso, è importante notare che tra ciò che per brevità possiamo pur chiamare 'geometria analitica' di Descartes e ciò che attualmente si insegna con questo nome vi sono numerose ed importanti differenze.

Occorre intanto osservare che Descartes compone la sua *Géométrie* nel 1637 non come un testo autonomo,[27] ma per illustrare la bontà del suo *metodo*. Egli vuol mostrare come una matematica ispirata da questo metodo possa risolvere importanti e difficili problemi. Nella *Géométrie* si trovano, cioè, risultati avanzati (per il tempo nel quale sono composti) e non formulazioni di fatti elementari. In particolare, il contenuto degli *Elementi*, è certamente un presup-

[25] Un punto notato con molta chiarezza da Bompiani in [Bompiani 1921]. Il saggio di Bompiani è realmente notevole, e ingiustamente trascurato dalla storiografia cartesiana.

[26] Zeuthen, un grande matematico ed un grande storico della matematica che ha assunto questa posizione (a lui si deve l'idea della 'algebra geometrica') ha coerentemente sostenuto l'esistenza della geometria analitica nell'antichità.

[27] Il secondo volume delle *Opere scientifiche* di Descartes edito dalla Utet nella Collezione dei classici della scienza curata da Ludovico Geymonat ([Descartes 1983]) ripropone la traduzione integrale del *Discours* e degli *Essays* così come apparsi originariamente a Leyda nel 1637.

posto per il lettore, ed anche, almeno, i primi risultati di Apollonio debbono essere conosciuti.

Consegue dall'impostazione che non vi sarà alcuno spazio per quel complesso di semplici formulazioni analitiche corrispondenti alla posizione reciproca delle rette, od alla distanza di punti, ecc. che abitualmente occupano le prime pagine della 'geometria analitica' della scuola secondaria. La stessa equazione della retta non compare in modo esplicito nella *Géométrie*. Descartes osserva, en passant, che un'equazione di secondo grado in due variabili può ridursi talvolta al primo grado[28] e così rappresentare una retta. Ma è tutto ciò che ha da dire in proposito.

L'abituale presentazione della geometria analitica discende invece da Lagrange,[29] il quale, osservando che per le configurazioni spaziali degli enti lineari non si dà la stessa immediata percezione di quanto avviene per le rette ed i punti nel piano, fornisce le formule necessarie per il trattamento di incidenza, parallelismo, perpendicolarità, ecc. di punti, rette e piani nello spazio. Queste formule hanno un semplice corrispettivo analogo nel caso bidimensionale e, dopo che diviene abituale trattare prima la geometria piana e poi quella solida, con l'inizio dell'Ottocento...si ritrova più o meno la geometria analitica nella forma abituale degli attuali manuali.

Ma è necessario tenere presente la logica sottostante a questo processo. Non si tratta di attribuire giusto credito a Descartes od a Lagrange od a Lacroix, ecc. Si tratta invece di comprendere come le prime abituali formule della odierna geometria analitica piana hanno un ché di innaturale se considerate in se stesse o come primi elementi di un processo conoscitivo autonomo. Esse ripropongono infatti in forma analitica ciò che è già noto per altra via. Esattamente il contrario della originale ispirazione cartesiana !

Naturalmente può essere comunque necessario introdurre queste formule all'inizio dell'insegnamento della geometria analitica. Occorre però molto cura per evitare che il loro carattere ridondante crei confusione nella mente dell'allievo.

Ciò che Descartes realizza con la *Géométrie* è qualcosa, a nostro giudizio, di assai più importante dell'organizzare i punti del piano utilizzando un sistema di riferimento. Quest'idea almeno in una forma limitata si trova già sostanzialmente nella matematica greca, come abbiamo visto. Ciò che Descartes coglie invece con profonda lucidità è il fatto che due teorie, la geometria e

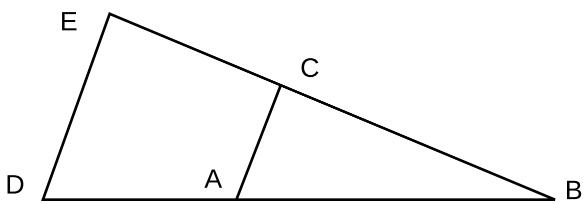
[28]Cfr. [Descartes 1983], p. 582.
[29]In particolare [Lagrange1777].

l'algebra che hanno avuto sostanzialmente sviluppi autonomi fino al suo tempo, possono essere interpretate attraverso opportune leggi di corrispondenza per esprimere una fondamentale identità strutturale. Ecco l'inizio della *Géométrie*:

"Tutti i Problemi di Geometria possono facilmente esser riportati a termini tali che poi, per costruirli, non c'è che da conoscere la lunghezza di alcune linee.

E come tutta l'Aritmetica è costituita soltanto da quattro o cinque operazioni, cioè l'Addizione, la Sottrazione, la Moltiplicazione, la Divisione e l'Estrazione di radici, che può essere considerata una specie di Divisione, così in Geometria, a proposito delle linee che cerchiamo, per approntarle in modo che possano divenire note, non c'è altro da fare che aggiungere o togliere altre linee; oppure, data una linea che, per rapportarla nel miglior modo possibile ai numeri chiamerò unità e che, in genere, può essere presa a piacere, poi, essendo date ancora altre due linee, trovarne una quarta che stia ad una di queste due come l'altra all'unità, ciò che equivale alla Moltiplicazione, oppure trovarne una quarta che stia ad una di queste due come l'unità sta all'altra, ciò che equivale alla Divisione; o infine trovare una, due o più medie proporzionali tra l'unità e qualche altra linea, ciò che equivale alla estrazione di radice quadrata o cubica, ecc."[30]

Le costruzioni alle quali allude Descartes sono assai note, ma val la pena di esaminare in dettaglio almeno la prima costruzione che egli presenta. Sia data una linea AB rappresentante l'unità e occorra moltiplicare BD per BC. Disposti BA e BD su una stessa semiretta e BC su una semiretta qualsiasi di origine B, si traccia CA e poi DE parallela a CA.



Il semplice esame della figura mostra come la linea BE sia quella richiesta. Infatti, la similitudine dà AB : BD = BC : BE. Da questa proporzione traiamo AB x BE = BD x BC.

[30] Cfr. [Descartes 1983, pp. 527-528].

Ma se assumiamo AB come unità (dei segmenti) sarà lecito porre AB x BE = BE. Ed ecco dunque come la reinterpretazione della Prop. 12 del Libro VI degli *Elementi* consente di costruire il segmento prodotto di due segmenti. Ma la stessa figura (e la stessa Proposizione) è anche la chiave interpretativa per la divisione. BC è infatti il risultato della divisione di BE per BD. L'estrazione di radice quadrata si compie con una reinterpretazione della Prop. 13, nel modo ben noto (l'altezza di un triangolo rettangolo è media proporzionale tra le proiezioni dei cateti). Più delicato e complesso è il problema dell'inserzione di più medie proporzionali. È in effetti un problema che percorre tutta la *Géométrie* e sul quale non vogliamo soffermarci.

Comunque, osserva poi Descartes "*Spesso non è però necessario tracciare in tal modo queste linee sulla carta, ma basta designarle con lettere...*"[31]: Avremo così $a + b$, a-b, ab, ecc. nel modo abituale.[32]

Ed ora ecco come ci si deve comportare per risolvere i problemi: "*...volendo risolvere qualche problema, si deve sin dal principio considerarlo come già risolto, e assegnare una lettera ad ogni linea che si ritiene necessaria per costruirlo, sia a quelle che sono note che alle altre. Poi, senza fare nessuna differenza tra quelle note e le incognite, bisogna svolgere il problema seguendo quell'ordine che più naturalmente di ogni altro mostra in qual modo le rette dipendano mutuamente le une dalle altre fino a che non si sia riusciti a trovare il procedimento per esprimere una stessa quantità in due modi, cioè non si sia pervenuti a ciò che si chiama Equazione.*"[33]

Il problema (in generale) sarà determinato quando avremo trovato tante equazioni quante sono le incognite, sarà invece indeterminato quando il numero delle equazioni sarà inferiore a quello delle incognite.

Lasciando al lettore il piacere di formulare problemi la cui soluzione dipenda da un'unica equazione di secondo grado, Descartes mostra poi come si possa costruire geometricamente la soluzione di un'equazione di questo tipo. Poiché i segmenti considerati debbono avere lunghezza positiva avremo in realtà molti tipi di equazioni di secondo grado. Consideriamo quella della forma

$$z^2 = az + b^2 \tag{4.1}$$ [34]

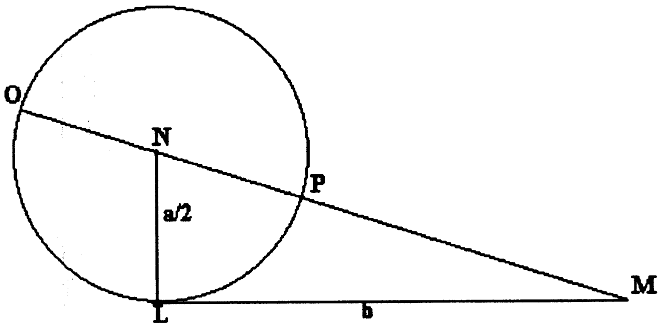
[31] Ibid., p. 531.

[32] Ma l'uso di questa notazione algebrica è proprio dovuto a Descartes e rappresenta un contributo molto rilevante al progresso della matematica.

[33] [Descartes 1983], p. 536.

[34] Descartes non usa ancora il segno =, ma un segno che rappresenta *æ* (iniziali di aequatur) stilizzato. Inoltre non scrive b^2 ma bb. Descartes ha abbandonato la "lex perpetua homogeneorum" di Viète, ma essendo z un segmento incognito e b un segmento dato pos-

Descartes considera ora la figura seguente



Con tutta evidenza la misura del segmento OM è data da

$$\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}$$

e corrisponde dunque all'unica radice positiva dell'equazione. Per costruire la soluzione basterà dunque costruire un triangolo rettangolo avente cateti di lunghezza b e $a/2$ e costruire una circonferenza di raggio $a/2$ avente centro nel vertice dato dall'intersezione del cateto di lunghezza $a/2$ con l'ipotenusa. L'ipotenusa prolungata taglierà il cerchio nel punto opportuno. Naturalmente, la figura precedente suggerisce immediatamente una connessione con il teorema della tangente e della secante: una connessione che non può certo essere sfuggita alla mente di Descartes. Riscritta l'equazione nella forma

$$z\,(z-a)=b^2\,, \qquad (4.2)$$

la connessione diviene evidente anche dal punto di vista analitico. Sarebbe tuttavia (a nostro giudizio) un errore pensare che Descartes abbia riscritto la (4.1) nella forma (4.2) deducendo dalla costruzione geometrica l'espressione della radice. Al contrario, è questa espressione che suggerisce la costruzione, ed il legame con il teorema della tangente e della secante è, per Descartes, un fatto di importanza trascurabile[35].

siamo certo pensare che l'uguaglianza debba completarsi con una quantità che rappresenta un'area.

[35] Ancora una volta vogliamo ribadire che si tratta di una nostra opinione.

Nella matematica cartesiana la geometria ha, per quanto attiene ai principi, il ruolo fondamentale, e Descartes scrive un trattato di geometria e non un trattato di algebra. Ma nella pratica concreta della sua matematica questo rapporto s'inverte e l'algebra ha una netta prevalenza[36].

In una celebre lettera ad Elisabetta, del novembre 1643 egli afferma infatti:

"*Io osservo sempre, indagando sopra un problema geometrico, che le linee, delle quali mi servo per risolverlo siano parallele o si intersechino ad angolo retto, per quanto ciò sia possibile; & e non considero che questi teoremi: che i lati dei triangoli simili hanno la stessa proporzione tra di loro & che, nei triangoli rettangoli il quadrato dell'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati dei cateti. E non ho alcuna esitazione ad introdurre più incognite pur di poter ridurre il problema a tali termini che la soluzione dipenda da questi due teoremi soltanto.*" [37]

In una lettera di poco successiva egli ribadisce questa posizione:

"*...mi sembra che il sovrappiù, che consiste nel cercare la costruzione e la dimostrazione usando le proposizioni di Euclide, nascondendo il procedimento algebrico, non sia che un divertimento per i piccoli geometri, ed è cosa che non richiede né molto spirito né molta dottrina.*" [38]

Occorre tenere ben presente che l'impostazione cartesiana, soprattutto con la seconda edizione latina della *Géométrie* curata da Van Schooten[39], ha avuto larga influenza[40] e, in molta parte, è penetrata nel senso comune, costituendo talvolta una sorta di background, quasi non più avvertito, per chiunque abbia ricevuto un'educazione matematica.

Questo punto risulterà chiaro dall'esame di un importante problema risolto da Descartes nel Terzo libro della *Géométrie*.[41] Si tratta del cosiddetto 'problema del quadrato'[42] che può formularsi in questo modo: sono dati un quadrato

[36] Questa questione è stata oggetto di un largo dibattito tra gli storici della matematica. Molte prese di posizioni (tra le quali quella di uno degli autori di questo scritto) si trovano nella raccolta di saggi in [Belgioioso e altri 1990].

[37] È la lettera CCCXXV nel volume sesto di [Descartes 1976].

[38] Si tratta della lettera CCCXXVIII dello stesso mese di novembre

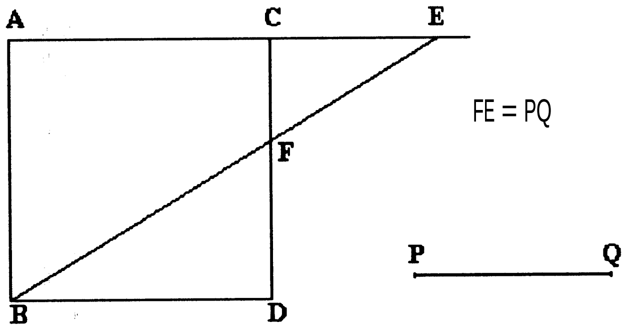
[39] Si tratta di [Descartes1659].

[40] Anche se, come vedremo, Newton tenterà di riproporre i termini della questione.

[41] Un'analisi molto brillante della trattazione cartesiana di questo problema si trova in [Brigaglia 1994].

[42] Nel *Commento* al Tema 1 dei programmi approntati dalla "Commissione Brocca", si auspica il confronto di metodi classici e metodi analitici per risolvere uno stesso problema.

ABCD ed un segmento PQ. Occorre condurre da un vertice, per esempio B, un semiretta in modo che il segmento EF compreso tra un lato opposto CD ed il prolungamento dell'altro lato opposto AC abbia esattamente la lunghezza di PQ.

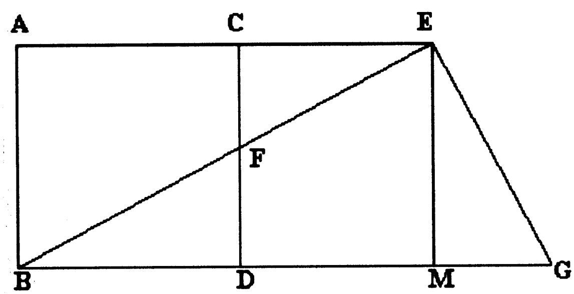


Una soluzione geometrica di questo problema si trova nel libro VII delle [*Collezioni*], ed è data congiuntamente dal Lemma contenuto nella Proposizione 71 e dalla Proposizione 72, ove Pappo sta commentando i risultati ottenuti da Apollonio nei due libri (perduti) *Sulle inclinazioni.*

È chiaro dal testo di Pappo come Apollonio conoscesse anche la soluzione dell'analogo e più generale problema relativo al rombo, una soluzione andata perduta e ricostruita nei tempi moderni da Marino Ghetaldi, un allievo di Viète. Pappo presenta nel commento al testo di Apollonio una soluzione diversa del problema del quadrato scoperta da Eraclito.

Descartes si limita a trattare il caso del quadrato, per fornire una soluzione <u>algebrica</u> in contrasto con quella geometrica riferita da Pappo. Non è dato sapere se egli non sia riuscito a risolvere algebricamente l'analogo problema del rombo, né se egli conoscesse o meno l'opera di Ghetaldi. Vediamo comunque il contenuto della Proposizione 71 delle [*Collezioni*].

Si conduca da E la perpendicolare EG che incontri il lato BD prolungato in G.



Sarà allora, afferma l'enunciato del Lemma: $DG^2 = BD^2 + FE^2$.

Per dimostrare questa identità tracciamo anche EM perpendicolare su BG e osserviamo ora che dal triangolo rettangolo BEG si deduce

$$BG^2 = BE^2 + EG^2 .$$

Possiamo ora scrivere l'identità precedente nella forma

$$BGx(BD+DG) = BEx(BF+FE) + EG^2 ,$$

e dunque sviluppando

$$BGxBD + BGxDG = BExBF + BExFE + EG^2 . \tag{4.3}$$

Poiché il quadrilatero FDGE è inscrittibile in un cerchio, abbiamo la identità

$$BGxBD = BExBF .$$

La (4.3) può allora scriversi nella forma

$$BGxDG = BExFE + EG^2 . \tag{4.4}$$

Osserviamo ora che i due triangoli BDF e EMG sono uguali, e dunque EG=BF. La (4.4) diviene allora

$$BGxDG = BExFE + BF^2 .$$

Ma il secondo membro può anche scriversi nella forma $BExBF + FE^2$. [43]
Abbiamo allora

$$BGxDG = BExBF + FE^2 . \tag{4.5}$$

Dalla (4.5), osservando ancora che BExBF=BGxBD, abbiamo

$$BGxDG = BGxBD + FE^2 ,$$

ossia

$$(BD+DG)xDG = (BD+DG)x\ BD + FE^2 .$$

Togliendo da ambo le parti la stessa quantità BDxDG abbiamo infine

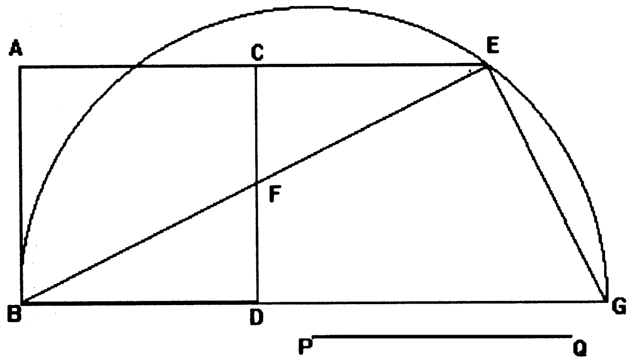
$$DG^2 = BD^2 + FE^2 .$$

La trattazione, che qui si vedrà, di questo problema mostra questo 'confronto' in un caso storicamente molto rilevante.

[43] $(a+b)b + a^2 = (a+b)a + b^2$.

Disponendo di questo Lemma, la soluzione del problema diviene quasi evidente. Ecco il contenuto della Proposizione 72.

Si immagini il problema risolto.



Se da E tracciamo la perpendicolare EG che intersechi il prolungamento del lato BD in G, avremo che (per il Lemma) $DG^2=BD^2+FE^2$. Ma BD e FE sono segmenti di lunghezza nota, perché BD è dato e deve essere FE=PQ; e dunque conosciamo la lunghezza di DG, e dunque quella di BG. Poiché BEG deve essere un triangolo rettangolo E deve stare sulla semicirconferenza di diametro BG. Ma E deve stare anche sul prolungamento di AC, e dunque è individuato in posizione. L'analisi è terminata. Ora la sintesi: sul prolungamento di BD si prenda G in modo che DG^2 sia uguale a $BD^2 + EF^2$. Si tracci la semicirconferenza di diametro BG, e sia E il punto ove tale semicirconferenza incontra il lato AC prolungato. La retta contenente B ed E è quella richiesta.

Si tratta, come si vede, di una soluzione molto brillante. Ma non è un po' artificiosa? Proviamo a pensare al problema in termini algebrici, immaginando di non conoscere quanto contenuto nel testo di Pappo: verrebbe mai in mente di prendere come incognita la misura del segmento DG e di ottenere l'equazione valutando EF in termini di DG e degli altri dati ? Certamente no, afferma Descartes: "*Chi non è però familiare con tale costruzione* [ossia quanto esposto da Pappo] *potrebbe scoprirla solo con una certa difficoltà: infatti, ricercandola secondo il procedimento qui proposto, non penserebbe mai di assumere* DG *per la quantità incognita, ma piuttosto* CF o FD, *giacché queste, più facilmente delle altre, ci conducono all'Equazione...*".[44]

[44] [Descartes 1983, pp. 656-7].

Seguiamo allora il suggerimento di Descartes, sia DF=x, CD=a ed indichiamo con c la misura del segmento PQ=FE. Sarà BF= $\sqrt{a^2+x^2}$, CF=a-x, e dalla similitudine dei triangoli BDF, CFE si trae:

$$\frac{(a-x)}{c}=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

Di qui, si ottiene immediatamente l'equazione:

(4.6) $$x^4 - 2ax^3 + (2a^2 - c^2)x^2 - 2a^3x + a^4 = 0$$

È veramente molto facile arrivare ad essa.

Ma come accorgersi ora che si tratta di un'equazione corrispondente ad un 'problema piano', ossia che essa possiede una radice che si può costruire, a partire dai segmenti a e c, utilizzando costruzioni che richiedono solo l'uso della riga e del compasso e che questa radice è la soluzione del problema geometrico ?

Poche pagine prima, con 'elegante nonchalance', per usare una felice espressione di Aldo Brigaglia[45], Descartes ha spiegato come comportarsi proprio utilizzando tra gli esempi, apparentemente scelti a caso, ma in realtà accuratamente vagliati, quest'equazione.

A giudizio di Brigaglia, Descartes illustra in queste pagine, almeno per sommi capi, un metodo <u>rigoroso</u>[46] per decidere se un'equazione di quarto grado, corrispondente ad un dato problema geometrico, sia, in realtà, l'equazione di un problema piano.

Per esporre quanto sostiene Brigaglia (che noi condividiamo pienamente) occorre qualche definizione preliminare. E occorre altresì avvertire il lettore che le argomentazioni di Brigaglia contengono anche elementi di natura congetturale, sicché è possibile anche dissentire dalle sue conclusioni. Ciò va detto <u>non</u> per diminuire i meriti dell'autore, ma per avvertire il lettore della necessità di considerare in modo critico quanto ora viene esposto poiché, come sarà chiaro, non si tratta di una semplice enunciazione di 'fatti'.

Intanto, l'ambiente algebrico dei coefficienti che Descartes utilizza in generale per le sue equazioni, può essere efficacemente descritto, in termini moderni, dall'anello di polinomi $\mathbb{Z}[a,b,c,\dots]$ ottenuto aggiungendo a $\mathbb{Z}$ un numero <u>finito</u> di quantità indipendenti a, b, c,… che esprimono la misura dei segmenti costituenti i dati dei problemi che originano le equazioni.

[45] [Brigaglia 1994].
[46] Naturalmente secondo gli standard di rigore del Seicento.

È probabile che Descartes pensi che, anche quando in un'equazione debbano comparire numeri frazionari, sia sempre possibile, modificando eventualmente di poco i dati[47] ridursi al caso di un'equazione i cui coefficienti siano tutti in $\mathbb{Z}[a,b,c,...]$. Questo è indispensabile per poter utilizzare il 'lemma di Gauss', che possiamo immaginare alla portata di Descartes, almeno nel caso di polinomi di terzo e quarto grado.

Inoltre, i polinomi che Descartes considera sono sempre monici. [48] Descartes non pone questa condizione in modo esplicito, ma essa si impone in modo evidente all'attenzione del lettore della *Géométrie*.

Naturalmente, le soluzioni delle equazioni debbono essere cercate in un ambiente più vasto di quello dei coefficienti. Se pensiamo alle manipolazioni di quantità che Descartes ritiene lecite per costruire la soluzione di un problema piano, dobbiamo dapprima pensare all'ovvio ampliamento $\mathbb{Z}[a,b,c,...] \subset \mathbb{Q}[a,b,c,...]$, e poi a $\mathbb{Z}[a,b,c,...] \subset \mathbb{Q}(a,b,c,...)$, ove con $\mathbb{Q}(a,b,c,...)$ si intende, come di consueto, il campo delle frazioni di $\mathbb{Q}[a,b,c,...]$, ossia la totalità delle funzioni razionali nelle indeterminate *a*, *b*, *c*,...

Questo corrisponde naturalmente alla possibilità di effettuare divisioni tra le quantità via via ottenute.

Ma il campo $\mathbb{Q}(a,b,c,\ldots)$ non è, naturalmente, ancora sufficiente: dobbiamo prevedere la possibilità data dall'estrazione di radici quadrate e dobbiamo dunque considerare l'estensione di $\mathbb{Q}(a,b,c,\ldots)$ data dalla intersezione di tutti i campi contenenti $\mathbb{Q}(a,b,c,\ldots)$ e chiusi rispetto all'operazione di estrazione di radice quadrata.

Indichiamo con $\mathbb{K}$ questo campo: esso conterrà elementi del tipo

$$+\frac{a^2}{bc}, \sqrt{a}, \frac{a+\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a+b\sqrt{c}}}, \sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c+\frac{a+b}{a-b}}}}, \ldots$$

Tutto ciò e solo ciò, insomma, che si può ottenere con una successione finita di operazioni lecite, date da + ,- , ·, / e √ , sugli elementi *a, b, c,* … sarà un elemento di $\mathbb{K}$. [49]

[47] Ad esempio ponendo *a* al posto di *a*/2, ecc. Descartes pensa che questo sia possibile anche, in certa misura, con la presenza di irrazionali. Se in un'equazione nella incognita *x* compare, ad esempio, il radicale √3 tra i coefficienti, possiamo pensare a sostituzioni del tipo $y=x\sqrt{3}$, ecc. Questo punto non è molto chiaro nella *Géométrie*. Si veda comunque [Descartes 1983, p. 644].

[48] E dunque necessariamente *primitivi*.

[49] Si veda anche [Castelnuovo 1924-27].

Ed ecco ora la definizione che implicitamente Descartes utilizza: [50]

Un problema sarà piano quando l'equazione corrispondente ha almeno una radice in $\mathbb{K}$ la quale, pensati a, b, c,… come numeri positivi, e tenuto conto delle eventuali limitazioni che vanno poste su di essi, esprima una quantità positiva.

Naturalmente, perché questa definizione sia sensata, occorre dimostrare che ogni equazione corrispondente al problema geometrico che la genera abbia la stessa caratteristica: un risultato che Descartes tacitamente assume senza dimostrazione.

Ed ecco ora i teoremi che, a giudizio di Brigaglia, Descartes possiede:

1) *Un problema di terzo grado che dia luogo ad un'equazione in* $\mathbb{Z}[a,b,c,\dots]$ *è piano se e solo se l'equazione stessa è riducibile in* $\mathbb{Z}[a,b,c,\dots]$.

2) *Un polinomio* (*monico*) *di terzo grado a coefficienti in* $\mathbb{Z}[a,b,c,\dots]$ *è irriducibile se e solo se non ammette radici in* $\mathbb{Z}[a,b,c,\dots]$.

È poi possibile, come vedremo tra breve, associare ad ogni equazione di quarto grado una risolvente di terzo grado, la quale, se l'equazione originaria ha i suoi coefficienti in $\mathbb{Z}[a,b,c,\dots]$ ha anch'essa i suoi coefficienti in $\mathbb{Z}[a,b,c,\dots]$.[51] Nei termini di questa risolvente abbiamo ancora:

3) *Se un problema di quarto grado, che dia luogo ad un'equazione in* $\mathbb{Z}[a,b,c,\dots]$ *è piano, allora la risolvente di terzo grado dell'equazione stessa è riducibile in* $\mathbb{Z}[a,b,c,\dots]$.

Il risultato enunciato al punto 3) si può in qualche modo invertire:

[50] Non ci sembra che vi siano problemi nell'attribuire in qualche modo a Descartes i contenuti di queste formulazioni moderne: gli strumenti dell'algebra moderna, che abbiamo usato liberamente, danno certo una maggior semplicità di descrizione, ma non alterano la natura del problema.

[51] Ma può succedere che la risolvente abbia i suoi coefficienti in $\mathbb{Z}[a,b,c,...]$ anche se l'equazione originaria ha i coefficienti in $\mathbb{Q}[a,b,c,...]$. Come abbiamo già osservato, tuttavia, le equazioni che Descartes considera sono sempre riconducibili a $\mathbb{Z}[a,b,c,...]$ con modifiche inessenziali dei dati.

4) *Se la risolvente di terzo grado associata all'equazione a coefficienti in* $\mathbb{Z}[a,b,c,\ldots]$, *corrispondente ad un problema di quarto grado, è riducibile, allora le quattro radici dell'equazione originaria sono in* $\mathbb{K}$.

Non è possibile produrre maggiore simmetria negli enunciati 3) e 4) senza lasciar cadere la restrizione (geometrica) a radici reali e positive. Il complesso dei risultati di Descartes conduce tuttavia ad un procedimento che, almeno nei casi più semplici, dà luogo ad un *algoritmo* per decidere se un problema che corrisponde ad un'equazione di quarto grado in $\mathbb{Z}[a,b,c,\ldots]$ è piano e, in caso affermativo, per risolverlo.

Si noterà infatti che la ricerca delle radici di un'equazione di terzo grado a coefficienti in $\mathbb{Z}[a,b,c,\ldots]$ che <u>appartengano</u> a $\mathbb{K}$ ha anch'esso una natura (parzialmente) algoritmica. [52] Tali radici debbono infatti dividere il termine noto, e possiamo immaginare che, nei problemi che in pratica ci vengono proposti si abbia la possibilità effettiva di fattorizzare il termine noto in fattori irriducibili.

Poste tali premesse ecco il <u>metodo</u> per decidere se un problema, corrispondente ad un'equazione di quarto grado, sia piano:

a) Associamo all'equazione originaria la risolvente di terzo grado;

b) Esaminiamo la possibilità che la risolvente abbia radici in $\mathbb{K}$, ricercandole tra i divisori del termine noto (che immaginiamo di poter conoscere). Se non vi sono radici tra di essi il problema <u>non</u> è piano. Ma in caso affermativo procediamo con il punto c);

[52] I coefficienti dei polinomi che Descartes considera in $\mathbb{Z}[a,b,c,...]$ sono relativamente semplici, sicché è possibile in pratica decidere quali siano i loro fattori. Ma Descartes afferma perentoriamente che il suo metodo, per decidere se un problema, che dà luogo ad un'equazione di terzo o quarto grado, sia piano, non conosce ostacoli, e dunque bisogna immaginare che egli abbia qualche ragione per affermare che egli sa determinare i fattori dei polinomi di $\mathbb{Z}[a,b,c,...]$ in piena generalità. Ora, per il caso dei polinomi in una variabile, il risultato è relativamente semplice (In linea di principio. In pratica può essere molto complesso: cfr. [Childs 1989, cap. 13] o, per risultati ancora migliori [Davenport-Siret-Tournier 1988, cap. 4]), ma le dimostrazioni implicano tecniche molto al di là della matematica cartesiana. Il caso poi dei polinomi in più variabili dà ancora luogo alla possibilità (anche qui 'teorica', ma questo non avrebbe rilievo per Descartes) di calcolare in un numero finito di passi gli eventuali fattori; ma ancor più in questo caso, siamo al di là dei limiti della matematica cartesiana. Un caso molto semplice è dato dai polinomi in una variabile aventi radici tutte reali e positive. In questo caso, un attimo di riflessione sulla natura dei coefficienti mostra subito delle ovvie limitazioni per i coefficienti degli eventuali fattori. È possibile che Descartes, con brusca generalizzazione (non gli era infrequente...) punti direttamente al caso generale lasciando ai suoi lettori il compito di sistemare i particolari necessari. Questa questione sarà affrontata con maggiori dettagli in un articolo di prossima pubblicazione da parte di uno degli autori [Ringraziamo L. Robbiano e C. Traverso per le utili informazioni forniteci].

c) Utilizziamo una di queste radici per spezzare il polinomio rappresentativo dell'equazione originaria nel prodotto di due polinomi di secondo grado e calcoliamo le quattro radici (in $\mathbb{K}$) dell'equazione originaria;
d) Valutiamo infine se una (o più di una) di queste radici può essere soluzione del problema.

Si può dubitare, come già abbiamo accennato, del fatto che Descartes possieda <u>tutti</u> gli elementi dimostrativi corrispondenti ai punti precedenti.

Non è però in dubbio il fatto che egli proceda <u>come se</u> questi elementi siano in suo possesso: e vediamo ora la cosa dapprima in generale, indicando la costruzione della risolvente di terzo grado. Poi vedremo la concretezza dell'esempio.

Data una generica equazione di quarto grado, possiamo sempre ridurci intanto, con una traslazione, [53] al caso di un'equazione della forma

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 ,$$

ove i coefficienti sono in $\mathbb{Z}[a,b,c,\ldots]$, [54] e possiamo supporre che q sia diverso da 0, perché, in caso contrario, l'equazione (biquadratica) è concettualmente assimilabile ad un'equazione di secondo grado.

Valutiamo ora i possibili divisori del polinomio a primo membro della forma $x - \alpha$, ove α è un divisore di r in $\mathbb{Z}[a,b,c,\ldots]$. Se troviamo un divisore di tale natura il polinomio a primo membro si decompone nel prodotto $(x-\alpha)\cdot f(x)$ ove $f(x)$ è un polinomio di terzo grado. Possiamo allora cercare le soluzioni tra α e le eventuali radici di $f(x)$ in $\mathbb{Z}[a,b,c,\ldots]$ le quali, ancora, vanno ricercate tra i divisori del suo termine noto. Abbiamo dunque un numero *finito* di casi da valutare. [55]

Dopo aver esaurito l'esame delle possibili decomposizioni in fattori di grado 1 e 3, dobbiamo passare ad esaminare la possibilità di scrivere il polinomio rappresentativo come prodotto di due polinomi di secondo grado.

Supponendo che la cosa sia possibile, avremo l'uguaglianza

$$(x^2 + yx + u)\,(x^2 - yx + v) = x^4 + px^2 + qx + r ,$$

[53] Si tratta, evidentemente, di un modo di esprimersi moderno.

[54] Eventualmente con una lieve modifica dei dati, come si è osservato nella nota 45.

[55] Sempre naturalmente nell'ipotesi che si sappiano valutare i fattori del termine noto di $f(x)$.

dove i coefficienti dei termini di primo grado nei polinomi fattori debbono avere somma nulla affinché il prodotto sia privo del termine in x^3 .

Confrontando i coefficienti, otteniamo:

$$\begin{cases} u+v-y^2 = p \\ -uy+vy = q \\ uv = r \end{cases}$$

Consideriamo le prime due equazioni come costituenti un sistema lineare in u, v, ossia

$$\begin{cases} u+v = p+y^2 \\ -u+v = \dfrac{q}{y} \end{cases} \quad .$$ [56]

Abbiamo allora

$$u = \frac{1}{2}\left(p+y^2-\frac{q}{y}\right)$$

$$v = \frac{1}{2}\left(p+y^2+\frac{q}{y}\right) \quad .$$

Deve essere $uv=r$, e dunque otteniamo

$$\frac{1}{4}\left(p+y^2-\frac{q}{y}\right)\left(p+y^2+\frac{q}{y}\right) = r \quad ,$$

e dunque infine

(4.7) $$y^6+2py^4+(p^2-4r)y^2-q^2 = 0 \quad .$$ [57]

La (4.7) è la <u>risolvente</u> nominata in precedenza (di terzo grado, naturalmente, in y^2). Per quanto visto al punto 2), l'indagine si riduce ora ai divisori di q^2. Se troviamo una radice tra di essi in $\mathbb{Z}[a,b,c,\ldots]$, possiamo proseguire l'indagine e trovare le radici in $\mathbb{K}$ dell'equazione originaria da esaminare come possibili soluzioni, altrimenti dobbiamo concludere che il problema non è piano.

Veniamo ora al caso dell'equazione corrispondente al problema del quadrato, i cui coefficienti sono in $\mathbb{Z}[a,c]$, e cominciamo con il ridurci al caso di

[56] Deve essere $y\neq 0$. Ma è facile notare che il caso dato da $y=0$ corrisponde all'equazione biquadratica.

[57] Possiamo anche considerare la (4.7) come la risolvente cubica che si può associare all'equazione di quarto grado <u>indipendentemente</u> dall'indagine intorno alla natura del problema che essa rappresenta. Ma non è questo l'uso che qui ne fa Descartes.

un’equazione priva del termine di terzo grado. Basterà porre x=z+a/2 nella (4.6). Sostituendo si ha infatti la nuova equazione

$$z^4+\left(\frac{1}{2}a^2-c^2\right)z^2-\left(a^3-ac^2\right)z-\frac{1}{4}a^2c^2+\frac{5}{16}a^4=0 \quad . \tag{4.8}$$

Quest’equazione ha, come si vede, i coefficienti in $\mathbb{Q}[a,c]$, ma basta sostituire a con $2a$ per riottenere un’equazione nell’ambiente originario. Tuttavia questo non è neppure necessario perché la risolvente cubica è già in $\mathbb{Z}[a,c]$. Essa è infatti:

$$y^6+(a^2-2c^2)y^4+(c^4-a^4)y^2-(a^6+2a^4c^2+a^2c^4)=0 \ .$$

Il termine noto è della forma $-a^2(a^2+c^2)^2$, e si verifica facilmente che a^2+c^2 è una radice di quest’equazione in y^2. La (4.8) può allora scriversi eguagliando a zero il prodotto dei due polinomi:

$$z^2-\sqrt{a^2+c^2}\,z+\frac{3}{4}a^2-\frac{1}{2}a\sqrt{a^2+c^2}$$
$$z^2-\sqrt{a^2+c^2}\,z+\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{2}a\sqrt{a^2+c^2} \quad .$$

Osserva ora Descartes che le uniche soluzioni accettabili (in z) sono date dall’eguagliare a zero il primo polinomio (perché il secondo ha o radici complesse o radici negative e di modulo maggiore di a/2). Le soluzioni possibili vanno dunque cercate fra

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{2}a\sqrt{a^2+c^2}}$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{2}a\sqrt{a^2+c^2}}$$

Ma, come si ricorderà, x=z+a/2, e dunque solo la prima soluzione fornisce il valore accettabile:

$$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{2}a\sqrt{a^2+c^2}} \quad .$$ [58]

[58] Sommando *a/2* alla seconda radice si ottiene, evidentemente, un valore maggiore di *a*.

Val la pena di aggiungere qualche considerazione sulla soluzione di Descartes.

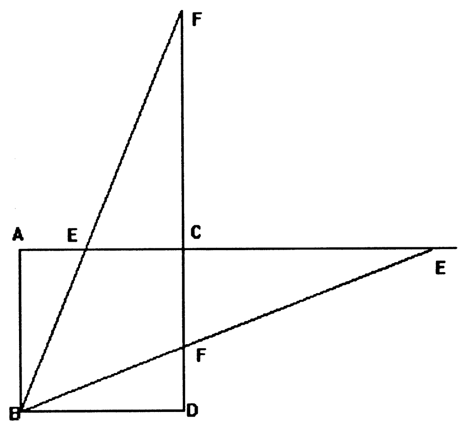
Il netto primato assegnato all'algebra, del quale si diceva in precedenza, è del tutto evidente. Le difficoltà inerenti al trattamento dell'equazione, qui come in generale, sono considerate in qualche misura 'naturali' ed appartiene al procedere metodico il loro superamento: non importa quanto complessa sia l'equazione. Essa è la via 'giusta' se procede in modo naturale dai dati geometrici.

La geometria ricompare alla fine quando dobbiamo discriminare tra le soluzioni algebriche. Ma di qui inizia un lungo cammino che sarà percorso dai successori di Descartes:[59] perché non guardare queste altre soluzioni 'rifiutate' per cercare di vedere se non possano avere un qualche significato?

Vediamo in questo caso concreto: la seconda radice positiva, data da

$$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{2}a\sqrt{a^2+c^2}}\ ,$$

rappresenta un valore maggiore di a. Basta un attimo di riflessione per comprendere come essa corrisponda alla posizione della retta BE simmetrica rispetto alla diagonale BC. F è sul prolungamento di CD ed E si trova tra A e C.

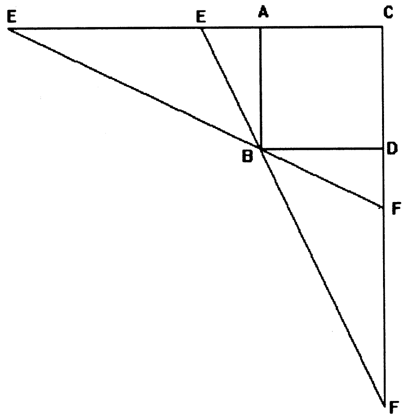


[59] Per verità parte di questo cammino era stata compiuta in precedenza: Girard (in [Girard 1629]) considerando lo stesso problema del quadrato in un caso numerico, con a=4 e c=√153, era giunto all'equazione $x^4 - 8x^3 - 121x^2 -128x +256 = 0$. Le quattro soluzioni 1,16, (-9+√17)/2, (-9-√17)/2 sono tutte interpretate da Girard, nel modo che vedremo tra poco. Commentando l'interpretazione delle radici negative egli osserva con orgoglio: "*Une chose de consequence en Geometrie, incogneue auparavant*". Non è dato sapere se Descar-

Ma come interpretare le due (eventuali) radici corrispondenti a

$$z^2 + \sqrt{a^2 + c^2}\,z + \frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + c^2} = 0 \quad ?$$

Perché questo polinomio abbia radici reali occorre, come è facile verificare che sia $c > 2\sqrt{2a}$. E come è disposta la soluzione, in questo caso ? Questa volta E sarà sul prolungamento di AC dalla parte di A ed F sul prolungamento di CD dalla parte di D.



Anche in questo caso abbiamo due soluzioni simmetriche rispetto alla diagonale BC.

Le quattro soluzioni trovate in corrispondenza ad un'unica equazione corrispondono dunque a quattro problemi geometrici lievemente differenti pur se intimamente collegati.

Ora in una situazione come questa sono possibili due atteggiamenti: trascurare l'esistenza di altre possibili 'soluzioni' oltre a quella originariamente cercata, rinunciando ad una trasferibilità diretta dei risultati algebrici in quelli geometrici; oppure riformulare il problema geometrico in modo da rispettare il parallelismo tra algebra e geometria. Scegliendo quest'ultima possibilità il pro-

tes conoscesse o meno l'opera di Girard; ma va comunque osservato che la notazione algebrica di Girard (ripesa da quella di Stevin) non solo è meno agile di quella cartesiana ma è anche adatta solamente a rappresentare polinomi in una variabile a coefficienti numerici. Le potenze di una variabile *x* sono indicate da numeri racchiusi in un piccolo cerchio e non vi sono altri simboli per i coefficienti né per altre eventuali variabili. (Si veda anche [Loria 1950, pp. 439-444]).

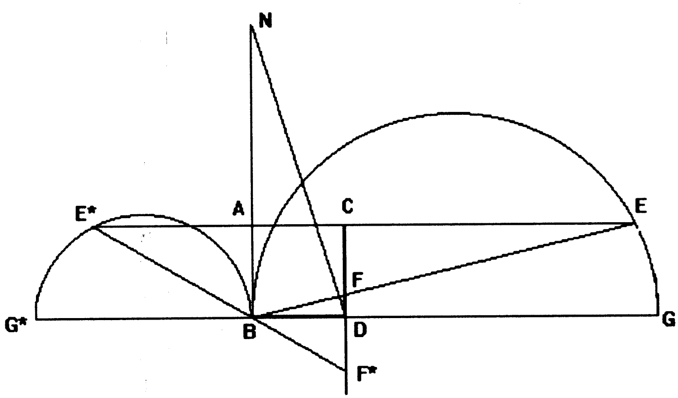
blema dovrebbe così formularsi: *Dato il quadrato* ABCD *ed un segmento di lunghezza arbitraria* PQ *si conduca da un vertice* B *una semiretta che incontri la retta contenente il segmento* AC *in* E *e la retta contenente* CD *in* F *in modo che il segmento* EF *abbia la lunghezza di* PQ.

Siamo chiaramente di fronte ad una scelta metodologica importante: Descartes non si è schierato apertamente per l'ultima possibilità (non si dimentichi che egli ha scritto un trattato di geometria), ma ci sembra evidente che l'intera impostazione del suo discorso matematico, quale poi si sviluppa nella moderna geometria analitica si svolge in questa direzione.

È un punto molto importante: il netto primato che nella geometria analitica è affidato all'algebra non è una sorta di dato di fatto, ma è una scelta metodologica della quale occorre essere consapevoli.

Chiudiamo comunque questo paragrafo dedicato a Descartes osservando tuttavia che il passaggio *geometria* ⇒ *algebra* implicito nel 'metodo' può spesso avere interessanti retroazioni sulle costruzioni geometriche. È facile dimostrare che la costruzione originaria di Eraclito data nelle [*Collezioni*] può essere riformulata in modo da consentire un maggior riavvicinamento tra algebra e geometria.

Consideriamo la figura seguente:



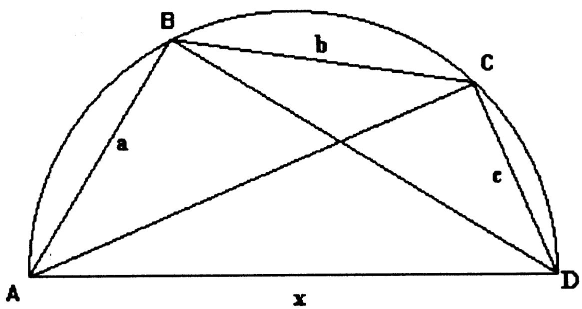
Rappresentiamo il segmento dato come BN, e sia $DG^2=BD^2+BN^2$. Il cerchio di diametro BG è quello della costruzione di Apollonio. Ma sia DG* = DG dalla parte opposta rispetto a G, e consideriamo il semicerchio di diametro BG*. Il prolungamento di AC dalla parte di G* interseca il semicerchio in due punti dei quali E* è tale che E*F*=BN, come è facile verificare. L'analisi della soluzione algebrica permette dunque di 'completare' la soluzione di Eraclito in un modo a priori imprevedibile a partire dai soli dati geometrici.

5. NEWTON CRITICO DI DESCARTES

L'*Arithmetica Universalis* di Newton può essere considerata come un serrato dialogo che, molti anni dopo la morte di Descartes, Newton intrattiene idealmente con il filosofo francese. Negli anni della sua gioventù egli era stato quasi un 'discepolo' di Descartes, elaborando alcune tra le sue principali acquisizioni proprio a partire dall'edizione latina della *Géométrie*. Poi si era progressivamente staccato dai metodi algebrici di Descartes per avvicinarsi sempre più allo spirito della geometria classica. [60]

Alla ferma convinzione cartesiana sulla necessità di limitare all'essenziale l'uso dei teoremi geometrici da utilizzare per affrontare i problemi geometrici Newton oppone il convincimento dell'opportunità di un uso assai più libero della geometria.

Egli stesso sceglie un esempio che illustra con grande chiarezza il suo punto di vista. Si consideri il seguente problema: [61]



Sono dati tre segmenti di lunghezza *a*, *b*, *c*. Si vuol determinare il diametro di un semicerchio di diametro AD in modo che, scelti su di esso i due punti B e C come in figura, sia AB = *a*, BC = *b*, e CD = *c*. Newton osserva che è possibile giungere all'equazione corrispondente al problema in molti modi utilizzando solamente la similitudine ed il teorema di Pitagora, e si sofferma egli stesso ad illustrare alcune possibilità. Ma, sebbene questi modi non implichino soverchie difficoltà, c'è una via più 'naturale' di ottenere rapidamente

[60]Per un approfondimento di quanto qui detto in modo molto schematico ci permettiamo di rinviare a [Galuzzi 1990] e, naturalmente, all'ampia bibliografia ivi discussa.

[61]Originariamente formulato da Van Schooten nella sua "Appendix, de cubicarum aequationum resolutione", in [Descartes 1659], p. 354.

quest'equazione: evidentemente si ha BD = $\sqrt{x^2 - a^2}$, ed AC = $\sqrt{x^2 - c^2}$.

Poiché ABCD è un quadrilatero inscritto in un cerchio, abbiamo

$$ac + bx = \sqrt{x^2 - a^2}\sqrt{x^2 - c^2} \quad .$$

Di qui si deduce immediatamente l'equazione:

$$x^3 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)x - 2abc = 0 \quad .$$

Questo, a giudizio di Newton è il modo 'vero' per giungere all'equazione corrispondente al problema, perché, indipendentemente dalla maggiore o minore difficoltà dei teoremi geometrici impiegati, è il modo inerente al problema stesso. Un quadrilatero inscritto in un cerchio possiede determinate proprietà che, qualora siano conosciute, debbono essere usate. È del tutto arbitrario prescindere da quella che è la natura geometrica reale del problema.

È chiaro che se formuliamo questa contrapposizione con Descartes in modo troppo rigido giungiamo facilmente ad affermazioni estreme e piuttosto sterili. Vi sono tuttavia chiaramente delineate due linee di tendenza che, in fondo, sono rappresentative delle rispettive filosofie: il razionalismo e l'empirismo.

Possiamo scegliere di risolvere i problemi cercando, in ogni caso, di ridurre la loro soluzione ad alcuni *elementi fondamentali*, o piuttosto possiamo ricercare la *via più facile* con libero ricorso a tutto ciò che sappiamo.

È in gioco, in fondo, un diverso concetto di semplicità: semplice è la soluzione di un problema che utilizza solo strumenti, per definizione, semplici e procedimenti logici elementari; oppure semplice è ciò che immediatamente aderisce alla natura stessa del problema.

È fin troppo ovvio che il largo margine di arbitrarietà presente nelle due definizioni di semplicità poste può dar luogo a interminabili discussioni: cosa è mai la 'natura stessa' di un problema ? E come descriverla al di là dell'ovvietà di alcuni esempi ? Chi e perché decide che alcuni strumenti sono 'semplici' ? E così via.

Non mancano, come si vede, gli interrogativi.

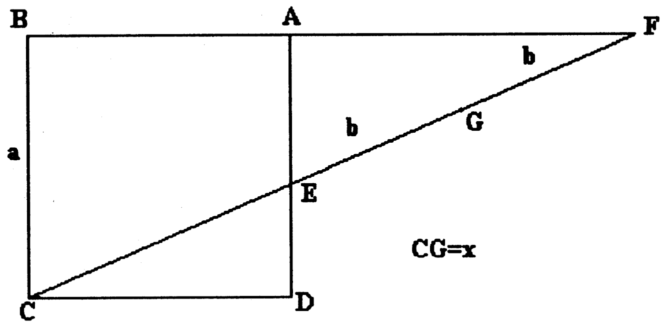
Tuttavia la mancanza di 'soluzioni' di un problema non implica affatto che esso abbia importanza trascurabile. Al contrario, si può dire che inerisce alla reale natura dei problemi veri proprio la loro mancanza di soluzioni banali:[62]

[62]Si pensi ad alcuni classici problemi filosofici, quali l'esistenza di idee innate, o la reale natura del male, ecc.

ognuno deve trovare personalmente la sua risposta.[63]

Senza voler scivolare nella retorica, occorre dunque dire che Newton e Descartes presentano due opzioni tra le quali ognuno deve collocare le proprie scelte metodologiche.

L'atteggiamento di Newton si coglie con grande chiarezza nella sua soluzione del 'problema del quadrato'.



Naturalmente Newton conosce benissimo la soluzione di Descartes[64], così come quella presentata da Pappo. Tuttavia la soluzione di Descartes gli sembra inutilmente complicata: viene certo spontaneo assumere DE come incognita,

[63]Residuo di un certo snobismo, indubbiamente presente in Descartes, è l'atteggamento di alcuni insegnanti rispetto alla trigonometria: "sterile complesso di formule tutte facilmente deducibili dall'osservazione che seno e coseno di un angolo sono le coordinate di un punto del cerchio trigonometrico". Certo, l'ultima parte dell'affermazione è vera; ma la trigonometria possiede anche innumerevoli formule di grande bellezza e profonda utilità, indispensabili in molti settori della matematica avanzata (si pensi solo all'analisi armonica). E sarebbe estremamente penoso (o forse praticamente impossibile) dedurre queste formule con il solo ricorso alle definizioni fondamentali. Un vero e proprio topos di coloro che ereditano troppo rigidamente il punto di vista di Descartes è il disprezzo anche per una formula semplice quale $2 \cos\alpha \cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$ (e delle altre simili). A che servono tali formule ? Qual'è il loro uso ? Al che si potrebbe rispondere con un lungo elenco di usi realmente importanti di formule di questo tipo nella teoria dell'interpolazione trigonometrica, ecc. All'altro estremo, eredi di un atteggiamento newtoniano ridotto in caricatura, si pongono coloro che pretendono di dedurre 'immediatamente' formule trigonometriche di complessa architettura con l'uso libero di altre formule altrettanto complesse, finendo a costringere i loro allievi a sterili esercizi di memoria. Una banalità quale "in medio stat virtus" talvolta non è priva di efficacia persuasiva.

[64] Cfr. [Galuzzi 1990].

ma se l'equazione risulta complicata perché non cambiare la scelta ? CE è un'altra incognita ragionevole, così come CF (individuata la lunghezza di CE o di CF si tratta di intersecare un cerchio di centro C, e raggio dato, con AD o con il prolungamento di BA dalla parte di A). Tuttavia, ecco un suggerimento 'pratico': poiché CE e CF non sembrano avere l'una un carattere privilegiato rispetto all'altra è 'ragionevole' tentare con una semplice funzione simmetrica delle due. Newton pone dunque CG=(CE+CF)/2=x. E, per ulteriore maggior simmetria pone anche EF=2b.

Dunque CE=x-b, mentre CF=x+b. Abbiamo ora BF= $\sqrt{(x+b)^2-a^2}$, e, dalla similitudine dei triangoli CED e CBF abbiamo ancora (x-b) : a = (x + b) : BF. Si ottiene l'equazione:

$$a(x+b)=(x-b)\sqrt{(x+b)^2-a^2} \; .$$

È immediato verificare che, quadrando ambo i membri otteniamo

$$x^4-2\left(a^2+b^2\right)x^2-2a^2b^2+b^4=0 \; .$$

Una scelta accurata della variabile conduce dunque ad un'equazione biquadratica e con ciò alla immediata soluzione del problema.

Naturalmente, la soluzione di Newton può parere in qualche modo artificiosa, 'virtuosistica' in confronto a quella cartesiana.

Come possiamo, infatti, sapere a priori che la scelta della variabile fatta conduce al successo ? Bisogna provare ed eventualmente cambiare e riprovare, ecc. Il metodo di Descartes pare più affidabile e sicuro: ma è così vero ? Non dobbiamo saper fattorizzare un polinomio in più variabili quando siamo giunti al 'cuore del problema' ?

L'osservazione fatta sul termine noto della risolvente che, " 'ovviamente' si fattorizza in…" non val tanto quanto l'ovvietà di scegliere una variabile che rifletta la simmetria dei dati ?

Si tratta, come si vede, di questioni non semplici. Ciò che, purtroppo spesso capita in situazioni come queste (ed è successo) è che si formano 'seguaci' dell'uno o dell'altro maestro che, irrigidendo le scelte metodologiche, trasformano la bellezza della matematica nella rigida immobilità di procedure ripetitive.

Chi consideri lo stato miserando al quale spesso si è ridotto l'insegnamento dei 'problemi con discussione' nei nostri licei (i problemi sembrano spesso scelti fra i più stupidi, giusto al fine di dar luogo ad una discussione di assoluta banalità) potrà forse trarre sollievo e conforto dall'esame di questo affascinante 'problema del quadrato', la cui discussione, durata per secoli, non smette di avere elementi di vivo interesse.

BIBLIOGRAFIA

APOLLONIO

[*Coniche*] *Les coniques d'Apollonius de Perge*, traduzione francese dei primi quattro libri delle *Coniche* di Apollonio, Bruges: Desclée, De Brouwer et C^{ie}, 1923.

BELGIOIOSO (G.) - CIMINO (G.) - COSTABEL (P.) - PAPULI (G.) (EDITORI)

[1990] *Descartes*: *il metodo e i saggi*, Atti del Convegno per il 350° anniversario della pubblicazione del *Discours de la Méthode* e degli *Essays*, Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana, 1990.

BOMPIANI (E.)

[1921] "Che cosa contiene la *Géométrie* di Descartes ? ", *Periodico di Matematiche*, serie IV, vol. 1 (1921), pp. 313-325.

BRIGAGLIA (A.)

[1994] "Rapporti tra algebra e geometria: problemi storici e problemi metodologici", in AAVV, *Materiali del Convegno* "*Per una storia dell'algebra*", Quaderno P.RI.ST.EM. n. 6, Milano: Università Bocconi, 1994.

CARBONE (L.) - GUERRAGGIO (A.) (a cura di)

[1995] *Aspetti della matematica italiana del Novecento*, Napoli: La Città del Sole, 1995.

CASTELNUOVO (E.)

[1993] *Pentole, ombre, formiche. In viaggio con la matematica*, Firenze: La Nuova Italia, 1993.

CASTELNUOVO (G.)

[1924-27] "Sulla risolubilità dei problemi geometrici cogli istrumenti elementari: contributo della geometria analitica", in [Enriques 1924-27, parte seconda, pp. 231-262].

CHILDS (L.)

[1989] *Algebra. Un introduzione concreta*, edizione italiana a cura di Carlo Traverso, Pisa: ETS editrice, 1989.

DAVENPORT (J.H.) - SIRET (Y.) - TOURNIER (E.)

[1988] *Computer Algebra*, Londra &c.: Academic Press, 1988.

DEDEKIND (R.)

[1926] *Essenza e significato dei numeri*, traduzione dal tedesco e note storico critiche di O. Zariski, Roma: Stock, 1926.

DESCARTES (R.)

[AT] *Œuvres*, edite originariamente da C. Adam e P. Tannery, 12 volumi. Nuova presentazione, Parigi: Vrin, 1974- 1986.

[1659] *Geometria a Renato Descartes anno 1637 Gallice edita*, a cura di F. Van Schooten, Amsterdam 1659-61.

[1983] *La Geometria*, in R. Descartes, *Opere scientifiche*, vol. 2 (a cura di E. Lojacono), Torino: Utet, 1983. [Il volume propone la traduzione integrale del *Discours de la Méthode et les Essais*, originariamente pubblicato a Leida nel 1637.]

DI SIENO (S.) - GALUZZI (M.)

[1995] "La storia della matematica in Italia ed il «Periodico di Matematiche»", in [Carbone - Guerraggio 1995], pp. 25-68.

EDWARDS (H.M.)

[1984] *Galois theory*, New York &c.: Springer-Verlag, 1984.

ENRIQUES (F.) (coordinatore)
[1924-27] *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, Bologna: Zanichelli, 1924-27. Riproduzione anastatica, Bologna: Zanichelli, 1983.
[1924-27] “Alcune osservazioni generali sui problemi geometrici”, in [Enriques 1924-27, pp. 575-596].
EUCLIDE
[*Elementi*] *Gli Elementi di Euclide*, trad. it. a cura di A. Frajese e L. Maccioni, Torino: Utet, 1970.
FURINGHETTI (F.),
[1993] “Educazione matematica e storia”, *Lettera Pristem* **9** (1993), pp. 38-39.
FREGUGLIA (P.)
[1988] *Ars Analytica. Matematica e methodus nella seconda metà del Cinquecento*, Busto Arsizio: Bramante Editrice, 1988.
GALUZZI (M.)
[1990] “I *marginalia* di Newton alla seconda edizione latina della *Geometria* di Descartes ed i problemi ad essi collegati”, in [Belgioioso - Cimino - Costabel - Papuli 1990], pp. 387- 417.
GIRARD (A.)
[1629] *Invention nouvelle en l’Algebre*, Amsterdam, 1629.
GRUGNETTI (L.)
[1989] “The role of History of Mathematics in an interdisciplinary approach to mathematics teaching”, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, **21** (1989), pp. 133-138.
HEATH (SIR T.)
[1921] *A History of Greek Mathematics*, nuova edizione Dover dell’edizione originale apparsa nel 1921: New York, 1981.
HEIEDE (T.)
[1992] “Why teach history of mathematics ? ”, *Mathematical Gazette*, **76** (1992), pp. 151-157.
LAGRANGE (J.L.)
[1775] “Solution analytique de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires”, *Nouv. Mem. Berlin, anné 1773*, Berlino 1775. *Œuvres* 3, pp. 661-692.
LOMBARDO RADICE (L.) - MANCINI PROIA (L.)
[1977] *Il metodo matematico*, 3 volumi, Milano: Principato, 1977.
LORIA (G.)
[1950] *Storia delle matematiche*, Milano: Hoepli 1950. Ristampa anastatica, Milano: Cisalpino Goliardica, 1982.
MANARA (C.F.) - MARCHI (M.)
[1993] *L’insegnamento della matematica*, Brescia: Editrice La Scuola, 1993.
MARCHINI (C.) - SPERANZA (F.) - VIGHI (P.)
[1992] *La geometria da un glorioso passato ad un brillante avvenire*, Atti del 3° incontro Internuclei Matematrici delle Scuole Secondarie Superiori, Parma 26-27-28 novembre 1992.
MICALE (B.) - PLUCHINO (S.)
[1995] *Diciassettesimo Convegno sull’insegnamento della Matematica: l’insegnamento della Geometria*, Latina 27-28-29 Ottobre 1994, Notiziario dell’Unione Matematica Italiana, supplemento al n. 8-9 (agosto settembre 1995).

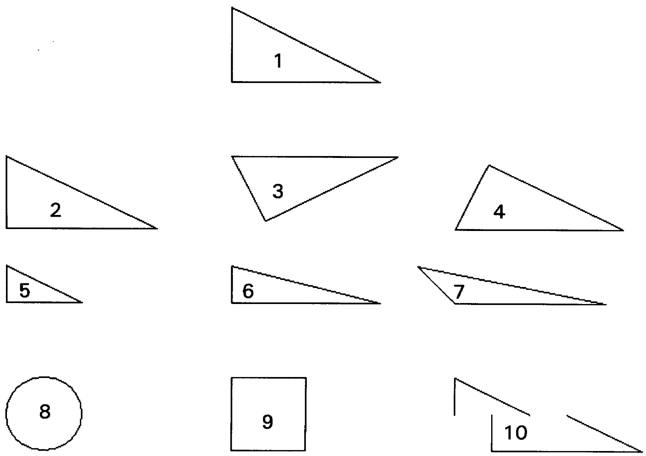
NAGAOKA (R.)
[1989] "On the role that history of mathematicians play in Mathematics education", *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* **21** (1989), pp. 176-179.
NEWTON (I.)
[1728] *Universal Arithmetick*, facsimile della trad. inglese del 1728, in *The Mathematical Works of Isaac Newton*, a cura di D. T. Whiteside, vol. II, New York e Londra: Johnson Reprint Corporation, 1964.
PANZA (M.) - PONT (J.C.)
[1995] *Le savants et l'épistemologie vers la fin du XIX siècle,* Paris: Blanchard 1995.
PANZA (M.)
[1995] "L'intuition et l'evidence. La philosophie kantienne et les géométries non euclidiennes: relecture d'une discussion", in [Panza - Pont 1995, pp. 39-87].
PAPPO
[*Collezioni*] *La Collection mathématique*, traduzione francese di P. Ver Eecke, nuova ristampa, due volumi, Parigi: Blanchard, 1982.
PERGOLA (M.) - ZANOLI (C.) (coordinatori)
[1994] "Introduzione alla geometria delle coniche", Gruppo di lavoro Triennio Scuola secondaria Superiore, in [Micale - Pluchino 1994, pp. 225-231].
SPERANZA (F.)
[1992] "La geometria non euclidea come e perché", in [Marchini - Speranza - Vighi 1992, pp. 39-54].
TRUDEAU (R.)
[1991] *La rivoluzione non euclidea,* traduzione italiana, Torino: Bollati Boringhieri, 1991.
VILLANI (V.) - SPOTORNO (B.)
[1979] *Matematica. Idee e metodi*, Firenze: La Nuova Italia, 1979.
WEIL (A.)
[1978] "History of Mathematics: why and how", in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Helsinki 1978, pp. 227-236.
ZUCCON (V.) (a cura di)
[1991] *Il progetto della Commissione Brocca*, Brescia: Editrice La Scuola, 1991

TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE E PROGRAMMA DI ERLANGEN

Giuseppe Accascina
Dipartimento di Metodi e Modelli Applicati - Università di Roma "La Sapienza"

1. IL PROGRAMMA DI ERLANGEN

Consideriamo le seguenti dieci figure. La figura 10 è formata da due spezzate; quella superiore contiene i suoi estremi mentre quella inferiore non li contiene.



Supponiamo di mostrare la figura 1 ad un gruppo di persone che non abbiamo necessariamente conoscenze di geometria. Mostriamo poi loro la figura 2 e chiediamo se essa sia uguale alla figura 1.

Molto probabilmente ci sarà chi dirà che la figura 1 è uguale alla figura 2 . Ma vi sarà probabilmente anche chi sosterrà che la figura 2, poiché non è formata dagli stessi punti della figura 1, non è uguale alla figura 1.

In breve, per ognuna delle figure 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ci potrebbe essere chi sostiene che essa sia uguale alla figura 1 e chi sostiene il contrario.

Forse nessuno sosterrà che la figura 10 sia uguale alla figura 1.

È chiaro che ognuno di coloro che ha risposto alle nostre domande, più o meno inconsciamente, ha fissato delle "regole del gioco": due figure sono "uguali" se esse verificano queste regole. Le risposte sono differenti perché le regole usate sono differenti.

Ma come vengono fissate queste regole?

Cerchiamo di dare una risposta seguendo lo spirito del “programma di Erlangen” descritto nel 1872 da F. Klein nella conferenza da lui svolta allorché diventò professore presso l'Università di Erlangen.

Fissiamo innanzitutto un piano π su cui sia definita un'unità di misura e quindi una distanza tra punti. D'ora in poi indicheremo con il simbolo $d(A,B)$ la distanza tra i punti A e B del piano π.

Chiamiamo **figura** del piano π un qualsiasi sottoinsieme di π.

Chiamiamo **trasformazione** del piano π una qualsiasi funzione biunivoca di π in sé stesso. Indichiamo con il simbolo $T(\pi)$ l'insieme delle trasformazioni del piano.

Diciamo che una figura S è **uguale** ad una figura S' se esiste una trasformazione del piano π tale che $f(S)=S'$.

Abbiamo introdotto nell'insieme delle figure del piano la relazione di uguaglianza. Si tratta di una relazione di equivalenza. Sono cioè verificate le seguenti proprietà:

1) (proprietà riflessiva) $S=S$ per ogni figura S.

Infatti si ha $1(S)=S$, dove 1 è la **funzione identica** $1:\pi \to \pi$, definita da $1(P)=P$ per ogni punto P di π. Ovviamente la funzione 1 è biunivoca e quindi appartiene a $T(\pi)$.

2) (proprietà simmetrica) $S = S' \Rightarrow S' = S$.

Infatti $S=S'$ implica che esista una trasformazione f di π, tale che $f(S)=S'$. Ma allora anche la funzione f^{-1} è una trasformazione di π. Poiché $f^{-1}(S')=S$ si ha $S'=S$.

3) (proprietà transitiva) $S = S'$ e $S' = S'' \Rightarrow S = S''$.

Infatti $S=S'$ implica che esista una trasformazione f di π, tale che $f(S)=S'$. Inoltre $S'=S''$ implica che esista una trasformazione g di π, tale che $f(S')=S''$. Ma allora la funzione $g \circ f$, **composizione** delle trasformazioni f e g, definita da $(g \circ f)(P) = g[f(P)]$, è una trasformazione di π.

Poiché $(g \circ f)(S) = g[f(S)] = g(S') = S''$, si ha $S=S''$.

Notiamo che, nella dimostrazione che la relazione di uguaglianza è una relazione di equivalenza, hanno giocato un ruolo essenziale le seguenti tre proprietà dell'insieme $T(\pi)$ delle trasformazioni del piano π:

1) $1 \in T(\pi)$ dove 1 è la funzione identica
2) $f \in T(\pi) \Rightarrow f^{-1} \in T(\pi)$
3) $f \in T(\pi)$ e $g \in T(\pi) \Rightarrow g \circ f \in T(\pi)$

In altre parole l’insieme $T(\pi)$ con l’operazione $\circ$ di composizione tra funzioni è un **gruppo**.

Torniamo ora alle nostre 10 figure. Si determina facilmente una trasformazione f del piano π tale che l'immagine della figura 1 sia la figura 2. La figura 1 è quindi uguale, secondo la nostra definizione, alla figura 2. Di più, si può dimostrare che la figura 1 è uguale ad ognuna delle 10 figure. Alcune delle trasformazioni sono facilmente determinabili, altre meno.

Consideriamo, per esempio la figura 10, e confrontiamola con la 1. Chiamiamo S la figura 1 e S' la figura 10. Possiamo trovare un movimento rigido f del piano tale che la parte superiore di S sia da esso trasportata nella parte superiore di S'. Consideriamo la retta r che divide la parte superiore di S' dalla sua parte inferiore. La retta r divide il piano in due parti. La prima, π_1 , è data dal semipiano chiuso delimitato dalla retta r contenente la parte superiore di S. La seconda, π_2 , è data da tutti gli altri punti del piano π. Consideriamo ora la trasformazione g del piano che, ristretta a π_1 sia l'identità e che, ristretta a π_2, sia la traslazione che porti la parte inferiore di $f(S)$ nella parte inferiore di S'. Si ha perciò $(g \circ f)\ (S) = S'$ e $g \circ f$ è una trasformazione del piano. Ne segue che le figure 1 e 10 sono uguali.

Molto probabilmente nessuna delle persone da noi interpellate accetterà di buon grado il fatto che le figure 1 e 10 siano uguali. Ciò dipende dal fatto che nessuno accetta la funzione $g \circ f$.

Ecco quindi che è necessario fissare quali siano le trasformazioni del piano accettabili. In altre parole è necessario fissare un sottoinsieme G dell' insieme $T(\pi)$ delle trasformazioni del piano π.

Diciamo che una figura S è **uguale** a una figura S' se esiste $f \in G$ tale che $f(S)=S'$.

Poiché vogliamo che la relazione di uguaglianza sia una relazione di equivalenza dobbiamo scegliere l'insieme G in modo tale che siano verificate le seguenti condizioni:

1) $1 \in G$ dove 1 è la funzione identica
2) $f \in G \Rightarrow f^{-1} \in G$
3) $f \in G$ e $g \in G \Rightarrow g \circ f \in G$

Un sottoinsieme G di $T(\pi)$ verificante queste tre condizioni si dice **sottogruppo** di $T(\pi)$.

Fissato un sottogruppo G di $T(\pi)$, la G - **geometria** studia le proprietà geometriche del piano che sono invarianti attraverso trasformazioni appartenenti a G.

Esistono pertanto tante geometrie del piano: una per ogni sottogruppo delle trasformazioni del piano.

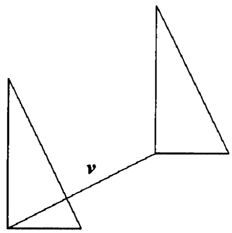
I sottogruppi delle trasformazioni del piano che più ci interessano sono il sottogruppo delle isometrie, il sottogruppo delle similitudini e quello delle affinità.

2. ISOMETRIE

Chiamiamo isometria del piano una trasformazione geometrica del piano che conserva le distanze.

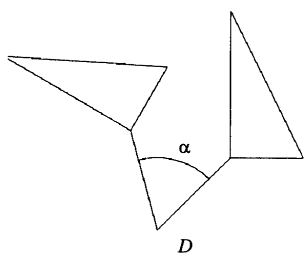
Ecco alcuni esempi di isometrie:

1) Traslazione di un vettore $\boldsymbol{v}$:



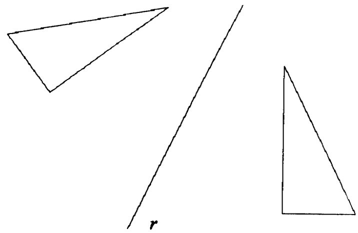
Indichiamo questa isometria con il simbolo t_v. Notiamo che, se $\boldsymbol{v}$ è un vettore non nullo, l'isometria t_v non ha alcun punto fisso. Si ha cioè $t_v(P) \neq P$ per ogni punto P del piano.

2) Rotazione intorno ad un punto D di un angolo α in senso antiorario:



Indichiamo questa isometria con il simbolo $\boldsymbol{r}_{D,\alpha}$. Notiamo che la rotazione $\boldsymbol{r}_{D,\alpha}$ mantiene fisso il punto D. Se poi $\alpha = 2k\pi$ con k numero intero, allora $\boldsymbol{r}_{D,\alpha} = 1$ e quindi ogni punto è fisso.

3) Simmetria rispetto ad una retta ***r***:



Indichiamo questa isometria con il simbolo s_r. Notiamo che s_r mantiene fissi tutti e soli i punti della retta r.

Ricordiamo che una trasformazione geometrica del piano π è una funzione biunivoca del piano in sé stesso. Ciononostante noi abbiamo rappresentato la traslazione, la rotazione e la simmetria assiale disegnando un triangolo e la sua immagine attraverso la trasformazione. Ciò è lecito. Vedremo infatti che una isometria è completamente determinata una volta che si conoscano le immagini dei vertici di un triangolo.

L'insieme delle isometrie soddisfa le condizioni del programma di Erlangen. Si ha infatti la seguente proposizione:

L'insieme delle isometrie di π è un sottogruppo del gruppo $T(\pi,\circ)$ delle trasformazioni di π.

DIMOSTRAZIONE.
1) La trasformazione identica *1* conserva le distanze.
2) Se f è una trasformazione che conserva le distanze, anche f^{-1} conserva le distanze.
3) Se f e g sono trasformazioni che conservano le distanze, anche la trasformazione $g \circ f$ conserva le distanze.

… ♦ …

Ha senso pertanto considerare nel piano la geometria associata al gruppo delle isometrie. Essa studia le proprietà invarianti per isometrie. Nell'ambito della geometria delle isometria due figure sono uguali se esiste una isometria del piano che porti una figura nell'altra.

Per definizione, le distanze tra punti sono invarianti per isometrie. Cerchiamo altre proprietà invarianti.

Le circonferenze, i segmenti, le rette, il parallelismo tra rette, la perpendicolarità tra rette, le ampiezze degli angoli sono invarianti per isometrie.

DIMOSTRAZIONE.

Il fatto che un'isometria f trasforma una circonferenza di centro C e raggio r in una circonferenza di centro $f(C)$ e raggio r deriva dal fatto che le isometrie conservano la distanza.

La dimostrazione che un'isometria f trasforma una retta in una retta segue dalla seguente proprietà:

$$d(A,C)=d(A,B)+d(B,C) \Leftrightarrow B \in AC$$

(AC è il segmento di estremi A e $\boldsymbol{C}$).

Siano infatti A e C due punti distinti e sia $B \in AC$. Si ha:

$$d(f(A),f(C)) = d(A,C) = d(A,B)+d(B,C) = d(f(A),f(B))+d(f(B),f(C))$$

e quindi il punto $f(B)$ appartiene al segmento $f(A)f(\boldsymbol{C})$.

Il fatto che rette parallele hanno per immagine attraverso una isometria rette parallele segue dal fatto che una isometria è una trasformazione del piano, quindi una corrispondenza biunivoca.

La dimostrazione che un' isometria f trasforma angoli retti in angoli retti segue dalla seguente proprietà:

$$[d(A,C)]^2 = [d(A,C)]^2 + [d(B,C)]^2 \Leftrightarrow r_{AB} \perp r_{BC}$$

(r_{AB} è la retta per A e B).

Ricordiamo che l'ampiezza di un angolo è univocamente determinata dal suo seno e dal suo coseno. Poiché il seno e il coseno di un angolo si determinano utilizzando proprietà che abbiamo già dimostrato essere invarianti per isometrie, abbiamo che l'ampiezza degli angoli è invariante per isometrie.

… ♦ …

Ecco un'altra proprietà delle isometrie.

Siano dati tre punti non allineati A, B e C. Se A', B' e C' sono punti tali che:

$$d(A',B')=d(A,B) \ , \ d(B',C')=d(B,C) \ , \ d(A',C')=d(A,C)$$

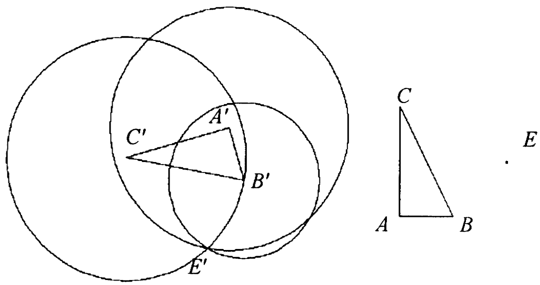
(A', B' e C' non sono quindi allineati), allora esiste ed è unica un'isometria f tale che:

$$A'=f(A), \ B'=f(B), \ C'=f(C)$$

DIMOSTRAZIONE DELL'UNICITÀ.

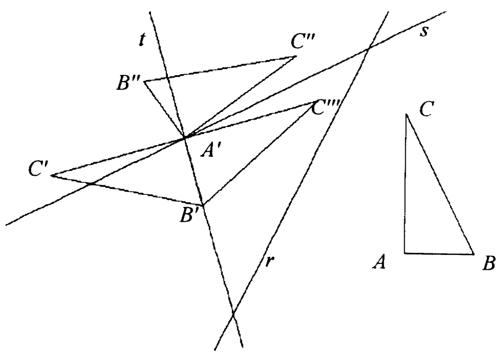
Dimostriamo che, fissate le immagini A', B' e C' dei punti A, B e C attraverso una isometria f, è automaticamente determinata l'immagine $E'=f(E)$ di un punto E qualsiasi del piano.

Si deve avere $d(E',A')=d(E,A)$ e quindi il punto E' deve appartenere alla circonferenza di centro A' e raggio uguale a $d(C,E)$.
Analogamente E' deve appartenere alla circonferenza di centro B' e raggio uguale a $d(B,E)$ e alla circonferenza di centro C' e raggio uguale a $d(C,E)$.
Ma le tre circonferenze, avendo centri non allineati, hanno un solo punto di intersezione; esso è quindi E'.



DIMOSTRAZIONE DELL'ESISTENZA.

Se $A \neq A'$, si consideri l'asse r del segmento $A A'$ e si consideri la simmetria di asse r. Si ha $s_r(A)=A'$. Sia $s_r(B)=B''$ e $s_r(C)=C''$.
Nel caso in cui $A = A'$, al posto di s_r, si consideri l'identità.
Se $B'' \neq B'$, si consideri l'asse s del segmento $B'B''$ e si consideri la simmetria s_s di asse s. Si ha $s_s(A')=A'$ e $s_s(B'')=B'$. Sia $s_s(C'')=C'''$. Nel caso in cui B''=B', al posto di s_s, si consideri l'identità.
Se $C''' \neq C'$ si consideri l'asse t del segmento $C'''C'$ e si consideri la simmetria $s_t s_t$ di asse t. Si ha $s_t(A')=A'$, $s_t(B')=B'$ e $s_t(C''')=C'$.
Nel caso in cui $C''' \neq C'$ al posto di s_t, si consideri l'identità.
L'isometria $f = s_t \circ s_s \circ s_r$,verifica le condizioni richieste.



… ♦ …

Abbiamo visto che componendo tra loro traslazioni, rotazioni e simmetrie assiali otteniamo isometrie. Abbiamo perciò altri esempi di isometrie:

$t_v \circ \boldsymbol{r}_{D,\alpha}$	(rototraslazioni)
$\boldsymbol{r}_{D,\alpha} \circ t_v$	(traslorotazioni)

e tanti altri quali, per esempio, la composizione di due rotazioni con centri di rotazione diversi, la composizione di simmetrie con centri di simmetria diversi, e così via.

Ci chiediamo se ogni isometria è composizione di traslazioni, rotazioni e simmetrie assiali.
Si ha:

Ogni isometria è composizione di al più tre simmetrie assiali.

DIMOSTRAZIONE.

Sia f una isometria.
Se f è la trasformazione identica 1, si ha $f = s_r \circ s_r$ dove r è una retta qualsiasi.
Sia $f \neq 1$. Si considerino tre punti non allineati A,B e C.
Sia $A' = f(A')$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$.
Dalla dimostrazione della proposizione precedente (esistenza) sappiamo che esiste una isometria g, data dalla composizione di al più tre simmetrie assiali, tale che

$$A' = f(A') \; , \; B' = f(B) \; , \; C' = f(C)$$

Dalla proposizione precedente (unicità) segue che si ha $f = g$.

… ♦ …

Un’isometria f si dice **diretta** (**inversa**) se, dato un triangolo ABC, l'orientazione di ABC (non) coincide con l’orientazione del triangolo $f(A)f(B)\mathrm{f}(C)$.
(Si può dimostrare che la definizione non dipende dalla scelta del triangolo).

Si verifica facilmente che le traslazioni e le rotazioni sono isometrie dirette e che le simmetrie assiali sono isometrie inverse.

Altrettanto facilmente si verifica che la composizione di due isometrie dirette o di due isometrie inverse è una isometria diretta e che la composizione di una isometria diretta e di una inversa è una isometria inversa.

Abbiamo detto che le traslazioni e le rototazioni sono isometrie dirette. Ci chiediamo se ogni isometria diretta sia una rotazione o una traslazione. La risposta è affermativa.

Se f è una isometria diretta, allora f è una rotazione o una traslazione.

DIMOSTRAZIONE.

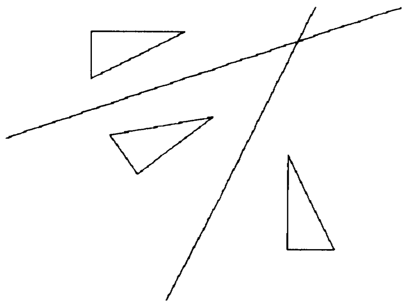
Sia f una isometria diretta. Abbiamo visto che ogni isometria è composizione di al più tre simmetrie assiali. Poiché le simmetrie assiali sono isometrie inverse, si ha:

$$f = s_s \circ s_r$$

Si hanno allora tre casi.

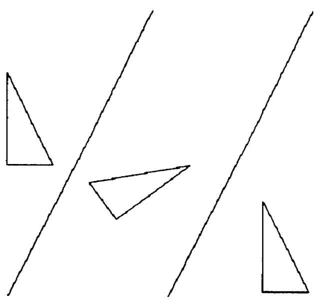
1) Le rette r e s coincidono. In tal caso f è l'identità.

2) Le rette r e s si intersecano in un punto P. In tal caso f è una rotazione intorno al punto P.



La dimostrazione di ciò viene lasciata al lettore.

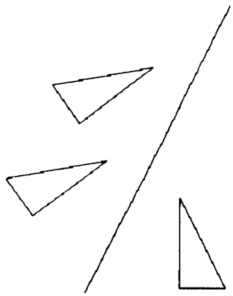
3) Le rette r e s sono parallele non coincidenti. In tal caso f è una traslazione.



La dimostrazione di ciò viene lasciata al lettore.

Abbiamo visto che le simmetrie assiali sono isometrie inverse. Ci chiediamo se ogni simmetria inversa sia una simmetria assiale.

La risposta è negativa. Consideriamo infatti la seguente isometria inversa: $f = t_v \circ s_r$ con $\boldsymbol{v}$ vettore non nullo parallelo alla retta r.



Una isometria di tal fatta viene chiamata **glissoriflessione** (o anche *antitraslazione*).

Poiché una glissoriflessione non ha alcun punto fisso, essa non può essere una simmetria assiale, la quale ha come punti fissi tutti i punti della retta di simmetria.

Ci chiediamo allora se ogni isometria inversa sia una simmetria assiale o una glissoriflessione.

La risposta è affermativa.

Se f è una isometria inversa allora f o è una simmetria assiale oppure $f = t_v \circ s_r$ *con* $\mathbf{v}$ *vettore non nullo parallelo alla retta r.*

DIMOSTRAZIONE.

Sia f una isometria inversa. Abbiamo visto che ogni isometria è composizione di al più tre simmetrie assiali. Poiché f è una isometria inversa, si ha che essa o è una simmetria assiale oppure $f = s_t \circ s_s \circ s_r$ con $s \neq r$ e $t \neq s$. Si può dimostrare (rimandiamo per ciò, per esempio, al libro di Yaglon) che in quest'ultimo caso si può determinare una retta r e un vettore $\mathbf{v}$ ad essa parallelo tali che si abbia $f = t_v \circ s_r$.

… ♦ …

Le due affermazioni precedenti possono essere riassunte nel seguente teorema.

Teorema di Chasles (1831). *Sia f una isometria. Si ha allora:*

f diretta senza punti fissi $\Leftrightarrow$ $f = t_v$ *con* $\mathbf{v}$ *vettore non nullo;*
f diretta con punti fissi $\Leftrightarrow$ $f = r_{D,\alpha}$ *con* α *angolo eventualmente nullo;*
f inversa con punti fissi $\Leftrightarrow$ $f = s_r$*;*
f inversa senza punti fissi $\Leftrightarrow$ $f = t_v \circ s_r$ *con* $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \,//\, \mathbf{r}$.

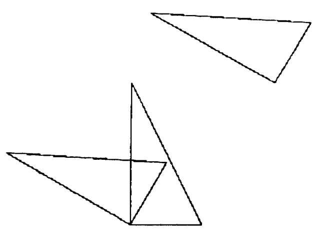
Il teorema di decomposione di una isometria in al più tre simmetrie assiali e il teorema di Chasles mostrano decomposizioni di una isometria per mezzo di traslazioni, rotazioni e simmetrie assiali. Notiamo che i centri di rotazione e gli assi di simmetria variano al variare della isometria.

È però possibile decomporre le isometrie per mezzo di traslazioni, rotazioni e simmetrie assiali con centro di ratazione e asse di simmetria invarianti al variare delle isometrie.

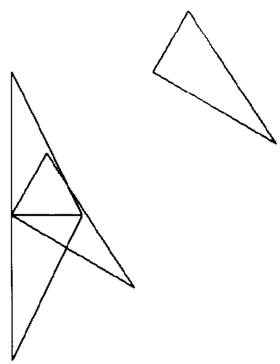
Sia fissato un punto D del piano e una retta r passante per D. Sia f una isometria. Allora:

f diretta $\Leftrightarrow$ $f = t_v \circ r_{D,\alpha}$
f inversa $\Leftrightarrow$ $f = t_v \circ r_{D,\alpha} \circ s_r$

DIMOSTRAZIONE.
Lasciata al lettore. Ci limitiamo ad illustrare la dimostrazione.



$f = t_v \circ r_{D,\alpha}$



$f = t_v \circ r_{D,\alpha} \circ s_r$

… ♦ …

Equazioni delle isometrie

Sia fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano.

Data una isometria *f*, vogliamo determinare la relazione intercorrente tra le coordinate (x, y) di un punto P e le coordinate (x', y') di $f(P)$.

1) Consideriamo innanzitutto la traslazione t_v di un vettore $v=(p,q)$.
Dato il punto $P=(x,y)$, si ha ovviamente:

$$t_v[(x,y)] = (x+p, y+q)$$

Rappresentando il punto $P=(x,y)$ con la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

possiamo rappresentare la formula precedente nel seguente modo:

$$t_v\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x+p \\ y+q \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ne segue che la traslazione t_v è rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Consideriamo ora la simmetria rispetto all'asse delle x che indichiamo con s_x. Si ha:

$$s_x[(x,y)] = (x,-y)$$

Applicando il simbolismo matriciale introdotto in precedenza, otteniamo:

$$s_x\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ne segue che la simmetria s_x è rappresentata dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Consideriamo la rotazione $r_{O,\alpha}$ di centro O=(0,0) di un angolo α in senso antiorario.

Sia P=(x,y)=(ρ cosβ , ρ sinβ) e sia $r_{O,\alpha}(P)=(x',y')$. Si ha:

$$x' = \varrho\cos(\beta+\alpha) = x\cos\alpha - \mathrm{y}\sin\beta$$
$$y' = \varrho\sin(\beta+\alpha) = x\sin\alpha + \mathrm{y}\cos\beta$$

Con il simbolismo matriciale abbiamo:

$$r_{o,\alpha}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ne segue che $r_{O,\alpha}$ è rappresentato dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) Sia ora f una isometria diretta. Abbiamo visto che si ha $f = t_v \circ r_{D,\alpha}$. Possiamo scegliere come centro di rotazione l'origine o del sistema di riferimento. Abbiamo allora:

$$f\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}\right] = (t_v \circ r_{0,\alpha})\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ne segue che l'isometria diretta $f = t_v \circ r_{D,\alpha}$ è rappresentata dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & p \\ \sin\alpha & \cos\alpha & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5) Sia f una isometria inversa. Abbiamo visto che si ha $f = t_v \circ r_{D,\alpha} \circ s_r$. Possiamo scegliere come centro l'origine o del sistema di riferimento e come asse di simmetria l'asse delle x. Abbiamo allora:

$$f\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}\right] = (t_v \circ r_{0,\alpha} \circ s_x)\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & p \\ \sin\alpha & \cos\alpha & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ne segue che l'isometria inversa $f = t_v \circ r_{O,\alpha} \circ s_x$ è rappresentata dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & p \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6) Da 4) e 5) segue che una generica isometria *f* è rappresentata da una matrice del tipo:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -d\sin\alpha & p \\ \sin\alpha & d\cos\alpha & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con d} = \pm 1$$

dove d = 1 se *f* è diretta e d = -1 se *f* è inversa.

Consideriamo il minore formato dalle prime due righe e colonne della matrice associata ad una generica isometria

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -d\ \sin\alpha \\ \sin\alpha & d\ \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ con d} = \pm 1$$

Si verifica facilmente che la matrice A è **ortogonale**; la sua inversa coincide cioè con la sua trasposta.
Viceversa ogni matrice ortogonale è del tipo A descritto sopra. Lasciamo queste verifiche al lettore.

3. SIMILITUDINI

Una **similitudine** del piano π è una trasformazione di π che conserva i rapporti tra le distanze.

Data quindi una similitudine *f* e dati due punti distinti A e B sia

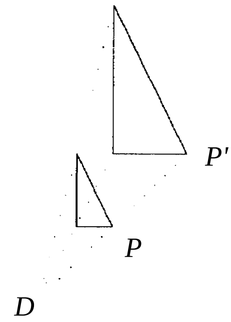
$$d(f(A),f(B)) = kd(A,B) \quad (k > 0)$$

allora, per ogni coppia di punti C e D del piano si ha:

$$d(f(C),f(D)) = kd(C,D) \quad (k > 0)$$

Il numero reale positivo k viene chiamato **rapporto** della similitudine *f*.

Ecco alcuni esempi di similitudini.
1) Le isometrie sono particolari similitudini. Il loro rapporto di similitudine è $k = 1$.
2) Dato un punto D del piano π e un numero k > 0, indichiamo con $h_{D,k}$ la trasformazione di π definita da $h_{D,k}(D)=D$ e, se $P \neq D$, allora $h_{D,k}(P)=P'$ dove il punto P' è il punto appartenente alla semiretta con origine in D passante per P tale che $d(P',D) = kd(P,D)$.



Chiamiamo questa trasformazione **omotetia** di **centro** *D* e **rapporto** *k*.

Notiamo che, se $k = 1$, l'omotetia $h_{D,k}$ è l'identità *1*.

Se invece $k \neq 1$, l'omotetia $h_{D,k}$ non è una isometria. Esistono quindi similitudini che non sono isometrie.

Anche l'insieme delle similitudini rientra nel programma di Erlangen.

L'insieme delle similitudini del piano π è un sottogruppo del gruppo delle trasformazioni.

DIMOSTRAZIONE.

1) La trasformazione identica è una similitudine di rapporto 1.

2) Se f è una similitudine di rapporto k, la funzione f^{-1} è una similitudine di rapporto k^{-1}.

3) Se f è una similitudine di rapporto k e g è una similitudine di rapporto h, la funzione $g \circ f$ è una similitudine di rapporto hk.

… ♦ …

Possiamo quindi considerare la geometria associata al gruppo delle similitudini. Essa studia le proprietà invarianti per similitudini.

Abbiamo visto che ogni isometria è una similitudine. Ne segue che il gruppo delle isometrie è un sottogruppo del gruppo delle similitudini. Le proprietà invarianti per similitudini sono quindi invarianti per isometrie.

Abbiamo anche visto che vi sono similitudini che non sono isometrie. Pertanto le proprietà invarianti per isometrie non sono necessariamente invarianti per similitudini.

Cerchiamo le proprietà invarianti per similitudini.

Le circonferenze, i segmenti, le rette, il parallelismo tra rette, la perpendicolarità tra rette, le ampiezze degli angoli sono invarianti per similitudini.

DIMOSTRAZIONE.

Dalla definizione segue che una similitudine f di rapporto k trasforma una circonferenza di centro C e raggio r in una circonferenza di centro $f(C)$ e raggio kr.

La dimostrazione che una similitudine trasforma una retta in una retta è analoga a quella vista nel caso delle isometrie. Anche le altre dimostrazioni sono analoghe a quelle viste nel caso della isometria.

… ♦ …

Per le similitudini si ha un teorema di esistenza e unicità analogo a quello visto nel caso delle isometrie.

Siano dati tre punti non allineati A, B e C. Se A', B' e C' sono punti tali che:

$$d(A',B')=kd(A,B)\ ,\ d(B',C')=kd(B,C)\ ,\ d(A',C')=kd(A,B)$$

(A', B' e C' non sono quindi allineati), allora esiste ed è unica una similitudine f tale che:

$$A'=f(A)\ ,\ B'=f(A)\ ,\ A'=f(A)$$

Questa similitudine f ha ovviamente il rapporto di similitudine uguale a k.

DIMOSTRAZIONE DELL'UNICITÀ.

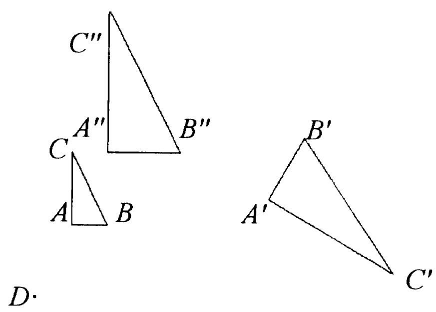
Analoga alla dimostrazione dell'unicità nel caso delle isometrie.

DIMOSTRAZIONE DELL'ESISTENZA.

Si fissi un punto D e si consideri l'omotetia $h_{D,k}$.

Sia $A''=h_{D,k}(A)$, $B''=h_{D,k}(B)$, $C''=h_{D,k}(C)$.

Poiché si ha $d(A'',B'')=d(A',B')$, $d(B'',C'')=d(B',C')$, $d(A'',C'')=d(A',C')$, esiste un'isometria g tale che $g(A'')=A'$, $g(B'')=B'$, $g(C'')=C'$.



La similitudine $f = g \circ h_{D,k}$ verifica le condizioni richieste.

… ♦ …

Dalla dimostrazione della proposizione precedente segue immediatamente la seguente proposizione.

Sia f una similitudine di rapporto k. Fissato un punto D, esiste allora una isometria g tale che

$$f = g \circ h_{D,k}$$

… ♦ …

Una similitudine f si dice **diretta** (**inversa**) se, dato un triangolo ABC, l'orientazione di ABC (non) coincide con l'orientazione del triangolo $f(A)\, f(B)\, f(C)$.
(Anche in questo caso si può dimostrare che la definizione non dipende dalla scelta del triangolo).

Si verifica facilmente che le omotetie sono similitudini dirette. Ne segue la seguente affermazione.

Sia f una similitudine di rapporto k.
Sia una isometria tale che $f = g \circ h_{D,k}$.
Si ha allora: f similitudine diretta $\Leftrightarrow$ g isometria diretta.

… ♦ …

Dato un punto D del piano π e un numero $k > 0$, indichiamo con $h_{D,-k}$ la trasformazione di π definita da $h_{D,-k}(D)=D$ e, se $P \neq D$, allora $h_{D,-k}(P)=P'$ dove il punto P' è il punto appartenente alla retta passante per D e P ma non appartenente alla semiretta con origine in D passante per P tale che $d(P',D)=kd(P,D)$. Si verifica facilmente che si ha $h_{D,-k} = r_{D,\pi} \circ h_{D,k}$
Ne segue che $h_{D,-k}$ è una similitudine diretta di rapporto k. Nonostante ciò in alcuni testi essa viene chiamata omotetia inversa.

Siano D e D' due punti distinti e sia $k>0$. Consideriamo le omotetie $h_{D,k}$ e $h_{D',k}$. Sappiamo che esiste una isometria g tale che $h_{D',k}=g\circ h_{D,k}$. Lasciamo la determinazione di g al lettore.

Equazioni delle similitudini.

Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano con origine in un punto O. Data una similitudine f, vogliamo determinare la relazione intercorrente tra le

coordinate di un punto P e le coordinate di $f(P)$.
1) Consideriamo innanzitutto il caso di una omotetia $h_{O,k}$ con centro nell'origine O del sistema di riferimento. Si ha ovviamente:

$$P=(x,y) \quad \Rightarrow \quad h_{\mathrm{O,P}}(P)=(kx,ky)$$

Utilizzando il simbolismo matriciale introdotto in precedenza, otteniamo:

$$h_{O,k}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pertanto la matrice associata a $h_{O,k}$ è:

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Sia f una similitudine di rapporto k. Sappiamo che, fissato comunque un punto D, esiste una isometria g tale che $f = g \circ h_{D,k}$. Scegliamo il punto D coincidente con l'origine O del sistema di riferimento.
Abbiamo allora $f = g \circ h_{O,k}$. Sia

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -d\sin\alpha & a \\ \sin\alpha & d\cos\alpha & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice che rappresenta l'isometria g.
Abbiamo pertanto

$$f\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}\right]=(g \circ h_{0,k})\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} \cos\alpha & d\sin\alpha & a \\ \sin\alpha & -d\cos\alpha & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ne segue che la similitudine $f = g \circ h_{O,k}$. è rappresentata dalla matrice:

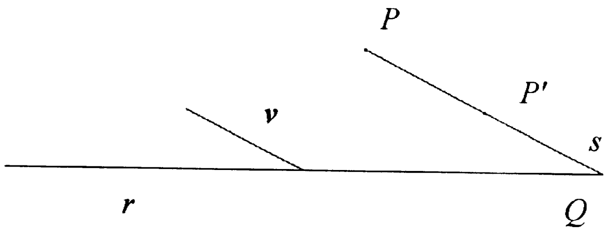
$$\begin{pmatrix} k\cos\alpha & kd\sin\alpha & a \\ k\sin\alpha & -kd\cos\alpha & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che si ha d =1 se la similitudine è diretta e d = -1 se la similitudine è inversa.

4. AFFINITÀ

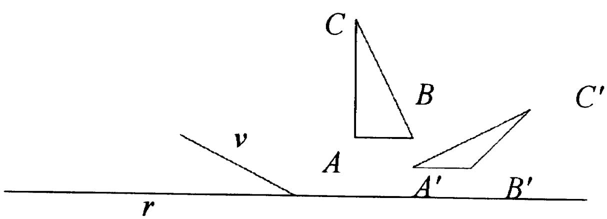
Una **affinità** del piano π è una trasformazione geometrica del piano che conserva le rette.

Ecco alcuni esempi di affinità.
1) Sappiamo che le similitudini conservano le rette. Pertanto le similitudini (e quindi, in particolare, le isometrie) sono affinità.
2) Sia data una retta *r*, un vettore *v* non parallelo alla retta r e k > 0. Chiamiamo **omologia** di **asse** *r*, **direzione** *v* e **rapporto** *k* la trasformazione $O_{R,V,K}$ del piano definita da $O_{R,V,K}(P) = P$ se P è un punto di *r*; altrimenti $O_{R,V,K}(P) = P'$ dove il punto *P*' è il punto ottenuto nel seguente modo: si considera la retta s passante per *P* parallela a ***v*** e il punto *Q* di intersezione delle rette *r* e *s* , il punto *P*' è il punto appartenente alla semiretta con origine in *Q* passante per *P* tale che $d(P',Q)=kd(P,Q)$.



Si verifica facilmente che un'omologia è una affinità. Basta infatti utilizzare semplici proprietà geometriche (proprietà dei parallelogrammi e teorema di Talete) per dimostrare ciò.

Un'omologia non conserva sempre l'ortogonalità. Pertanto un'omologia non è in generale una similitudine.



Anche le affinità rientrano nel programma di Erlangen.

L'insieme delle affinità del piano π è un sottogruppo del gruppo delle trasformazioni del piano.

DIMOSTRAZIONE.
Lasciata al lettore

… ♦ …

Possiamo quindi considerare la geometria associata al gruppo delle affinità. Essa viene di solito chiamata **geometria affine**. La geometria affine studia pertanto le proprietà invarianti per affinità.

Abbiamo visto che ogni similitudine è una affinità. Ne segue che che il gruppo delle similitudini è un sottogruppo del gruppo delle affinità. Le proprietà invarianti per affinità sono invarianti per similitudini. Abbiamo anche visto che vi sono affinità che non sono similitudini. Pertanto le proprietà invarianti per similitudini non sono necessariamente invarianti per affinità.

Cerchiamo le proprietà invarianti per affinità.

Le affinità conservano il parallelismo tra rette, i parallelogrammi e i rapporti tra le distanze di punti allineati.
Data cioè un'affinità f e P, Q, R punti allineati distinti, sia h tale che

$$d(P,Q)=hd(P,R)$$

allora i punti $f(P)$, $f(Q)$, $f(R)$ *(che sono allineati) verificano la condizione*

$$d(f(P),f(Q))=hd(f(P),f(R))$$

DIMOSTRAZIONE.
La dimostrazione che le affinità conservano il parallelismo tra rette segue dal fatto che f è una corrispondenza biunivoca.
La dimostrazione che le affinità conservano i rapporti tra le distanze tra punti allineati viene omessa.

… ♦ …

La dimostrazione che le affinità conservano i rapporti tra le distanze tra punti allineati non è facile. Non è però molto difficile dimostrarne il seguente caso particolare:
dati due punti distinti *A* e *B*, l'immagine del punto medio di *A* e *B* è il punto medio di *f*(*A*) e *f*(*B*). Lasciamo la dimostrazione al lettore.

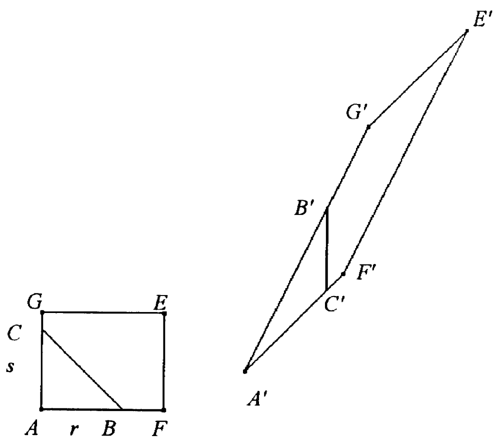
Anche nel caso delle affinità abbiamo un teorema di esistenza ed unicità analogo a quelli visti per le isometrie e per le similitudini.

Data una terna A, B, C di punti non allineati e una seconda terna A', B', C' di punti non allineati, esiste ed è unica una affinità f tale che:

$$A' = f(A)\ ,B' = f(B)\ ,\ C' = f(C)$$

DIMOSTRAZIONE DELL'UNICITÀ.

Dimostriamo che, fissate le immagini A',B' e C' attraverso un'affinità f dei punti A, B e C, è univocamente determinata l'immagine di un punto E qualsiasi. Si considerino le rette r e s passanti rispettivamente per A e B e per A e C. Si consideri il parallelogramma $AFEG$ con lati paralleli alle rette r e s. Poiché le affinità conservano i rapporti tra le distanze di punti allineati, abbiamo che le immagini dei punti F e G sono determinate. Poiché le affinità conservano i parallelogrammi, l'immagine del punto E, quarto punto del parallelogramma, è determinata.

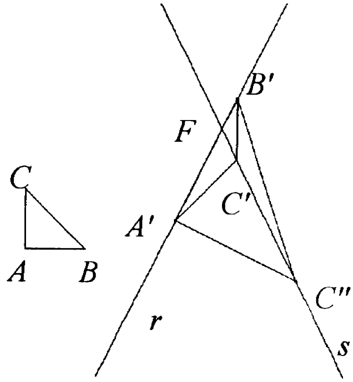


DIMOSTRAZIONE DELL'ESISTENZA.

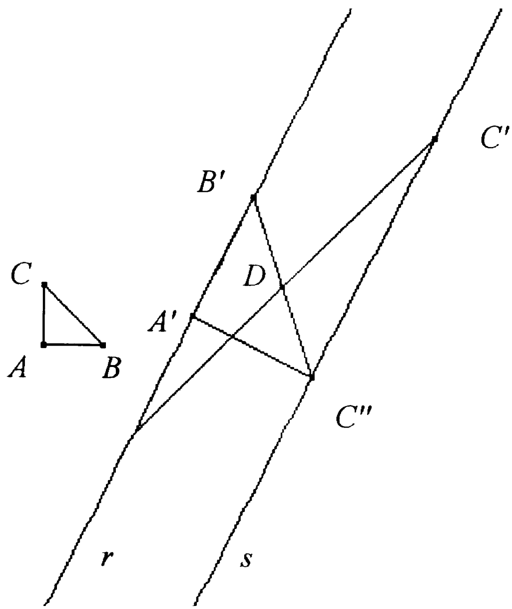
Sia r la retta passante per i punti A' e B'. Sia g la similitudine tale che $g(A)=A'$, $g(B)=B'$ e tale che il punto $C''=g(C)$ appartenga al semipiano delimitato da r cui appartiene C' . Se $C''=C'$, allora g è l'affinità cercata. Altrimenti sia s la retta passante per C'' e C'. Distinguiamo due casi.

1) Le rette r e s non sono parallele. Sia F il loro punto di intersezione.
Si ponga $k=d(C'',F)\ /\ d(C',F)$. Sia v un vettore parallelo alla retta s.
Si consideri l'omologia $h=O_{r,v,k}$. Si ha $h(A')=A'$, $h(B')=B'$, $h(C'')=C'$.

L'affinità $f = h \circ g$ verifica perciò le condizioni richieste.



2) Le rette r e s sono parallele. Sia v un vettore parallelo alla retta passante per C'' e B'.
Si consideri l'omologia $h=O_{r,v,1/2}$. Si ha $h(A')=A'$, $h(B')=B'$, $h(C'')=D$.
Sia w un vettore parallelo alla retta passante per D e C'.
Si consideri l'omologia $h'=O_{r,w,2}$. Si ha $h'(A')=A'$, $h'(B')=B'$, $h'(D)=C'$.
L'affinità $f = h' \circ h \circ g$ verifica le condizioni richieste.

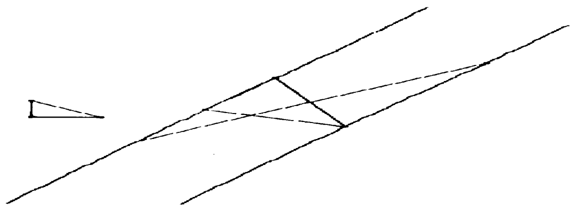


… ♦ …

Dalla dimostrazione del teorema precedente segue immediatamente la seguente proposizione.

Ogni affinità è la composizione di una similitudine e di al più due omologie.

Il disegno precedente, come tutti quelli di questo articolo, è stato creato utilizzando DERIVE. I simboli sono state aggiunti con DRAW. Una volta importata in WORD il disegno, possiamo allungare (o accorciare) il disegno sia in orizzontale che in verticale. Proviamo, per esempio, ad allungarlo in orizzontale e ad accorciarlo in verticale. Otteniamo il seguente disegno.



È chiaro che siamo passati da un disegno all'altro per mezzo di una trasformazione del piano. Essa è data dalla composizione di un'omologia di asse una retta orizzontale, direzione una retta verticale e rapporto maggiore di 1 (l'allungamento) e di un'omologia di asse una retta verticale, direzione una retta orizzontale e rapporto minore di 1 (l'accorciamento).

Abbiamo quindi la composizione di particolari omologie. In ambedue l'asse è ortogonale alla direzione.

Chiamiamo **omologia ortogonale** di asse r e rapporto k l'omologia $o_{r,v,k}$ di asse r, direzione un vettore $\mathbf{v}$ ortogonale alla retta r e rapporto k. Indichiamo questa omologia ortogonale con il simbolo $o_{r,k}$.

Gli esempi di affinità che vengono più frequentemente presentati nei libri di testo sono proprio le composizioni di due omologie ortogonali con assi ortogonali. La prossima proposizione mostra che, a meno di isometrie, si ottengono in questo modo tutte le affinità.

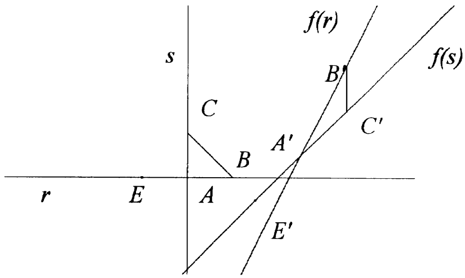
Ogni affinità è composizione di due omologie ortogonali
con assi ortogonali con una isometria.

DIMOSTRAZIONE.

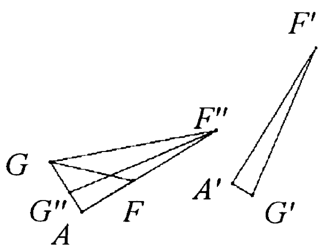
Sia f un'affinità.

Siano r e s due rette ortogonali intersecantisi in un punto A.

Siano B e C punti delle rette r e s aventi distanza unitaria dal punto A.
Siano $A'=f(A)$, $B'=f(B)$, $C'=f(C)$. Se le rette $f\,(r)$ e f (s) non sono ortogonali, sicuramente l'affinità f non è composizione di due omologie ortogonali di assi le rette r e s. Infatti sia l'isometria che le due omologie conservano l'ortogonalità delle rette r e s.

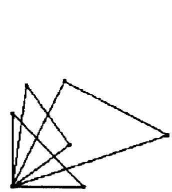


Esistono però due rette ortogonali r' e s' intersecantisi in A tali che $f(r')$ e $f(s')$ sono ortogonali. Daremo in seguito una dimostrazione analitica di ciò. Per ora ci limitiamo a far notare che, se l'angolo retto CAB ha come immagine l'angolo acuto (rispettivamente ottuso) $C'A'B'$, allora l'angolo CAE (vedere figura) ha come immagine un angolo ottuso (rispettivamente acuto). Per continuità esistono quindi due rette ortogonali r' e s' intersecantisi in A tali che $f(r')$ e $f(s')$ sono ortogonali. Fissiamo allora due punti F su r' e G su s' aventi distanza unitaria da A. Siano ora $F'=f(F)$, $G'=f(G)$. Si consideri sulla semiretta con origine in A passante per F il punto F'' tale che $d(F'',A)=d(F',A')$. Sia $o_{s',k}$ tale che $o_{s',k}\,(F)=F''$.
Si consideri sulla semiretta con origine in A passante per G il punto G'' tale che $d(G',A)=d(G',A')$. Sia $o_{r',h}$ tale che $o_{r',h}(G)=G''$ Poiché si ha $d(A,F'')=d(A',F')$ $d(A,G'')=d(A',G')$, $d(F'',G'')=d(F',G')$ esiste una isometria g tale che $g(A)=A'$, $g(F'')=F'$, $g(G'')=G'$.
Ma allora $g \circ o_{r',h} \circ o_{s',k}\,(A)=A'$, $g \circ o_{r',h} \circ o_{s',k}\,(F)=F'$, $g \circ o_{r1,h} \circ o_{s',k}\,(G)=G'$. Da tutto ciò segue $g \circ o_{r',h} \circ o_{s',k} = f$.



… ♦ …

Nella prossima figura mostriamo le successive immagini attraverso le tre trasformazioni considerate del triangolo *ABC* considerato all'inizio della dimostrazione.



Facciamo notare che esistono affinità non aventi punti fissi. La prossima proposizione ci mostra che però ogni affinità è la composizione di una traslazione con una affinità avente almeno un punto fisso.

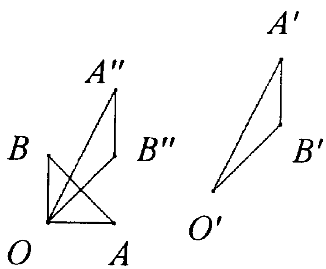
Sia fissato un punto O del piano. Sia f un'affinità.
Esistono allora una affinità g di π *tale che g(O)=0 e un vettore* **v** *tali che si abbia:*

$$f = t_v \circ g$$

DIMOSTRAZIONE.

Si considerino i punti *A* e *B* non allineati con *O*. I punti $O'=f(O)$, $A'=f(A)$, $B'=f(B)$ non sono quindi allineati. Sia $\mathbf{v}=\overrightarrow{OO'}$ e sia $A''= t_{-v}(A')$, $B''= t_{-v}(B')$.
I punti *O* , *A''* e *B''* non sono allineati. Esiste quindi un'affinità *g* tale che:

$$g(O) = O \ , \ g(A) = A'' \ , \ g(B)=B''$$



Si ha chiaramente $f = t_v \circ g$.

… ♦ …

Equazioni delle affinità

Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano con origine in O. Siano A e B i punti unità sui due assi del sistema di riferimento; cioè $A = (1,0)$ e $B = (0,1)$. Data una affinità f, vogliamo determinare la relazione intercorrente tra le coordinate di un punto P e le coordinate di $f(P)$.
Indichiamo con $V_2(O)$ l'insieme dei vettori $\mathbf{v} = \vec{OP}$ applicati in O. Introducendo le usuali operazioni di addizione tra vettori e di moltiplicazione di un vettore per un numero reale, otteniamo una struttura di spazio vettoriale su $V_2(O)$.
Ad ogni punto P del piano π è quindi associato il vettore v = $\vec{OP}$ dello spazio vettoriale $V_2(O)$ e viceversa.
Ogni trasformazione f del piano π definisce una trasformazione, che continuiamo ad indicare con f, dello spazio vettoriale $V_2(O)$ data da:

$$f\left(\vec{OP}\right) = \vec{OP'}$$

con $P' = f(P)$.

Sia P un punto di coordinate (x,y) relative al sistema di riferimento fissato.
Si ha

$$\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB}$$

Analogamente se P' ha coordinate (x',y') , si ha

$$\vec{OP'} = x'\vec{OA} + y'\vec{OB}$$

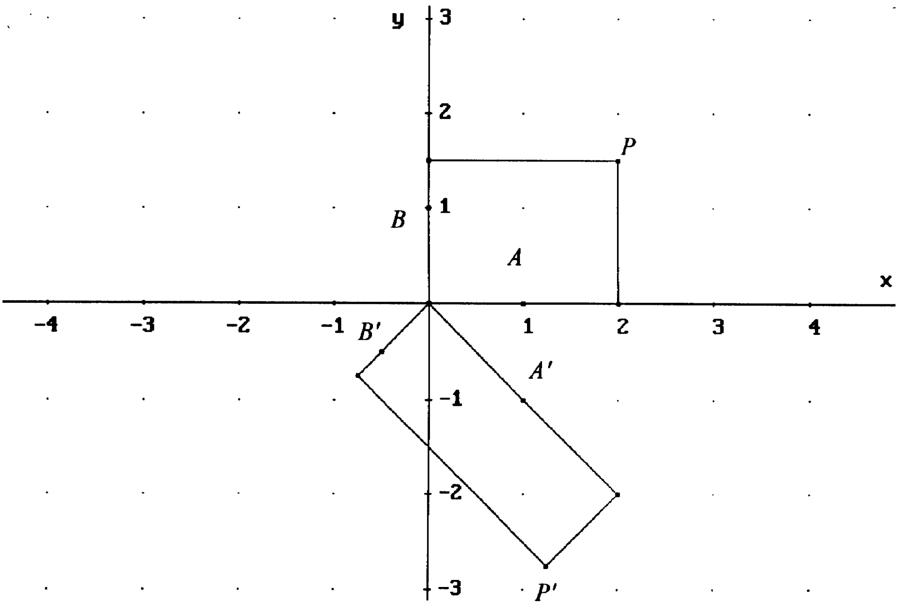
Vogliamo determinare la relazione intercorrente tra (x,y) e (x',y').

1) Studiamo innanzitutto il caso in cui si abbia una affinità g tale che $g(O)=O$.

Sia $\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB}$. Calcoliamo $g\left(\vec{OP}\right)$.

Sappiamo che l'affinità g conserva i parallelogrammi e i rapporti tra le distanze di punti allineati. Ne segue che si ha

$$g\left(\vec{OP}\right) = xg(\vec{OA}) + yg\left(\vec{OB}\right)$$



Sia:

$$g\left(\vec{OA}\right) = \vec{OA'} = a\vec{OA} + c\vec{OB}$$

$$g\left(\vec{OB}\right) = \vec{OB'} = b\vec{OA} + d\vec{OB}$$

Ma allora abbiamo:

$$g\left(\vec{OP}\right) = g(x\vec{OA} + y\vec{OB}) = x\vec{OA'} + yOB' = (ax + by)\vec{OA} + (cx + dy)\vec{OB}$$

Utilizzando il simbolismo matriciale, otteniamo:

$$g\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Notiamo che la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ha determinante non nullo perché i punti O, A', B' non sono allineati.
La formula precedente può anche essere espressa nel seguente modo:

$$g\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Utilizzando il linguaggio dell'algebra lineare, notiamo che i vettori $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$ formano una base di $V_2(O)$ e che questa particolare affinità g definisce un isomorfismo dello spazio vettoriale $V_2(O)$ su sé stesso. La matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è la matrice associata all'isomorfismo g relativamente alla base formata dai vettori $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$.

2) Consideriamo ora il caso di una qualsiasi affinità f.
Abbiamo visto che si ha $f = t_v \circ g$ con g affinità tale che $g(O) = O$ e $\mathbf{v} = \vec{OO'}$ dove $O' = f(O) = (p,q)$. Sia

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice che rappresenta l'affinità g. Si ha pertanto:

$$f\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}\right] = (t_v \circ g)\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'affinità f è perciò rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota.
Nel dimostrare che ogni affinità è composizione di due omologie ortogonali con assi ortogonali e di una isometria abbiamo utilizzato il fatto che, fissato il punto O, esistono due rette ortogonali incidenti in O che hanno come immagini rette ortogonali.

Utilizziamo le equazioni delle affinità per dare una dimostrazione analitica di ciò.
Sia data un'affinità f rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

relativamente ad un sistema di riferimento cartesiano con origine in O.
Siano r e s rette ortogonali passanti per O di parametri direttori rispettivamente $(m,1)$ e $(-1,m)$. Le rette $f(r)$ e $f(s)$ hanno parametri direttori rispettivamente $(am+b,cm+d)$ e $(a-bm,c-dm)$. Esse sono ortogonali se e solo se si ha

$$(am+b)(a-bm)+(cm+d)(c-dm) = (-ab-cd)m^2+(a^2-b^2+c^2-d^2)m+(ab+cd) = 0$$

Abbiamo un'equazione di secondo grado in m il cui discriminante è

$$\Delta = (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 + 4(ab + cd)^2$$

Se $ab+cd=0$ allora l'equazione ha come soluzione $m = 0$ e quindi le rette r e s cercate sono gli assi coordinati.
Se $ab+cd \neq 0$ allora si ha $\Delta>0$ e quindi esistono le rette r e s.

5. Alcune geometrie del piano

Abbiamo visto nel primo paragrafo che, per ogni sottogruppo G del gruppo $(T(\pi),\circ)$ delle trasformazioni del piano, possiamo considerare la geometria ad esso associata. Essa studia le proprietà invarianti per trasformazioni appartenenti a G.
Le figure del piano vengono suddivise in classi di equivalenza. Due figure appartengono ad una stessa classe di equivalenza se e solo se esse sono uguali, cioè se e solo se esiste una trasformazione appartenente a G che porti una nell'altra.

Riprendiamo in esame le dieci figure introdotte all'inizio del primo paragrafo e suddividiamole in classi di equivalenza a seconda del sottogruppo G del gruppo $T(\pi)$.

Il più semplice sottogruppo di $T(\pi)$ è dato da $G=\{1\}$. Esso è quindi formato dalla sola trasformazione identica 1. Nella geometria associata a questo sottogruppo ogni figura del piano è uguale solamente a se stessa.

Le dieci figure introdotto all'inizio sono pertanto suddivise in dieci classi di equivalenza:

$$\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\},\{7\},\{8\},\{9\},\{10\}$$

Coloro che hanno sostenuto che le figure 1 e 2 non sono uguali perché non sono formate dagli stessi punti hanno implicitamente considerato la geometria associata al sottogruppo formato dalla sola trasformazione identica.

Consideriamo ora il sottogruppo dato da tutte le traslazioni del piano e consideriamo la geometria ad esso associata. In questa geometria le dieci figure introdotte all'inizio vengono suddivise nelle seguenti classi di equivalenza:

$$\{1,2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\},\{7\},\{8\},\{9\},\{10\}$$

Consideriamo la geometria associata al sottogruppo delle isometrie dirette. In questa geometria le dieci figure vengono suddivise nelle seguenti classi di equivalenza:

$$\{1,2,3\},\{4\},\{5\},\{6\},\{7\},\{8\},\{9\},\{10\}$$

Notiamo che l'insieme delle isometrie inverse non è un sottogruppo. Infatti la composizione di due isometrie inverse non è una isometria inversa.

Nella geometria associata al sottogruppo delle isometrie abbiamo la seguente suddivisione in classi di equivalenza:

$$\{1,2,3,4\},\{5\},\{6\},\{7\},\{8\},\{9\},\{10\}$$

Nella geometria associata al sottogruppo delle similitudini abbiamo la seguente suddivisione:

$$\{1,2,3,4,5\},\{6\},\{7\},\{8\},\{9\},\{10\}$$

Nella geometria associata al sottogruppo delle affinità abbiamo:

$$\{1,2,3,4,5,6,7\},\{8\},\{9\},\{10\}$$

Notiamo che la figura 1 non è uguale alla figura 8 perché non esiste una affinità che porti una nell'altra.

Esiste però una trasformazione continua che porti una nell'altra. Consideriamo allora l'insieme delle trasformazioni continue del piano. Non abbiamo un sottogruppo. L'inversa di una trasformazione continua non è infatti necessariamente una trasformazione continua.

Consideriamo perciò le trasformazioni continue del piano tali che le loro inverse sono continue. Sono gli **omeomorfismi** del piano. L'insieme degli omeomorfismi del piano è un sottogruppo.

Nella geometria associata al sottogruppo degli omeomorfismi abbiamo la seguente suddivisione delle 10 figure in classi di equivalenza:

$$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\{10\}$$

Se ora consideriamo la geometria associata a tutto in gruppo delle trasformazioni del piano, tutte le dieci figure appartengono ad una stessa classe di equivalenza:

$$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

Notiamo che, partendo dal sottogruppo formato dalla sola trasformazione identica, abbiamo pian piano ampliato il sottogruppo fino ad arrivare al gruppo di tutte le trasformazioni del piano.

All'ampliarsi del sottogruppo G delle trasformazioni, diminuiscono le proprietà invarianti per trasformazioni appartenenti a G e quindi si ampliano le classi di equivalenza delle figure.

La commissione Brocca, nel proporre i programmi per il triennio delle Scuole Secondarie Superiori propone un percorso didattico analogo. Nel commento al tema della geometria viene infatti detto:

"*... Questo procedimento, che si inquadra nella concezione di Klein della geometria, tenderà a far vedere all'alunno il progressivo ampliamento dei realtivi gruppi di trasformazione e come le proprietà che caratterizzano le diverse figure si restringono che si passa dalla geometria della congruenza [della isometria, con il nostro linguaggio] a quella affine*."

6. LE GEOMETRIE NON EUCLIDEE

La commissione Brocca propone anche di introdurre le geometrie non euclidee nell'ultimo anno delle Scuole Secondarie Superiori.

Ci rimane il tempo solo per accennare velocemente al fatto che anche le geometrie non euclidee rientrano nel programma di Erlangen.

Per far ciò dobbiamo introdurre il **piano ampliato**. Esso è ottenuto aggiungendo ai punti del piano i suoi punti impropri. Chiamiamo retta impropria l'insieme dei punti impropri. In definitiva il piano ampliato ha come "punti" gli usuali punti del piano (che chiamiamo punti propri) e i punti impropri. Le "rette" del piano ampliato sono le usuali rette del piano (che chiamiamo rette proprie) e la retta impropria.

Possiamo considerare il gruppo delle trasformazioni del piano ampliato.

Chiamiamo **collineazione** una trasformazione biunivoca del piano ampliato che conservi le rette. Notiamo che l'immagine attraverso una collineazione di un punto proprio può anche essere un punto improprio. Si verifica facilmente che l'insieme delle collineazioni è un sottogruppo del gruppo delle trasformazioni del piano ampliato.

Ebbene le affinità del piano possono essere viste come collineazioni del piano ampliato che conservano la retta impropria.

Consideriamo ora nel piano una conica, per esempio una circonferenza. La geometria iperbolica può essere vista come la geometria associata al sottogruppo delle collineazioni del piano ampliato che conservano la circonferenza.

Le geometrie ellittiche possono essere descritte in modo analogo.

Nota. È qui riportato il contenuto delle lezioni svolte a Viareggio. Le lezioni erano accompagnate da esercitazioni durante le quali è stata analizzata la ricaduta didattica degli argomenti trattati. Si è, in particolare, discusso sulle opinioni espresse da Villani nel suo articolo su ‘L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate’ del 1995.

Bibliografia

L. BENAGLIA *Cabri-géomètre e le trasformazioni geometriche*, quaderno n.4 di CABRIRRSAE, Irrsae Emilia Romagna - Sezione Scuola Media, 1994

P. BOIERI *Le trasformazioni geometriche al calcolatore*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate (1995) pp. 629-647

L. CAMPEDELLI *Cultura matematica e insegnamento elementare*, Feltrinelli, 1978

U. CASSINA *Trasformazioni geometriche elementari*, in Enciclopedia delle matematiche elementari, vol. II, parte 1, pp 369 - 481, Hoepli, 1937

H.S.M. COXETER *Introduction to Geometry*, John Wiley & Sons, 1961

H.S.M. COXETER, S.L. GREITZER *Geometry Revisited*, Mathematical Association of America, 1967

E. CRESPINA, M. MENGHINI, L. PERCARIO *Geometria "tradizionale" e geometria "delle trasformazioni"*, Notiziario UMI, Suppl. al n. 8-9 (1995) pp. 204-212

M. DEDO' *Trasformazioni geometriche*, Decibel-Zanichelli, 1996.

F. KLEIN *Vergleichende Batrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Erlangen, 1872, pubb. in seguito con aggiunte in Math. Ann., XLIII (1893), 63-100 (trad. it. (di G. Fano) *Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti*, Ann. mat. pura e applicata, serie II, XVII (1890))

M. MARCHI *I gruppi delle trasformazioni geometriche*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate (1995) pp. 605-628

G. OLIVIERI *Lavorando con gli specchi. Introduzione alla geometria delle trasformazioni*, La Nuova Italia, 1984

M. PERGOLA, C. ZANOLI *Trasformazioni geometriche e macchine matematiche*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate (1995) pp. 689-714

B. SCIMEMI *Studio delle similitudini piane con il calcolatore*, Notiziario UMI, Suppl. al n. 8-9 (1995) pp. 45-58

I. STEWART, M. GOLUBITSKY *Terribili simmetrie. Dio è un geometra?* Bollati Boringhieri, 1992

A. STROLIN FRANZINI *Le trasformazioni geometriche con il computer*, La Scuola, 1991

V. VILLANI *Similitudine e figure simili*, L'educazione matematica, anno XI (1990) pp. 55-64

V. VILLANI *Didattica della geometria delle trasformazioni*, IRRSAE Marche, 1992 (Pacchetto multimediale)

V. VILLANI *Le trasformazioni geometriche nella Scuola Secondaria Superiore*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate (1995) pp. 669-688

V. VILLANI *Il ruolo delle trasformazioni nell'insegnamento della geometria*, Notiziario UMI, Suppl. al n. 8-9 (1995) pp. 29-44

V. VITA *La geometria delle trasformazioni nell'insegnamento secondario superiore*, Archimede (1993), pp 76-83

H. WEYL *La simmetria*, Feltrinelli, 1975 (ed. orig. *Symmetry*, Princeton University Press, 1952)

I.M. YAGLON *Le isometrie*, Zanichelli, 1972 (ed. orig. in russo del 1955, tradotta poi in inglese *Geometric Transformations* I, Random House, 1968)

LA GEOMETRIA DELLO SPAZIO

Mario Marchi
Dipartimento di Matematica, Università Cattolica del Sacro Cuore, Brescia

I - La geometria tra intuizione e formalizzazione

1. LA NASCITA DELLA GEOMETRIA: ANALISI DELLE ESPERIENZE SENSORIALI

La geometria è razionalizzazione di quelle nostre esperienze sensoriali che indichiamo genericamente come *esperienza spaziale* e anche *esperienza* di *movimento*.

Si potrebbero addirittura individuare due particolari ambiti sensoriali dai quali la nostra fantasia trae le immagini sulle quali la nostra mente costruirà poi i concetti della geometria. Tali ambiti sono quello delle sensazioni visive e quello delle sensazioni tattili. All'area delle sensazioni visive appartengono quelle esperienze sensoriali che nascono dalla osservazione di particolari oggetti come per esempio fili tesi, aste rettilinee, porzioni di superfici piane, etc. A quest'area appartengono anche le sensazioni che ci portano ad intuire la nozione di similitudine tra figure come per esempio la riproduzione di disegni "in scala".

All'area delle sensazioni tattili appartengono le esperienze sensoriali che derivano dalla manipolazione e dallo spostamento di oggetti, che noi giudichiamo duri o molli, pieghevoli o indeformabili. Nel complesso delle sensazioni tattili includiamo anche l'esperienza delle forze che l'ambiente esterno esercita su di noi, come ad esempio le forze derivanti dal campo gravitazionale, che forniscono il riferimento spaziale per ogni soggetto.

Da queste osservazioni elementari, spesso mescolate tra loro, ancora indistinte e confuse, nasce la *geometria*, considerata come un *atteggiamento attivo e razionale* mirante a *descrivere in modo preciso e coerente* gli oggetti e l'ambiente che li contiene e che ci circonda, nonché a spiegare certe relazioni degli oggetti tra loro e con il soggetto.

Questa operazione di rilevamento e raffinamento delle esperienze sensoriali, da una parte "presuppone" e dall'altra "è occasione educativa per" un atteggiamento di capacità di attenzione critica, di confronto e di sintesi, riguardante le informazioni che la nostra mente è in grado di raccogliere e catalogare.

Su questo riferimento di fondo della geometria alle proprie radici situate nella esperienza sensoriale si fonda l'espediente didattico ed euristico della "verifica sperimentale" e della manipolazione di appropriati modelli, espediente che porta infine alle giustificazioni di “plausibilità” (su queste più avanti torneremo).

L’ambito a cui ci siamo in precedenza riferiti è quello che caratterizza il primo momento in cui il soggetto osservatore si pone di fronte all’ambiente e agli oggetti che lo circondano. Tale momento è tipicamente soggettivo per cui ambiente e oggetti vengono considerati in relazione al singolo osservatore, qui ed ora.

Per giungere ad una descrizione razionale occorre che il soggetto sia in grado di passare da una osservazione soggettiva ad una che potremmo chiamare “intersoggettiva”; occorre cioè che l’osservatore si sforzi di mettersi dal punto di vista di altri osservatori, cioè immagini di guardare e manipolare gli oggetti in modi tra loro diversi. Ci si avvia in questa maniera ad una descrizione tale che un oggetto o un ambiente possa essere riconosciuto da molti osservatori.

L’ideale che ci si pone è giungere ad una descrizione degli oggetti o dell’ambiente tale da renderli riconoscibili per ogni osservatore: ciò si può ottenere qualora si giunga a formulare una definizione o una descrizione logica e razionale dell’oggetto in questione.

A questo proposito, prima di continuare l’analisi che stiamo conducendo, è opportuno osservare che una descrizione soggettiva di un ambiente o di un oggetto non è per se stessa invalida oppure errata: essa è solo limitata, e la sua validità è legata alla precisa individuazione del soggetto che descrive.

Al contrario una descrizione soggettiva diventa incompleta (e quindi può diventare invalida) quando venga fatta senza menzione del soggetto oppure con la pretesa di essere intersoggettiva. Per esempio descrizioni che fanno riferimento alla nostra situazione di osservatori singoli come “alto”, “basso”, “sopra”, “sotto”, sono valide se ci rivolgiamo ad altri soggetti che presumibilmente si trovano nelle nostre condizioni o che conoscono il nostro punto di vista. Tali descrizioni non sono invece più accettabili se pretendono di essere valide per ogni altro osservatore e di caratterizzare in modo intrinseco l’oggetto in esame.

2. LE IMMAGINI GEOMETRICHE TRA ESPERIENZA ED ELABORAZIONE FANTASTICA

L’analisi che abbiamo condotto fino ad ora circa il rilevamento delle esperienze sensoriali e la loro elaborazione, al fine di giungere ad una descrizione razionale oggettiva e comunicabile, ci porta a considerare il complesso di operazioni mentali a cui i dati sensoriali presenti nella nostra mente vengono sottoposti. Si tratta, in sintesi, di due diversi complessi di operazioni che indicheremo con il nome di *astrazione* e *generalizzazione*.

Dal punto di vista della geometria, gli oggetti dell'ambiente non sono mai considerati in tutta la complessità e la ricchezza delle loro proprietà. Si prescinde infatti da molte proprietà fisiche con cui gli oggetti si presentano alle osservazioni dei nostri sensi: il colore, il peso, la temperatura, etc. D'altra parte la nostra fantasia elabora le sensazioni che ci provengono da questi oggetti e, mentre da certe prescinde, spinge al massimo la valutazione di altre. Indichiamo con il termine *astrazione* questo primo aspetto della elaborazione compiuta dalla nostra fantasia a partire dalle sensazioni materiali elementari.

Il secondo complesso di operazioni che la nostra fantasia compie lo abbiamo indicato con il termine *generalizzazione*. Si tratta in sostanza di un processo di elaborazione che potremmo anche chiamare di *estrapolazione* estendendo ad ogni dimensione e ad ogni distanza ("piccolo", "grande" sono solo valutazioni soggettive!) le nostre esperienze spaziali locali. Il processo di generalizzazione si realizza anche ammettendo con la nostra fantasia la possibilità di ripetere "indefinitamente" certe operazioni che la realtà fisica ci obbligherebbe invece a ritenere attuabili solo con precise limitazioni. Esempi di tali operazioni sono offerti dall'atto di suddividere un segmento o di prolungare ("illimitatamente", appunto) un segmento rettilineo.

L'intero processo di *elaborazione fantastica* dei dati sensoriali, che abbiamo ora descritto, ci porta a formare nella nostra mente quella che chiamiamo anche una *immagine idealizzata*, una *immagine mentale* dell'oggetto geometrico che i dati sensoriali ci hanno suggerito.

Doti di fantasia, intuizione, creatività sono alla base della capacità di riprodurre questi processi mentali e di ripeterli in situazioni nuove oppure di approfondirli in una azione di appropriazione cosciente della disciplina e della sua metodologia. È proprio su questa chiamata in causa di fantasia e creatività nella formazione del pensiero geometrico che si appoggiano molte riflessioni sui valori educativi e formativi che lo studio della geometria porta con sè.

3. LA FORMAZIONE DEI CONCETTI GEOMETRICI

Dalle immagini mentali di cui abbiamo parlato nel precedente paragrafo si avvia una ulteriore operazione di astrazione per giungere a costruire un ente mentale che viene abitualmente chiamato *concetto*.

Non entreremo nella discussione sulla natura del concetto: si tratta infatti di una discussione che è cominciata più di 2000 anni orsono, con la filosofia greca, e che ancora prosegue.

Ciò che ci interessa in questo momento ricordare è che non tutti i concetti possono essere individuati mediante opportune proposizioni che ne costituiscano la definizione esplicita. In particolare i concetti fondamentali della matematica, sui quali si costruisce l'intero edificio di una teoria (come per esempio l'aritmetica o la geometria) debbono necessariamente essere introdotti con sistemi di proposizioni primitive, che vengono abitualmente chiamate *assiomi*. Se non si facesse in questo modo, si dovrebbe instaurare un procedimento circolare di definizioni e di precisazioni, privo di qualsiasi validità logica.

Questa particolare procedura, che coinvolge le nozioni primitive sulle quali la matematica opera, viene chiamata "definizione implicita" o anche "definizione per assiomi". Essa stabilisce quindi le regole iniziali, secondo le quali i concetti matematici debbono essere trattati e impiegati nelle deduzioni logiche successive. In altre parole, la scelta di una base assiomatica sulla quale poggiare la costruzione di una teoria matematica è proprio la procedura che tende poi a garantire la possibilità di deduzioni rigorose, tipiche della scienza.

Nel caso della geometria la base assiomatica di cui stiamo parlando ha assunto nel tempo gli aspetti più diversi, condizionati anche dalla contemporanea evoluzione di altri rami paralleli della matematica. La costruzione assiomatica classica della geometria euclidea è senza dubbio quella dovuta a Euclide, che noi possiamo oggi utilizzare nella forma logicamente ineccepibile elaborata da Hilbert (cfr. [7]). Nel cap. III di questo scritto daremo una presentazione schematica di questa assiomatica sintetica alla Euclide/Hilbert, enunciata in modo da tener conto degli ultimi risultati della ricerca scientifica in materia (cfr. [8]). Accanto a questa assiomatica puramente sintetica possiamo considerare altri sistemi, che possiamo definire "misti", basati essenzialmente sulla introduzione della nozione di misura in geometria. Tali sistemi sono fondati su nozioni di distanza come quelle di "spazio metrico" oppure di "funzione distanza" e prevedono sempre, in qualche modo, la sovrapposizione della struttura (aritmetica, algebrica e ordinata) dei numeri reali alle nozioni geometriche fondamentali. Il riferimento storico, per questa impostazione, è all'opera di LEGENDRE, mentre recentemente un punto di vista di questo tipo è stato in sostanza ripreso da G.CHOQUET (cfr. [3]). Un terzo gruppo di sistemi assiomatici, che attualmente gode di una ampia considerazione, è quello di natura puramente algebrica che utilizza esclusivamente il linguaggio della cosiddetta algebra moderna (spazi vettoriali, forme lineari, bilineari e quadratiche, etc.) per definire astrattamente degli oggetti che occupano il posto degli enti geometrici fondamentali (cfr. per es. [5]).

Secondo il processo che abbiamo precedentemente descritto e quale che sia la base assiomatica scelta, possiamo ora concludere che la matematica (e la geometria quindi, di cui in particolare ci interessiamo) subisce una sorta di evoluzione da disciplina con propri contenuti specifici a scienza di relazioni e di strutture (per queste considerazioni si veda per es. [13]). Si pone dunque ora un duplice problema. Da una parte assicurare il massimo rispetto del complesso di azioni scelto come base concettuale su cui fondare la teoria, senza che alle nozioni primitive di cui gli assiomi stabiliscono il comportamento e dettano le regole, vengano attribuite proprietà implicite e non espressamente stabilite, frutto di nascoste suggestioni psicologiche. Da un'altra parte occorre garantire la correttezza del processo di deduzione logica rendendolo oggettivo e verificabile. A questi fini la costruzione di una teoria matematica è sempre accompagnata dalla elaborazione di un opportuno formalismo fornito di appropriate leggi grammaticali e sintattiche.

Naturalmente va osservato che la natura di questo formalismo è strettamente legata al tipo di base assiomatica scelta. In particolare esso potrà essere più astratto oppure meno astratto in conseguenza del livello di astrazione con cui gli assiomi sono stati enunciati. Tuttavia dobbiamo osservare che la costruzione del concetto in matematica è sempre accompagnata in modo irrinunciabile da un processo di astrazione e di formalizzazione che fanno pervenire alla forma finale dell'oggetto matematico. La matematica stessa merita allora di essere definita come *scienza dei sistemi formali* oppure ancora come *linguaggio* che deve la sua incredibile adattabilità e potenza descrittiva proprio alla assoluta astrazione e formalità che lo caratterizzano (cfr. per es. [9]).

4. CHE COSA SI INSEGNA IN GEOMETRIA

L'analisi svolta nei precedenti paragrafi, dalla nascita delle immagini mentali della geometria alla costruzione di un formalismo che definisca in modo obiettivo e razionale i suoi oggetti di indagine, ci aiuta a formarci una idea di questa scienza articolata e affascinante.

Lo studio della geometria consiste nell'operare con gli strumenti appropriati,a qualcuno dei livelli di indagine (sensoriale, fantastica, logica) che abbiamo analizzato per giungere però, in ogni caso, ad un livello opportuno ma irrinunciabile di formalismo. Questo ci permette, come abbiamo già notato, di garantire deduzioni logicamente valide e oggettive, il che è l'obiettivo di ogni attività di pensiero che vogliamo chiamare scienza.

Siamo soliti indicare, in ciascuna disciplina, l'insieme delle conclusioni logicamente giustificate e affidabili a cui si è in grado di giungere, come il complesso delle "verità" a cui la disciplina in questione ci può portare.

Nell'insegnamento della geometria è dunque essenziale che siano presenti entrambi i momenti che abbiamo esaminato: quello preliminare del *riferimento alla realtà* e quello sostanziale che, operando con lo strumento formale, costituisce il *fondamento logico* della disciplina.

Il primo momento del *riferimento alla realtà* ha un ruolo essenziale in quanto evita la costruzione di giochi formali ed educa alla ricerca della *plausibilità* nell'enunciare congetture e ipotesi. Come abbiamo già messo in evidenza, le doti mentali che vengono attivate e stimolate in questo momento operativo sono la creatività, la intuizione e la fantasia.

Non meno essenziale è però anche il momento del *fondamento logico* e della *costruzione formale* della geometria. L'obiettivo educativo, in questo caso, è la ricerca della *verità*, che del plausibile è l'essenza ma anche l'antitesi o l'alternativa. I valori educativi che possono essere perseguiti in questo settore di studio e formazione sono dunque l'attenzione al rigore e alla coerenza logica, la onestà intellettuale e la capacità di distinguere a fondo tra le proprie speranze concettuali e il dato razionale obiettivo.

I due momenti in cui deve articolarsi l'insegnamento e lo studio della geometria, che abbiamo ora illustrato, sono entrambi *essenziali, inscindibili* ma *nettamente distinti* tra loro.

Essi sono inscindibili poiché si ispirano reciprocamente: appena si ottengono, infatti, i primi risultati formali, questi esaltano l'attenzione critica rivolta ai dati della esperienza sensoriale, cioè ravvivano e acutizzano i procedimenti mentali di astrazione e generalizzazione. Viceversa l'opera di elaborazione fantastica operata sulle immagini che provengono dalla esperienza fisica suggerisce la creazione di formalismi più precisi ed efficaci e di procedimenti razionali più rigorosi e approfonditi (per approfondire le considerazioni ora svolte si veda ad es. [14], [15], [16]).

È importante sottolineare però che i due momenti di cui stiamo parlando devono anche essere tenuti nettamente distinti. Si può dire che la geometria è diventata adulta proprio quando il momento teorico si è chiaramente distinto dalle origini contenutistiche che affondano le loro radici nella esperienza della realtà fisica circostante. La storia del pensiero ci mostra un lungo itinerario di crescita concettuale che si muove a partire dalle dimostrazioni di Euclide fatte "guardando il disegno", oppure da quelle di Saccheri basate su una ritenuta evidente "natura" delle figure geometriche, oppure ancora di Legendre che considera gli assiomi come "verità evidenti", fino alla costruzione di Hilbert della geometria euclidea oppure ancora fino ai travolgenti sviluppi delle geometrie non-euclidee. L'esistenza di questi due piani distinti, complementari e inconfondibili, è una caratteristica specifica della geometria, che la distingue dagli altri rami classici della matematica, come l'analisi o l'algebra.

Il problema tanto discusso e dibattuto riguardante la scelta di una assiomatica e ancora quello relativo alla possibile identificazione tra gli oggetti (geometrici) e il linguaggio (algebrico o analitico) che li descrive, è un fatto tipico e qualificante della geometria che nasce proprio come conseguenza della esistenza nella geometria delle due nature, o momenti, di cui abbiamo discusso. Infatti in altri rami della matematica, quali l'algebra, l'aritmetica, l'analisi, si incontra solo il momento relativo allo strumento formale, che è contemporaneamente il contenuto, l'oggetto e il linguaggio della disciplina. Il riferimento alla realtà, che sollecita e guida, appare invece solamente all'inizio del processo di elaborazione concettuale e non rischia mai di confondersi con l'oggetto di studio o di rappresentazione.

5. I PROBLEMI DELL'INSEGNAMENTO DELLA GEOMETRIA EUCLIDEA PIANA

Quando si insegna, e si studia anche, la geometria euclidea del piano, la distinzione tra il momento della realtà e quello logico-formale, di cui in precedenza abbiamo discusso, si presenta delicata e non sempre facile da cogliere. È forse proprio su questa difficoltà che poggia una certa attuale impopolarità della geometria, oppure è forse il desiderio di risolvere radicalmente questi delicati problemi che ha spinto una intera corrente di pensiero all'interno della matematica a sostituire la geometria con lo strumento algebrico che la descrive.

Il problema di fondo che si presenta è la individuazione della natura vera degli oggetti di cui la geometria intende occuparsi. In corrispondenza ai due diversi momenti che costituiscono la complessa realtà geometrica possiamo indicare i due aspetti, distinti ma complementari, degli oggetti veri della nostra disciplina.

Da una parte abbiamo la idealizzazione dei contenuti della esperienza sensibile, ottenuta con i processi di elaborazione fantastica illustrata nei primi paragrafi di questo capitolo. Le *figure geometriche* sarebbero allora le *idealizzazioni empiriche delle esperienze sensoriali* che inevitabilmente vengono a sovrapporsi e a confondersi con la rappresentazione grafica, con il disegno, che le rappresenta. È in questo ambito che si afferma prepotente la tentazione del plausibile in sostituzione della categoria della verità, e anche la suggestiva impressione che una buona verifica grafica o manipolativa possa tranquillamente sostituire una dimostrazione razionale e formale.

Tuttavia abbiamo visto come il processo di elaborazione fantastica dei dati sensoriali debba necessariamente condurre ad una costruzione formale sottoposta alle regole obiettive e ferree della logica. Questo ci porta quindi a vedere il secondo aspetto degli oggetti di indagine della geometria, che è quello rappresentato dai formalismi che li descrivono. Tali formalismi possono essere di natura sintetica oppure algebrico/analitica, ma questo è irrilevante agli effetti della analisi che stiamo svolgendo. Ciò che ha importanza da questo punto di vista è invece che *le figure geometriche*, in questo caso, sono *oggetti astratti e formali* su cui si sa e si può operare solo in forza delle regole grammaticali e sintattiche ammesse dal formalismo.

In questo contesto i processi di deduzione logica, lo svolgimento di dimostrazioni, l'esibizione di esempi o contro-esempi, segue necessariamente un itinerario complesso e articolato. Si tratta infatti di tracciare i disegni che si riferiscono alle figure su cui si opera, perché queste sono le radici della intuizione e della creatività, come già abbiamo detto. Ma poi, ben presto, occorre staccarsi da queste suggestioni, per evitare, o almeno controllare, gli assiomi e le ipotesi implicite, ma non volute, nascoste nei processi intuitivi. È necessario, in questa fase, riferirsi esclusivamente alla razionalizzazione delle figure, operando solo attraverso i formalismi che le rappresentano.

Lo svolgimento di un itinerario come quello descritto richiede da parte dello studioso una forte capacità critica e una rigorosa attenzione ai processi mentali che vengono svolti. Tutto ciò è certo profondamente educativo, ma può anche essere difficile da ottenere senza adeguati strumenti di appoggio logici o psicologici.

Diventa a questo punto un problema essenzialmente didattico l'elaborare opportune strategie atte a ravvivare o stimolare le attitudini critiche e di rigore di cui abbiamo detto. Ci limiteremo, in questa sede, a formulare alcune proposte operative.

Rimanendo nell'ambito della geometria euclidea piana si possono ad esempio tener presenti i seguenti accorgimenti.

i) Svolgere le dimostrazioni facendo riferimento a disegni tracciati in modo sommario, cosicché diventi naturale e quasi necessario giustificare razionalmente ogni collocazione e ogni supposizione di esistenza di punti, rette o altre figure chiave.

ii) Introdurre lo studio di situazioni nuove, inusuali per la intuizione fantastica: tali possono essere, ad esempio, le trasformazioni, che anche nelle loro più semplici proprietà esprimono comportamenti non sempre immediatamente intuibili.

iii) Ricorrere a immagini mentali non stereotipe riguardanti le figure geometriche (in particolare le più comuni). Questo si può ottenere sostituendo gli abituali ambiti spaziali (come ad esempio quello del foglio) con altri più difficilmente confrontabili con l'ambiente delle nostre immagini mentali. Interessanti sono, a questo proposito, le riflessioni recentemente introdotte da alcuni psicologi riguardo i diversi ambiti spaziali empirici detti *microspazio*, *mesospazio*, *macrospazio*.

In un ambito più generale si può fare anche utilmente riferimento alle geometrie non euclidee oppure alla geometria euclidea dello spazio. Non possiamo trattare in questa sede l'interessante questione riguardante le risorse didattiche legate allo studio delle geometrie non euclidee (cfr. per questo punto di vista per es. [11] e [12]). Svolgeremo invece alcune riflessioni relative alla geometria euclidea dello spazio.

6. LA GEOMETRIA EUCLIDEA DELLO SPAZIO: UNA RISORSA DIDATTICA

La conclusione di quanto abbiamo detto nel precedente paragrafo è che il confine tra intuizione e rigore, tra plausibilità e dimostrazione, può divenire, per la geometria piana, molto incerto, fino a sembrare frutto di preoccupazioni formali, piuttosto che esigenza logica imprescindibile.

Nel caso della geometria dello spazio, il pericolo della confusione tra l'oggetto mentale che chiamiamo "figura geometrica", e una sua rappresentazione grafica o mediante modelli, è certamente minore. Gli oggetti, le "figure solide" della geometria, sono entità di cui la nostra intuizione continua ad avere una idea alquanto generica e dai contorni sfumati.

È ben noto che si può realizzare una rappresentazione grafica piana di queste figure solide: ciò è per esempio argomento cui è dedicata la Geometria Descrittiva. Tuttavia tale rappresentazione grafica richiede il rispetto a sua volta di precise regole formali per poter costituire una descrizione razionale ed obiettiva, e non manca, inoltre, a volte, di particolari situazioni di ambiguità e mancanza di informazione.

Più in generale dobbiamo ricordare che il problema della rappresentazione piana di oggetti dello spazio attraverso il disegno ha costituito da lungo tempo un interessantissimo arco di collegamento tra la produzione artistica e l'approfondimento di particolari rami della geometria che hanno portato allo studio prima della prospettiva e poi della geometria proiettiva. La realizzazione di tali disegni non può tuttavia essere posta alla base di affidabili processi deduttivi, poiché è troppo labile il confine tra le immagini suggestive e stimolanti di oggetti geometrici propri e la rappresentazione di *illusioni ottiche* o di *disegni impossibili*.

Le *illusioni ottiche* possono essere definite come espedienti grafici atti ad indurre informazioni psicologiche sostitutive di esperienze sensoriali effettive o presunte. In altre parole, i disegni che offrono delle illusioni ottiche non fanno altro che suggerire alterazioni a certe valutazioni che il soggetto si illude di fare in analogia a possibili verifiche sperimentali.

Con il termine di *disegni impossibili* ci riferiamo ad una vasta classe di immagini grafiche che potrebbero variamente classificarsi come *disegni sbagliati*, *immagini di oggetti inesistenti* (cioè che di fatto non esistono) oppure ancora *immagini di oggetti che non possono logicamente esistere* (cioè la cui esistenza sarebbe contraddittoria) (cfr. per es. [4]).

Sappiamo anche che delle figure solide si possono pure realizzare dei "modelli" fisici. Questi sono certamente utili nelle manipolazioni che hanno lo scopo di ravvivare intuizione e creatività, ma si adattano molto male per essere l'ambiente ove svolgere argomentazioni e deduzioni razionali. Tali modelli devono essere, a loro volta, oggetto di un appropriato processo di astrazione e idealizzazione, solo al termine del quale si può incontrare la figura geometrica propriamente detta.

Per tutti questi motivi i ragionamenti e le considerazioni che riguardano le figure geometriche dello spazio devono venire rivolti in maniera diretta al loro oggetto proprio anziché ad una sua particolare realizzazione o rappresentazione. D'altra parte, come abbiamo già rilevato, le figure geometriche sono enti astratti, le cui caratteristiche sono delineate con precisione solo attraverso gli strumenti razionali e la loro rappresentazione formale. Quando dunque ci ripromettiamo di operare sulle figure geometriche dello spazio, non potendo queste essere facilmente confuse con una loro rappresentazione, risulterà più evidente di quanto risulti nel caso del piano, la necessità di ricorrere ad un procedimento logico che faccia riferimento alle loro proprietà astratte anziché ricorrere a verifiche di plausibilità che si riferiscono ai citati modelli rappresentativi concreti. In tal modo, operando con la geometria dello spazio, le verifiche di plausibilità tornano ad occupare il loro posto naturale, che è quello di espedienti euristici suggestivi ma inaffidabili, e non certo quello di sostituti incomodi ma inevitabili, delle dimostrazioni razionali.

È dunque chiara la irrinunciabile necessità che la geometria euclidea dello spazio venga fondata in modo chiaro e razionale e il suo studio sia condotto in forma rigorosa e oggettiva. È questa la condizione indispensabile per assicurare la sua rilevanza formativa e il suo apporto culturale.

II - La rappresentazione piana delle figure dello spazio: la geometria descrittiva

1. SCOPI DELLA GEOMETRIA DESCRITTIVA

Siamo soliti chiamare *figure geometriche* certi enti che costituiscono l'oggetto di studio della geometria. Dal punto di vista moderno le figure geometriche sono considerate come insiemi di punti che soddisfano a determinate condizioni opportunamente espresse mediante il formalismo della geometria. Ne consegue che tali figure geometriche possono essere studiate facendo esclusivamente riferimento a quei formalismi senza tentare alcuna rappresentazione delle immagini visive o mentali che in un qualche modo possono aver suggerito il nascere delle figure stesse.

Il *disegno* ha invece lo scopo di costituire un ponte tra le nozioni astratte delle figure geometriche e quel complesso di dati sensoriali che portano alle immagini che nella nostra mente corrispondono alle diverse figure. Il disegno stesso può avere però un doppio significato: può essere semplicemente convenzionale e simbolico, oppure può essere tracciato secondo regole precise in modo da comunicare informazioni rigorosamente valutabili. Ritengo che ci si riferisca al primo ruolo che abbiamo attribuito al disegno di figure geometriche, quando si cita il famoso e profondo aforisma: "*la geometria è l'arte di fare i ragionamenti giusti sulle figure (cioè sui disegni) sbagliate*". Il secondo ruolo colloca invece il disegno tra gli strumenti tecnici per lo studio della geometria e per la risoluzione dei suoi problemi. È esempio classico di questo punto di vista il problema delle *costruzioni con riga e compasso* delle figure geometriche, che costituisce un significativo capitolo nello studio della geometria elementare.

Quanto abbiamo detto riguardo il disegno e il suo ruolo nello studio della geometria, ha una immediata realizzazione se ci si riferisce alla cosiddetta geometria piana. Infatti è lecito pensare che il foglio di disegno costituisce un soddisfacente modello di una porzione di piano euclideo.

Molto più complesso si presenta invece il problema se ci si riferisce al piano di una geometria non-euclidea oppure, da un altro punto di vista, alla geometria dello spazio, anche se lo spazio è quello della classica geometria euclidea tridimensionale.

Accenneremo ora in particolare e brevemente alla rappresentazione mediante immagini piane di oggetti o figure che si trovano nello spazio. Richiederemo inoltre più precisamente che tale rappresentazione sia ottenuta attraverso regole opportune così da permettere la risoluzione grafica nel piano di problemi di geometria spaziale. Quello che abbiamo ora enunciato è lo scopo a cui mira la cosiddetta *geometria descrittiva* (cfr. per es. [6]).

Tra i vari *metodi di rappresentazione* che sono oggetto della geometria descrittiva accenneremo qui ad uno, in particolare, la cui conoscenza può risultare utile anche nell'ordinaria pratica didattica. Si tratta della cosiddetta *assonometria* le cui regole di rappresentazione possono rivelarsi utili per tracciare immagini corrette e suggestive delle abituali figure geometriche spaziali.

2. L'ASSONOMETRIA

L'operazione fondamentale della geometria descrittiva è quella di *proiezione*. Per *proiezione* di un punto P dello spazio da un *centro di proiezione* V sopra un *piano di proiezione* π si intende il punto P', intersezione della retta $\overline{V,P}$ (*raggio proiettante*) con il piano π. Quando questo piano coincide con il piano del disegno viene solitamente detto *quadro*. Quanto abbiamo ora descritto è la ben nota operazione detta "*proiezione e sezione*" della *geometria proiettiva*.

La proiezione si dice *centrale* oppure *parallela* secondo che il centro V è *proprio* o *improprio*; la proiezione parallela può, a sua volta, essere *obliqua* od *ortogonale*, a seconda che lo è, rispetto al quadro, la direzione dei raggi proiettanti.

Proiezione (o *immagine*) *di una figura* dello spazio è l'insieme delle proiezioni dei suoi punti. In particolare *in proiezione parallela* le proiezioni di tutti i *punti propri* sono *proprie*, la *proiezione di una retta* (non passante per V) è una *retta*, *rette parallele* hanno le *proiezioni parallele*, *segmenti congruenti e paralleli* hanno le *proiezioni* tra loro *congruenti e parallele*. Più in generale possiamo dire che i procedimenti che sono alla base della geometria descrittiva discendono dalle leggi e dalle proprietà della geometria proiettiva e *proiettiva* è pure la corrispondenza che lega una figura con la sua immagine.

Con il nome di *assonometria* si è soliti indicare quella parte della geometria descrittiva che si propone di rappresentare la *proiezione* (usualmente *parallela*) su un *quadro* π assegnato, di una figura F dello spazio riferita ad una terna cartesiana ortogonale (O, x, y, z). Si parla allora di *assonometria parallela ortogonale* oppure *obliqua* secondo che tale è la direzione dei raggi proiettanti rispetto al quadro π.

Elementi essenziali di riferimento sono le *proiezioni* x', y', z' degli *assi obiettivi* $x, y, z,$ sul quadro. Tali proiezioni costituiscono tre rette orientate concorrenti in un punto O' (proiezione di O) alle quali viene dato il nome di *assi assonometrici*. Può essere comodo a volte considerare, su ognuno degli assi assonometrici, la proiezione delle scale obiettive determinate sugli assi obiettivi dalle rispettive unità di misura. Siffatte proiezioni vengono dette *scale assonometriche* e permettono di realizzare la *costruzione fondamentale dell'assonometria* che consiste nel rappresentare l'immagine P' di un punto P assegnato mediante le proprie coordinate cartesiane obiettive (x_0, y_0, z_0).

Da quanto detto risulta che un *sistema assonometrico* è determinato quando lo sono le proiezioni degli assi assonometrici e le proiezioni delle unità di misura obiettive assegnate sui rispettivi assi (cioè appunto le scale assonometriche). Sorge allora la domanda: quali vincoli sussistono tra gli elementi predetti, o tra essi e i corrispondenti elementi obiettivi? La risposta è data da un celebre teorema di K.POHLKE (1810-1876).

Teorema. *Tre segmenti arbitrari di un piano* $\overline{O',A'}$, $\overline{O',B'}$, $\overline{O',C'}$, *uscenti da uno stesso punto O' e non tutti e tre allineati, si possono sempre considerare rispettivamente come proiezioni parallele di tre segmenti congruenti* $\overline{O,A}$, $\overline{O,B}$, $\overline{O,C}$ *presi sopra tre rette dello spazio uscenti dal punto O e tra loro mutuamente ortogonali.*

Il teorema di POHLKE ci assicura quindi che prendendo ad arbitrio tre assi assonometrici e su essi le relative scale assonometriche, esiste sempre una assonometria parallela che li ammette come elementi di riferimento.

Tuttavia il più delle volte si preferisce la scelta degli elementi di riferimento che corrispondono alla cosiddetta *assonometria* (o *prospettiva*) *cavaliera*. In questo caso il *quadro* π è assunto parallelo o addirittura coincidente con il piano (y, z) del riferimento obiettivo; di conseguenza gli assi assonometrici y', z' sono paralleli (o coincidono) con i rispettivi assi obiettivi y, z e le relative scale assonometriche coincidono con le rispettive scale obiettive. Affinché la proiezione x' dell'asse x non svanisca, *l'assonometria cavaliera* dovrà essere *obliqua*.

3. DUE ESEMPI DI RAPPRESENTAZIONI ASSONOMETRICHE

In questo paragrafo ci proponiamo di individuare con i metodi della geometria analitica le proiezioni assonometriche dell'asse x e di una circonferenza del piano (x, y).

Detto (O, x, y, z) un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico nello spazio, fissiamo come piano del disegno π (*quadro*) il piano (y, z) e riferiamo dunque tale piano alla coppia di assi $y':=y$, $z':=z$. Scegliamo come *centro di proiezione V* il punto improprio dello spazio rappresentato dalla direzione della retta

$$x = t, \qquad y = bt, \qquad z = ct, \qquad (b, c>0).$$

Il punto obiettivo (punto dello spazio) $X = (1, 0, 0)$ viene proiettato da V su π nel punto $\{X'\} := \overline{V,P} \cap \pi$; quindi, essendo $\overline{V,P}$ e π di equazioni rispettivamente

$$x = 1+t, \qquad y = bt, \qquad z = ct \quad \text{e} \quad x = 0,$$

si ha $X'=(-b, -c)$.

Dunque *la proiezione* x' *dell'asse obiettivo* x, nel piano π ha equazione:

$$cy' - bz' = 0.$$

Vogliamo ora rappresentare la proiezione γ' della figura spaziale costituita dalla *circonferenza* γ di equazioni:

$$[1] \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

La retta proiettante il generico punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ di γ ha equazioni:

$$x=x_0+t, \qquad y = y_0 + bt, \qquad z = z_0 + ct;$$

ricordando quindi le [1] e intersecando con il quadro π riferito al sistema di coordinate cartesiane (y', z'), ove $y' := y$, $z' := z$, si ha l'equazione di γ':

$$[2] \qquad (cy'-bz')^2 + z'^2 = c^2.$$

Dunque γ' è una ellisse con il centro nel punto $O' = (0, 0)$ inscritta nel parallelogrammo i cui lati hanno equazioni

$$cy' - bz' \pm c = 0, \qquad z' = \pm c$$

con i punti di contatto rispettivamente

$$A' = (1,0), \quad B' = (-1, 0) \quad C' = (b, c), \quad D' = (-b, -c).$$

La curva γ' è detta *ellisse indicatrice* e poiché è la proiezione della circonferenza γ, ogni suo raggio è immagine in π di un segmento del piano $z = 0$ di lunghezza unitaria; pertanto ogni raggio di γ' è l'*unità assonometrica* relativa alla retta che lo contiene e ad ogni altra retta a questa parallela.

Ricordiamo che in una ellisse due *diametri* si dicono *coniugati* quando ciascuno di essi è parallelo alle rette che sono tangenti all'ellisse stessa nei punti di intersezione con l'altro diametro. È chiaro che nel caso particolare in cui l'ellisse sia una circonferenza ogni coppia di diametri mutuamente perpendicolari costituisce una *coppia di diametri coniugati*. Scende da questa osservazione che nel caso della ellisse γ' ogni coppia di diametri coniugati è la proiezione di due diametri ortogonali della circonferenza γ. Dunque *condizione necessaria e sufficiente affinché due rette obiettive del piano* (x, y) *siano tra loro perpendicolari* è che le direzioni delle loro proiezioni sul quadro π siano quelle di due diametri coniugati nell'ellisse indicatrice γ'.

Si verifica facilmente che i coefficienti angolari m, n di due diametri coniugati di γ', di equazioni rispettive $z'=my'$, $z'=ny'$, sono legati dalla relazione

$$(1+b^2)\, mn - bc\, (m + n) + c^2 = 0.$$

4. I SOLIDI NELLO SPAZIO E IL CONTORNO APPARENTE

Accenniamo ora brevemente ai problemi legati alla rappresentazione piana, mediante i metodi della prospettiva cavaliera, di un oggetto solido (e quindi non trasparente) che viene visto dal punto improprio V, già preso in considerazione.

Si osserva allora che esiste una superficie cilindrica, le cui generatrici (parallele tra loro) passano per il punto V e sono tangenti all'oggetto; su questo i punti di contatto delle generatrici in parola costituiscono una curva, che viene chiamata "*contorno apparente*" dell'oggetto dal punto di vista V; in corrispondenza al contorno apparente (del solido) esiste una seconda curva, che è la sua proiezione sul quadro da V. Supponiamo che il solido sia un poliedro, oppure sia uno di quei solidi rotondi che vengono studiati in geometria elementare (per esempio sfera, cilindro, cono rotondo ed altri analoghi). Poiché abbiamo detto che il solido è supposto non trasparente, si conviene spesso di rappresentare sul quadro soltanto quella parte del solido che viene effettivamente vista da V, e non quindi la parte del solido che questo nasconde. Tale parte in vista è ovviamente limitata dal contorno appartente, e la sua proiezione sul quadro è limitata dalla proiezione del contorno apparente. Poniamo ora che sul solido sia tracciata una curva F, e che questa sia regolare, cioè dotata di retta tangente e di piano osculatore in ogni suo punto (esclusi al più dei punti isolati in numero finito). Chiamiamo F' la curva proiezione di F da V sul quadro, e supponiamo che essa incontri la proiezione del contorno apparente in un punto Q'; pochi calcoli elementari (che qui non riportiamo), pertinenti alla geometria differenziale (o anche soltanto alle applicazioni geometriche dell'analisi matematica) permettono di dimostrare che, in ogni punto come Q', la curva F' è tangente alla proiezione del contorno apparente.

Daremo una immediata applicazione di questa osservazione, riprendendo l’esempio analizzato nel paragrafo precedente.

Consideriamo il cilindro infinito, le cui generatrici passano per i punti della circonferenza (1) e sono parallele all’asse z. Se immaginiamo che il cilindro sia un solido, il suo contorno apparente è costituito da due generatrici, che dividono la parte del cilindro che è vista da V da quella che è nascosta all’occhio (posto in V) dal cilindro stesso.

In questo caso possiamo considerare la circonferenza (1) come una curva tracciata sul cilindro; pertanto la ellisse (2) deve essere tangente alle due generatrici del cilindro che costituiscono la proiezione del contorno apparente visto da V.

Questa osservazione permette quindi di determinare la parte della curva (1) che viene vista da V; secondo note proprietà di geometria analitica, questa parte viene determinata dalle intersezioni della curva (2) con la retta che è la polare del punto improprio dell’asse z'. Tale polare viene rappresentata dall’equazione:

[3] $$z' = b\,(cy' - bz')$$

e si verifica che le tangenti alla curva (2) nei punti in cui essa è intersecata dalla retta (3), sono parallele all’asse z'.

Il Lettore può facilmente confrontare una rappresentazione che rispetta le regole della geometria descrittiva (in particolare il teorema relativo alla proiezione del contorno apparente) con le illustrazioni che si trovano purtroppo spesso in diversi libri di testo e che si presentano come patetici tentativi di rappresentare rispettivamente un cilindro rotondo oppure una sfera con i suoi “poli”, i “meridiani” e i “paralleli”.

III - I fondamenti della geometria euclidea dello spazio

1. PREMESSA

Faremo in questo capitolo un breve inventario delle nozioni su cui essenzialmente si fonda la geometria euclidea dello spazio, illustrando parimenti alcune significative proprietà che le caratterizzano. La trattazione non avrà un carattere strettamente tecnico ed esaustivo, ma tuttavia non costituirà neppure una sorta di trasposizione didattica, che viene invece affidata all'esperienza e alla competenza degli insegnanti.

I criteri con cui è stato compilato questo inventario sono suggeriti, oltre che dalle personali convinzioni di chi scrive, anche dalla intenzione di ottemperare al dettato dei Programmi ministeriali (programmi sperimentali, proposti dalla c.d. "Commissione Brocca"; cfr. [2]). Nei "Commenti" al Tema "Geometria" relativi al biennio (e quindi con validità anche per il triennio) della scuola secondaria superiore è scritto: "*... il docente può adottare ... un metodo che, facendo leva sulle conoscenze intuitive ..., proceda allo sviluppo razionale di limitate catene di deduzioni; è tuttavia necessario che ogni ipotesi o ammissione cui si fa ricorso sia chiaramente riconosciuta e formulata in modo esplicito, ...*".

Per fare in modo, dunque, che "*... ogni ipotesi ... cui si fa ricorso sia chiaramente riconosciuta e formulata in modo esplicito ...*" ci proponiamo di elencare con chiarezza le "nozioni fondamentali", sulle quali riteniamo didatticamente opportuno fondare la geometria euclidea, unitamente alle principali proposizioni che le riguardano. Tali proposizioni potrebbero poi, secondo differenti scelte logiche oppure didattiche, a volte essere assiomi oppure, altre volte, essere teoremi, dimostrabili sulla base di opportuni altri assiomi alternativi. La scelta di quali e quante proposizioni assumere come primitivi e, di conseguenza, quali dedurre come teoremi, è, in questo contesto, di natura essenzialmente didattica, e, di conseguenza, deve dipendere esclusivamente dal libero giudizio dell'insegnante.

Ciò che importa è soltanto che vengano evitate contraddizioni logiche o procedurali oppure circoli viziosi: cioè che si eviti di "dimostrare" proprietà precedentemente assunte come assioma, oppure si eviti che nuovi oggetti vengano definiti, mediante un giro di parole, con riferimento ancora a loro stessi.

Preoccupandosi poi della raccomandazione di "*... far leva sulle conoscenze intuitive ...*" dobbiamo ancora ricordare quanto sia importante, dal punto di vista didattico, che tutte le nozioni astratte e formali che sono introdotte, vengano presentate come una risposta logica e razionale a domande e interrogativi ragionevoli e problematici che gli studenti si possono porre in modo naturale (cfr. [10]). Non mancano, purtroppo, nella attuale vasta pubblicistica dei libri di testo, significativi contro-esempi al principio metodologico ora enunciato.

La correzione di questi errori psicologici e didattici è lasciata necessariamente all'abilità ed esperienza degli insegnanti. Noi stessi, nella stesura delle presenti note, non potremo, per ragioni di spazio, dedicare a questa essenziale ambientazione psicologica, neppure parte della attenzione e della cura che abbiamo auspicato e che è, per altro, assolutamente irrinunciabile.

2. RELAZIONI DI INCIDENZA

Per descrivere razionalmente gli enti di cui si occupa la cosiddetta geometria elementare introduciamo, in primo luogo, tre classi di oggetti detti, rispettivamente: *punti, rette, piani*. Tra tali oggetti si considera sussistere una relazione fondamentale detta *incidenza* che viene caratterizzata mediante opportune proposizioni primitive dette, appunto, *assiomi di incidenza*.

Quanto abbiamo descritto è, nella sostanza, l'inizio del sistema assiomatico dovuto a D. HILBERT (cfr. [7]). Attualmente (cfr. per es. [8]) si preferisce tuttavia riferirsi ad un unico *ente primitivo*: il *punto*; diremo che la totalità dei punti costituisce un *insieme P*. Assumeremo quindi che le rette e i piani siano particolari sottoinsiemi di *P* che soddisfano i già citati *assiomi di incidenza*. L'incidenza non risulta più, dunque, una relazione primitiva ma viene rappresentata attraverso le relazioni insiemistiche (supposte note) di *appartenenza* e *inclusione*.

Ricordiamo brevemente gli *assiomi di incidenza*.

Per ogni scelta di punti *distinti A, B, C, …*, per ogni retta *s* e per ogni piano α si ha:

I1 - *esiste esattamente una retta r che contiene A, B; scriveremo* $\overline{A,B} := r$; $A, B \in r$;
I2 - *se A, B, C non sono allineati, esiste esattamente un piano* π *che contiene A, B, C; scriveremo* $\pi := \{\overline{A,B,C}\}$; $A,B,C \in \pi$;
I3 - *se un piano* α *e una retta s hanno in comune almeno due punti, allora s è contenuta interamente in* α;
I4 - $|s| \geq 2$, *inoltre vi sono in P almeno quattro punti non complanari*.

Le proposizioni **I1** e **I2** si possono quindi più propriamente intendere come la definizione di quei particolari sottoinsiemi di *P* che chiamiamo, rispettivamente, *retta* oppure *piano*. La proposizione **I3** assegna allora, assiomaticamente, una sorta di "condizione di compatibilità" tra rette e piani. I tre sistemi di oggetti, punti, rette e piani, costituiscono dunque gli elementi essenziali della struttura geometrica che stiamo considerando.

Da un altro punto di vista si potrebbero invece intendere come costituenti essenziali della geometria i soli elementi dell'insieme dei punti e di quello delle rette. I piani, allora, non sono altro che ulteriori sottoinsiemi dell'insieme P che soddisfano le proposizioni **I2** e **I3**. Si usa anche esprimere questo fatto dicendo che i piani sono *sottospazi* (definizione **I3**), di *dimensione* 2 (definizione **I2**).

Indicando con R la totalità delle rette, diremo anche che la coppia (P, R) che soddisfa all'assioma **I1** e in cui per ogni retta s è $|s| \geq 2$, costituisce uno *spazio di incidenza*, o anche uno *spazio di rette*.

A questi assiomi di incidenza occorre ora aggiungere un ulteriore assioma più propriamente "dimensionale". Già l'assioma **I4**, assicurando l'esistenza di "almeno" due piani (distinti), permette di affermare che lo spazio della geometria è più esteso di un piano: esprimeremo questo fatto dicendo che *lo spazio ha "almeno" 3 dimensioni*. Desideriamo ora indicare che lo spazio in cui operiamo ha *"esattamente" tre dimensioni*. Per raggiungere questo scopo si potrebbe introdurre in modo preciso la nozione di dimensione, in una maniera che ha delle analogie con la definizione di dimensione solitamente assegnata per gli spazi vettoriali. Ciò è, in effetti, quanto si fa abitualmente in una trattazione scientifica completa dell'argomento. Tale scelta sarebbe però del tutto inopportuna dal punto di vista didattico per cui è preferibile una caratterizzazione diretta del solo "spazio a 3 dimensioni". Questa si può ottenere essenzialmente con la seguente proposizione.

I5 - *Se due piani distinti α, β hanno in comune almeno un punto, essi hanno in comune una intera retta.*

Questa proprietà, che caratterizza lo spazio a 3 dimensioni, potrebbe essere ottenuta, anziché enunciando un apposito assioma (l'assioma **I5**, appunto), anche come conseguenza di altre proposizioni che riguardano aspetti diversi dello spazio che stiamo studiando. Tale è, per esempio, la nozione di ordinamento. Ritorneremo tra breve su questo argomento.

Da un punto di vista strettamente logico bisognerebbe ora mostrare che è effettivamente possibile trovare insiemi di oggetti (da chiamare punti) in cui è possibile assegnare opportuni sottoinsiemi che soddisfano le proposizioni da **I1** a **I5**. Da un punto di vista didattico potrà invece forse essere sufficiente convincersi che le proposizioni **I1 - I5** costituiscono una soddisfacente descrizione della immagine geometrica intuitiva che abbiamo dello spazio fisico. L'enunciazione di tali proposizioni risponde dunque solo a quella esigenza di "chiarezza" a cui abbiamo fatto riferimento nel § 1.

Nella trattazione che segue, per ragioni di rapidità, indicheremo d'ora in poi le relazioni tra punti, rette e piani usando sistematicamente la nomenclatura e l'abituale formalismo insiemistico. Alcuni simboli logici come: $\forall$ (per ogni), $\Rightarrow$ (implica), etc., verranno usati come puri segni stenografici.

3. RELAZIONE D'ORDINE

La relazione d'ordine è essenzialmente legata alla struttura lineare della retta; essa si basa sul seguente assioma.

O1 - *Su ogni retta, intesa come insieme di punti, è assegnata una relazione di ordinamento totale "<" che non ammette né un primo né un ultimo elemento.*

Questa relazione d'ordine permette di introdurre su ogni retta la nozione di "*tra*": *per ogni coppia di punti distinti A, B diremo che* $X \in \overline{A,B}$ *è TRA A e B se e solo se* $X \neq A, B$ *e inoltre* $A < X < B$ *oppure* $B < X < A$.

Si potrebbe dimostrare (cfr. per es. [8]) che se è assegnata in modo assiomatico su ogni retta una relazione di TRA, soddisfacente a certe proprietà formali, da questa si può dedurre l'esistenza sulla retta stessa di una relazione di ordine totale.

Chiameremo la proposizione **O1** *assioma di ordinamento lineare*.

La relazione d'ordine, assegnata su una retta, permette di definire le fondamentali nozioni di *segmento*, *semiretta* e *angolo*.

Per ogni coppia di punti distinti A,B poniamo: $\overline{A,B} := \{X \in \overline{A,B} \mid X \text{ TRA } A,B\}$, *segmento* di estremi A,B; $\overrightarrow{A,B} := \{X \in \overline{A,B} \mid A \text{ NON TRA } B,X\}$, *semiretta* di origine A, che contiene B. È chiaro che $A,B \notin \overline{A,B}$; $A \notin \overrightarrow{A,B}$; $C \in \overrightarrow{A,\bar{B}} := \{Y \in \overline{A,B} \mid A \text{ TRA } B,Y\} \Rightarrow \overrightarrow{A,C} = \overrightarrow{A,\bar{B}}$.

Per ogni terna di punti distinti A, B, C si dice *angolo* $(B, \hat{A}, C)$ la coppia di semirette $\overrightarrow{A,B}$, $\overrightarrow{A,C}$. L'angolo è detto *piatto* se $\overrightarrow{A,C} = \overrightarrow{A,\bar{B}}$ ed è detto invece *nullo* se $\overrightarrow{A,B} = \overrightarrow{A,C}$. Scriveremo a volte $\widehat{(\overrightarrow{A,B};\ \overrightarrow{A,C})}$ oppure anche $\measuredangle\,(\overrightarrow{A,B};\ \overrightarrow{A,C})$ scegliendo, secondo i casi, il simbolo più comodo dal punto di vista formale o anche solo tipografico, al posto di $(B, \hat{A}, C)$.

Sono detti *adiacenti* gli angoli $\measuredangle\,(\overrightarrow{A,B};\ \overrightarrow{A,C})$ e $\measuredangle\,(\overrightarrow{A,\bar{B}};\ \overrightarrow{A,C})$ e *opposti* (al vertice) gli angoli $\measuredangle\,(\overrightarrow{A,B};\ \overrightarrow{A,C})$ e $\measuredangle\,(\overrightarrow{A,\bar{B}};\ \overrightarrow{A,\bar{C}})$.

Sulla base della nozione di segmento ora introdotta si può enunciare il secondo assioma di ordinamento che riguarda la totalità dei punti di ogni piano.

O2 - *Per ogni piano α e per ogni retta r di α, la totalità dei punti $\alpha \setminus r$ si può suddividere in due sottoinsiemi non vuoti e disgiunti tali che due punti A,B appartengono a sottoinsiemi opposti se e solo se il segmento $\overline{A,B}$ incontra la retta r.*

Dagli assiomi **O1** e **O2** si può dimostrare che ogni segmento contiene al-

Chiameremo i due sottoinsiemi *semipiani* contenuti in α, di *bordo r*. Indicheremo con il simbolo $\overrightarrow{(r,B)}$ il semipiano *che contiene* il punto *B*.
È chiaro che $A \in \overrightarrow{(r,B)}$ implica $\overrightarrow{(r,A)} = \overrightarrow{(r,B)}$; inoltre se $C \in \alpha$ e $C \notin \overrightarrow{(r,A)} \cup r$ porremo $\overleftarrow{(r,A)} := \overrightarrow{(r,C)}$ (*). Dunque $\alpha = \overrightarrow{(r,A)} \cup \overleftarrow{(r,A)} \cup r$ (unione disgiunta). È inoltre evidente che per ogni *r* e per ogni *A* di α si ha: $\overrightarrow{(r,A)} \neq \varnothing$. Inoltre per ogni $R \in r$ e per ogni $B \in \overrightarrow{(r,A)}$ è $\overrightarrow{R,B} \subseteq \overrightarrow{(r,A)}$.

meno un punto e quindi contiene infiniti punti.

È importante osservare che l'enunciato dell'assioma **O2** *non è* la definizione di semipiano, ma *esprime la condizione* affinché si possa dare senso alla nozione di semipiano (accade di incontrare libri di testo in cui questa distinzione non appare del tutto chiara).

Chiameremo la proposizione **O2** *assioma di ordinamento piano*.

L'assioma **O2** soddisfa a due esigenze. Ci dà informazioni riguardo la compatibilità della nozione di segmento introdotta sulle diverse rette di un piano e inoltre assegna opportune condizioni affinché rette complanari distinte abbiano un punto in comune.

Si pone ora il problema di caratterizzare il mutuo comportamento di rette e piani dello spazio con una proposizione analoga all'assioma **O2**.

O3 - *Per ogni piano α la totalità dei punti $P \setminus \alpha$ si può suddividere in due sottoinsiemi non vuoti e disgiunti tali che due punti A,B appartengono a sottoinsiemi opposti se e solo se il segmento $\overline{A,B}$ incontra il piano α.*

Chiameremo i due sottoinsiemi *semispazi* di *bordo α*. Indicheremo con il simbolo $\overrightarrow{(\alpha,B)}$ il semispazio che contiene il punto *B*. Per i semispazi valgono relazioni analoghe a quelle già stabilite per i semipiani.

Precisamente per ogni piano α, se $B \notin \alpha$ si ha: $A \in \overrightarrow{(\alpha,B)}$ implica $\overrightarrow{(\alpha,A)} = \overrightarrow{(\alpha,B)}$; $C \notin \overrightarrow{(\alpha,B)} \cup \alpha$ implica $P = \overrightarrow{(\alpha,B)} \cup \overrightarrow{(\alpha,C)} \cup \alpha$ (unione disgiunta) e indicheremo $\overleftarrow{(\alpha,B)} := \overrightarrow{(\alpha,C)}$; se *r* è una retta di α e $A \in \overrightarrow{(\alpha,B)}$, si ha $\overrightarrow{(r,A)} \subseteq \overrightarrow{(\alpha,B)}$.

(*) Ricordiamo che useremo il simbolo := per significare la nozione di "uguale per definizione".

Dobbiamo ora osservare che tra le proposizioni **O2** e **O3** vi è, dal punto di vista logico, una differenza sostanziale. Se infatti si assumono come assiomi dello spazio le proposizioni da **I1** a **I5** e inoltre **O1** e **O2** allora la proposizione **O3** consegue logicamente da esse, cioè **O3** costituisce l'enunciato di un teorema che può essere dimostrato. Se invece si assumono come assiomi di incidenza solo le proposizioni da **I1** a **I4** e come assiomi d'ordine **O1**, **O2**, **O3** allora è la proposizione **I5** che dipende logicamente dai primi, cioè che diviene l'enunciato di un teorema dimostrabile. Illustriamo nei dettagli quanto affermato.

Supponiamo dunque la validità degli assiomi **I1**, **I2**, **I3**, **I4**, **O1** e **O2** e dimostriamo le seguenti proposizioni.

Teorema 1. **O3** *implica* **I5**.

Dimostrazione. Siano α,β due piani distinti qualsiasi e P un punto tale che $P \in$ $\in \alpha \cap \beta$. Per **I4** esistono $X, Z \in \beta$ distinti con $P \notin \overline{X,Z}$. Se $X \in \alpha$ oppure $Z \in$ $\in \alpha$ allora $\overline{P,X} \subset \alpha \cap \beta$ oppure rispettivamente $\overline{P,Z} \subset \alpha \cap \beta$ e la tesi è dimostrata. Sia ora $X, Z \notin \alpha$.
Se $Z \in (\overrightarrow{\alpha,X})$ per **O1** esisterà un punto $Y \in \overset{-}{\overrightarrow{P,Z}} \subset (\overset{-}{\overrightarrow{\alpha,X}}) \cap \beta$. Per l'assioma **O3** si ha dunque $\overline{X,Y} \cap \alpha \neq \emptyset$; detto Q il punto tale che $\{Q\} := \overrightarrow{X,Y} \cap \alpha$, si ha $Q \neq P$. D'altra parte $Q \in \overline{X,Y} \subset \beta$ e dunque $\overline{P,Q} \subset \alpha \cap \beta$, che è la tesi. Al contrario se $Z \in (\overset{-}{\overrightarrow{\alpha,X}})$ si ha $\emptyset \neq \overline{X,Z} \cap \alpha =: \{Q\}$ e quindi ancora $\overline{P,Q} \subset \alpha \cap \beta$.

Teorema 2. I5 *implica* **O3**.

Dimostrazione. Sia α un piano qualsiasi; per **I4** esiste $U \in P \setminus \alpha$.
Poniamo

$$
[1] \qquad \begin{aligned} (\overrightarrow{\alpha,U}) &:= \{X \in P \setminus \alpha \mid \overline{U,X} \cap \alpha = \emptyset\} \cup \{U\}, \\ (\overset{-}{\overrightarrow{\alpha,U}}) &:= \{Y \in P \mid \overline{U,Y} \cap \alpha \neq \emptyset\}. \end{aligned}
$$

Dimostriamo che i sottoinsiemi $(\overrightarrow{\alpha,U})$ e $(\overset{-}{\overrightarrow{\alpha,U}})$ soddisfano alla condizione espressa da **O3**.
È evidente che $(\overrightarrow{\alpha,U}) \cap (\overset{-}{\overrightarrow{\alpha,U}}) = \emptyset$.
Per **I4** e **O1** si ha $(\overset{-}{\overrightarrow{\alpha,U}}) \neq \emptyset$. Sia $V \in (\overset{-}{\overrightarrow{\alpha,U}})$; cominciamo con il dimostrare che $(\overrightarrow{\alpha,V}) := \{X \in P \setminus \alpha \mid \overline{V,X} \cap \alpha = \emptyset\} \cup \{V\} = (\overset{-}{\overrightarrow{\alpha,U}})$.

Osserviamo prima di tutto che, in forza della definizione [1], si ha $\overset{\vdash\!\dashv}{U,V} \cap \alpha \neq$ $\neq \emptyset$; posto $P \in \overset{\vdash\!\dashv}{U,V} \cap \alpha$ consegue da **O1** che $\overrightarrow{P,V} = \overset{-}{\overrightarrow{P,U}}$.
Sia ora $X \in (\overrightarrow{\alpha,V})$; se è $X \notin \overline{U,V}$ risulta per **I2** univocamente definito il piano $\beta := \{\overline{U,V,X}\} \neq \alpha$.
Poiché $P \in \overline{U,V} \cap \alpha \Rightarrow P \in \alpha \cap \beta$, per **I5** si ha $r := \alpha \cap \beta \in R$ con $P \in r$. Dalla definizione [1] consegue allora che $\emptyset = \overset{\vdash\!\dashv}{V,X} \cap \alpha \supset \overset{\vdash\!\dashv}{V,X} \cap r \Rightarrow X \in$ $\in (\overrightarrow{r,V})$ e $\{P\} = \overset{\vdash\!\dashv}{U,V} \cap \alpha = (\overset{\vdash\!\dashv}{U,V} \cap \alpha) \cap \beta = \overset{\vdash\!\dashv}{U,V} \cap r \Rightarrow (\overrightarrow{r,V}) = (\overset{-}{\overrightarrow{r,U}})$, quindi $\overset{\vdash\!\dashv}{X,U} \cap r \neq \emptyset$. Dunque $\overset{\vdash\!\dashv}{X,U} \cap \alpha \supset \overset{\vdash\!\dashv}{X,U} \cap r \neq \emptyset \Rightarrow X \in \overset{-}{\overrightarrow{\alpha,U}}$.
Se poi $X \in \overline{U,V}$ risulta $X \in (\overrightarrow{\alpha,V}) \supset \overrightarrow{P,V} = \overset{-}{\overrightarrow{P,U}} \Rightarrow X \in (\overset{-}{\overrightarrow{\alpha,U}})$. Si può allora concludere che $(\overrightarrow{\alpha,V}) \subset (\overset{-}{\overrightarrow{\alpha,U}})$.
Consideriamo ora $Y \in (\overset{-}{\overrightarrow{\alpha,U}})$; se è $Y \notin \overline{U,V}$ e $\gamma := \{\overline{U,V,Y}\} \neq \alpha$ per **I5** si ha $P \in$ $\in s := \alpha \cap \gamma \in R$ e quindi $\emptyset \neq \overset{\vdash\!\dashv}{U,Y} \cap \alpha = (\overset{\vdash\!\dashv}{U,Y} \cap \alpha) \cap \gamma = \overset{\vdash\!\dashv}{U,Y} \cap s \Rightarrow Y \in$ $\in \overset{=}{\overrightarrow{s,U}} = \overrightarrow{s,V} \subset (\overrightarrow{\alpha,V})$.
Se poi $Y \in \overline{U,V}$ risulta $Y \in \overset{-}{\overrightarrow{\alpha,U}} \supset \overset{-}{\overrightarrow{P,U}} = \overrightarrow{P,V} \Rightarrow Y \in (\overrightarrow{\alpha,V})$.
Dunque $(\overset{-}{\overrightarrow{\alpha,U}}) \subset (\overrightarrow{\alpha,V})$ e quindi $(\overrightarrow{\alpha,V}) = (\overset{-}{\overrightarrow{\alpha,U}})$.
Osserviamo in secondo luogo che $\overset{\vdash\!\dashv}{U,V} \cap \alpha \neq \emptyset \Rightarrow U \in (\overset{=}{\overrightarrow{\alpha,V}}) := \{Y \in P \mid \overset{\vdash\!\dashv}{V,Y} \cap \alpha \neq \emptyset\} \Rightarrow (\overrightarrow{\alpha,U}) = (\overset{-}{\overrightarrow{\alpha,V}})$.
Scende di qui che, qualunque sia il punto U fissato, si ha per ogni
$X \in (\overrightarrow{\alpha,U})$, $Y \in (\overset{-}{\overrightarrow{\alpha,U}}) : (\overrightarrow{\alpha,Y}) = (\overset{-}{\overrightarrow{\alpha,U}}) \Rightarrow X \in (\overrightarrow{\alpha,U}) = (\overset{=}{\overrightarrow{\alpha,Y}}) \Rightarrow \overrightarrow{X,Y} \cap \alpha \neq$ $\neq \emptyset$. Viceversa per ogni $X,Y \in P \setminus \alpha$ se $\overrightarrow{X,Y} \cap \alpha \neq \emptyset$ si ha $(\overrightarrow{\alpha,X}) = (\overset{-}{\overrightarrow{\alpha,Y}})$ e da questo consegue la tesi.

4. RELAZIONE DI PARALLELISMO

I criteri relativi alla proprietà delle rette di un piano di avere un punto in comune oppure di non averlo sono quelli che caratterizzano maggiormente la geometria euclidea.

Più precisamente si chiama *piano affine* la coppia (P,R) costituita da un insieme P di *punti* e da un insieme R di parti di P, dette *rette*, che soddisfa all'assioma **I1**, all'assioma

I4' - *per ogni* $r \in R$: $|r| \geq 2$; $|R| \geq 2$,

e inoltre al ben noto assioma detto "*quinto postulato di Euclide*" o anche "*postulato delle parallele*":

P - *per ogni retta* r *e per ogni punto* $P \notin r$ *esiste una e una sola retta* s *tale che* $P \in s$ *e* $r \cap s = \emptyset$.

Dall'assioma **P** discende la definizione di parallelismo euclideo nel piano: per ogni $r, s \in R$ diremo *r parallela* ad *s* (e scriveremo $r \mathbin{//} s$) se e solo se $r = s$ oppure $r \cap s = \emptyset$. La retta s passante per un qualsiasi punto *P* e parallela ad una retta *r* è quindi univocamente determinata: la indicheremo con il simbolo $(P \mathbin{//} r)$.

In base all'assioma **P** si può immediatamente dimostrare che *il parallelismo nel piano affine è una relazione di equivalenza*.

È ben noto che in uno spazio di rette (*P*, *R*) in cui valgono le proposizioni **I1-I5** non è soddisfatto l'assioma **P**. Si pone allora il problema di generalizzare la nozione di piano affine per introdurre quella di *spazio affine*.

Sulla base delle proposizioni **I1-I3** sappiamo che una retta *r* e un punto $P \in \in r$ individuano esattamente un piano α; scriveremo: $\alpha := \{ \overline{P,r} \}$. Possiamo allora modificare l'assioma **P** come segue:

P' - *per ogni* $r \in R$ *e per ogni* $P \in P \setminus r$, *detto* $\alpha := \{ \overline{P,r} \}$ *esiste una e una sola retta s tale che* $P \in s$, $s \subset \alpha$ *e* $r \cap s = \emptyset$.

Continueremo a chiamare *parallele* le rette *r* ed *s* e scriveremo

$$r \mathbin{//} s,\ s := (P \mathbin{//} r).$$

Chiameremo *spazio affine*, e lo indicheremo con il simbolo (*P*, *R*, //), lo spazio di rette (*P*, *R*) che soddisfa all'assioma **P'**.

Convenendo ancora che, per ogni $r \in R$, sia $r \mathbin{//} r$, dall'assioma **P'**, con l'aggiunta della condizione che ogni retta contenga almeno 4 punti, si può dimostrare che *il parallelismo nello spazio affine è una relazione di equivalenza*.

Occorre rilevare che in uno spazio affine esistono coppie di rette che sono prive di punti in comune e non sono complanari: tali rette sono dette *sghembe* tra loro. Per esempio: per ogni retta *r* e ogni piano α tali che $\alpha \cap r =: \{P\}$, essendo *P* un punto, ogni retta $s \subset \alpha$ tale che $P \notin s$, è sghemba con *r*.

In uno spazio affine è possibile introdurre in modo naturale una nozione di parallelismo tra rette e piani oppure tra piani.

Definizione. (i) Per ogni retta *r* e ogni piano α diremo *r parallela ad* α (e scriveremo $r \mathbin{//} \alpha$) se e solo se $r \subset \alpha$ oppure $r \cap \alpha = \emptyset$.
(ii) Per ogni coppia di piani α, β diremo α *parallelo a* β (e scriveremo $\alpha \mathbin{//} \beta$) se e solo se $\alpha = \beta$ oppure $\alpha \cap \beta = \emptyset$.

È noto che sono facilmente dimostrabili le seguenti proposizioni.

Teorema 3. *Per ogni retta r, s e per ogni piano* α *si ha:*
i) $r \mathbin{//} s \Rightarrow$ *per ogni piano* $\beta \supset s$ *si ha:* $r \mathbin{//} \beta$;

ii) $r // \alpha \Rightarrow$ *per ogni piano* $\beta \supset r$, $\beta \neq \alpha$, *si ha:* $\alpha \cap \beta = \emptyset$ *oppure* $s := \alpha \cap \beta \in$ $\in R \Rightarrow r // s$;
iii) $r // \alpha \Rightarrow$ *per ogni* $P \in \alpha$ *si ha:* $(P // r) \subset \alpha$;
iv) se r, s *sono sghembe* $\Rightarrow \gamma := \cup \{(P // s) \mid P \in r\}$ *è un piano e* $r \subset \gamma$, $s // \gamma$.

Il parallelismo tra piani soddisfa ad una proposizione analoga all'assioma euclideo di parallelismo tra rette; la differenza è però che la proposizione relativa ai piani non è un assioma ma può essere facilmente dimostrata.

Teorema 4. *Per ogni punto* P *e per ogni piano* α *esiste uno e un solo piano* β *tale che* $P \in \beta$ *e* $\alpha // \beta$.

Indicheremo il piano β con il simbolo $(P // \alpha)$.
È immediato verificare che anche *il parallelismo tra piani è una relazione di equivalenza*. Al contrario il parallelismo tra rette e piano è una relazione che gode della sola proprietà simmetrica. Si ha infatti, per ogni piano α e per ogni punto P:

$$\cup\{r \in R \mid P \in r // \alpha\} = (P // \alpha).$$

5. CONGRUENZA DI SEGMENTI E ANGOLI

Un piano affine in cui sia introdotta una nozione di *ordinamento* " >" come quella definita dagli assiomi **O1** e **O2**, e una opportuna nozione di *congruenza* "≡", prende il nome di *piano euclideo*; lo indicheremo con il simbolo $(P,R,//,>,\equiv)$. Se a tali assiomi si aggiunge anche un assioma di continuità (in uno dei numerosi enunciati equivalenti) si ottiene il *piano euclideo reale*.
Si chiama *spazio euclideo* uno spazio affine $(P, R, //)$ nel quale ogni piano (affine) è un piano euclideo. Indicheremo anch'esso con il simbolo $(P,R,//,>,\equiv)$.
Possiamo dunque supporre che la nozione di congruenza sia già stata introdotta e studiata nei suoi aspetti essenziali nello svolgimento della geometria del piano. Ciò può essere stato fatto in vari modi. Ci limiteremo qui ad accennare ad uno dei possibili percorsi e a riassumere i risultati principali a cui faremo riferimento nel seguito.
Nella totalità delle *coppie di punti* di un piano è definita una *relazione di equivalenza,* che indicheremo con il simbolo "≡" e chiameremo *relazione di congruenza,* tale che siano soddisfatte le seguenti condizioni.

C1 - *Per ogni* $A,B,C \in P$:

$$(A,B) \equiv (B,A) \ ,$$

$$(A,B) \equiv (C,C) \text{ se e solo se } A = B \ .$$

C2 - *(assioma del trasporto). Per ogni A,B,A' ∈ P distinti e per ogni r ∈ R con A' ∈ r, esistono esattamente due punti X',Y' ∈ r tali che*

$$A' \text{ è TRA } X',Y'$$

e inoltre

$$(A',X') \equiv (A,B) \equiv (A',Y') \ .$$

C3 - *(assioma di addizionabilità). Per ogni A,B,C,A',B',C' ∈ P se C è TRA A,B e C' TRA A',B' si ha:*

$$(A,C) \equiv (A',C') \ , (C,B) \equiv (C',B') \Rightarrow (A,B) \equiv (A',B') \ .$$

C4 - *(assioma di simmetria). Per ogni A,B,C,A',B' ∈ P distinti con* $C \notin \overline{A,B}$ *e per ogni piano* α *con* $\overline{A',B'} \subset \alpha$*, se (A,B) ≡ (A',B') esistono esattamente due punti X',Y' ∈* α *tali che X',Y' sono in semipiani opposti rispetto* $\overline{A',B'}$ *e inoltre (A',X') ≡ (A,C) ≡ (A',Y') , (B',X') ≡ (B,C) ≡ (B',Y') .*

Anche nella totalità degli *angoli* è definita una *relazione di equivalenza* "≡", che chiameremo ancora *congruenza*, tale che angoli piatti e angoli nulli sono rispettivamente congruenti tra loro e inoltre è soddisfatta la seguente condizione di coerenza.

C5 - *Se per due triangoli Δ (A,B,C) e Δ (A',B',C') sono verificate le congruenze (A,B) ≡ (A',B') , (A,C) ≡ (A',C') ,* $(B,\widehat{A},C) \equiv (B',\widehat{A}',C')$
allora si ha pure (B,C) ≡ (B',C') e $(A,\widehat{B},C) \equiv (A',\widehat{B}',C')$ *.*

Si osservi che la nozione di congruenza ora introdotta non è definita relativamente ai segmenti ma solo alle coppie di punti (eventualmente i punti che sono *estremi* del segmento). Ciò viene fatto per rendere la nozione di congruenza logicamente indipendente da quella di allineamento e ordinamento. È interessante notare che questa relazione di congruenza viene così a differire poco dalla nozione di distanza tra punti che in altre sistemazioni assiomatiche è assegnata mediante l'introduzione di uno spazio metrico. Si potrebbero infatti interpretare come coppie di punti congruenti le coppie di punti che hanno tra loro uguali distanze. La differenza tra le due impostazioni consiste invece nel fatto che in quella qui presentata non ci si riferisce inoltre ad un campo numerico che permetta di "misurare" di quanto le distanze tra due coppie di punti possano eventualmente differire.

Dagli assiomi introdotti si possono dedurre le principali proprietà della geometria euclidea piana. In particolare, le seguenti proposizioni valide nel piano saranno utili nel successivo sviluppo della geometria dello spazio.

i) *Criteri di congruenza dei triangoli*. La proposizione **C5** esprime in forma assiomatica il criterio noto come (*lato, angolo, lato*); basandosi su essa e sugli altri assiomi si possono poi dimostrare i rimanenti criteri: (*angolo, lato, angolo*) e (*lato, lato, lato*).

ii) Proprietà degli angoli formati da una coppia di rette parallele distinte con una retta trasversale (*congruenza tra angoli corrispondenti, angoli alterni interni, etc.*).

iii) Nozione di *perpendicolarità tra rette*. Siano $r, s \in R$ distinte e P un punto tale che $\{P\} := r \cap s$. Si dice che r è *perpendicolare* ad s, e scriveremo $r \perp s$ se, detti $R \in r \setminus s$, $S \in s \setminus r$, si ha

$$\sphericalangle(\overrightarrow{P,R}\ ;\ \overrightarrow{P,S}) \equiv \sphericalangle(\overrightarrow{P,R}\ ;\ \overline{\overrightarrow{P,S}}),$$

cioè se le due rette formano angoli adiacenti tra loro congruenti.

Data la definizione di perpendicolarità si può dimostrare il seguente fondamentale teorema di esistenza e unicità valido nel piano euclideo.

Teorema 5. *Per ogni retta r e per ogni punto P, esiste ed è unica la retta s tale che $P \in s$, $r \perp s$.*

Useremo nel seguito la scrittura $(P \perp r) := s$; qualora sia opportuno mettere in evidenza che P, r, s giacciono in uno stesso piano α, potremo anche scrivere

$$(P \perp r)_\alpha := s.$$

iv) Dopo aver esteso la nozione di congruenza dalle coppie di punti ai segmenti, si può introdurre il concetto di *confronto tra segmenti* e di *confronto tra angoli*.

v) Se A,B,C,D sono punti distinti e non allineati tali che $\overline{A,B}\ //\ \overline{C,D}$, $\overline{A,D}\ //\ \overline{B,C}$, la quaterna ordinata (A, B, C, D) è detta *parallelogrammo* e si ha:

$$(A, B) \equiv (C, D),\ (A, D) \equiv (B,C).$$

Sulla base degli assiomi **C1-C5** si può costruire ora anche la geometria dello spazio euclideo $(P,R,//,>,\equiv)$.

Prima di tutto è necessario estendere la nozione di *angolo* anche alle *coppie di rette sghembe*.

Con riferimento alla nozione di angolo precedentemente assegnata, è evidente che ad ogni coppia di rette distinte e non parallele di un piano sono associati quattro angoli, a due a due tra loro adiacenti e a due a due opposti al vertice. Poiché nello spazio esistono anche coppie di rette distinte, non parallele e prive di punti in comune, rette tra loro *sghembe* appunto, si vuole estendere pure a queste la nozione di angolo. A tale scopo, dette r, s due rette sghembe, si consideri un generico punto $P \in r$ e quindi le due rette complanari r, $(P\ //\ s)$. A queste rette sono dunque associati quattro angoli come in precedenza si è osservato: si conviene di considerare tali angoli come *angoli associati alle due rette sghembe r, s*.

È evidente che la precedente definizione è accettabile solo se si dimostra che gli angoli formati dalle rette r e $(P \,//\, s)$ sono tutti rispettivamente congruenti tra loro al variare di $P \in r$. Ciò è immediato poiché le rette $(P \,//\, s)$, al variare di $P \in r$, sono parallele e complanari con r (vedi teorema (3.iv) e formano quindi un fascio di rette parallele tagliate dalla trasversale r.

La precedente definizione ci permette di estendere allo *spazio euclideo* $(P, R, //, \equiv)$ la nozione di *rette perpendicolari*.

Definizione. Due rette distinte r, s sono dette *perpendicolari*, e scriveremo $r \perp s$, se, scelto un punto $P \in r$ e detto α il piano individuato da r e $(P \,//\, s)$, nel piano α si ha $r \perp (P \,//\, s)$.

È immediato verificare che la definizione è indipendente dalla scelta del punto P e inoltre se $r \perp s$ si ha pure $s \perp r$ (proprietà *simmetrica* della relazione di perpendicolarità).

Possiamo ora introdurre l'importante nozione di *perpendicolarità tra retta e piano*. A questo fine è necessario premettere il seguente fondamentale teorema.

Teorema 6. *Sia r una retta, P un suo punto e α un piano con $P \in \alpha \not\supset r$. Se a, b sono rette distinte tali che $a, b \subset \alpha$, $\{P\} = a \cap b$, $a \perp r$, $b \perp r$ allora per ogni retta $s \subset \alpha$ si ha pure $s \perp r$.*

Sulla base di questo teorema è possibile assegnare la seguente definizione.

Definizione. Una retta r è detta *perpendicolare* ad un piano α, e scriveremo $r \perp \alpha$, se esistono due rette non parallele $a,b \subset \alpha$ tali che $r \perp a$ e $r \perp b$.

Sempre in base al teorema 6 si possono facilmente dimostrare le seguenti proposizioni.

Teorema 7. *i) Teorema delle tre perpendicolari.*
ii) Esistenza e unicità del piano α passante per un punto P e perpendicolare ad una retta r assegnati (scriveremo $(P \perp r) := \alpha$ senza pericolo di confusione con il simbolo analogo introdotto dopo il teorema 5; infatti nello spazio non vi è una sola retta che passa per P ed è perpendicolare ad r, ma la totalità di tali rette costituisce un piano: il piano α, appunto).

iii) Se r, s sono rette e α, β *sono piani si ha*:
$\alpha \perp r,\ \beta \perp r \Rightarrow \alpha \,//\, \beta,$
$r \perp \alpha,\ s \perp \alpha \Rightarrow r \,//\, s,$
$r \perp \alpha,\ r \,//\, s \Rightarrow s \perp \alpha,$
$r \perp \alpha,\ \alpha \,//\, \beta \Rightarrow r \perp \beta,$
$r \perp s,\ s \perp \alpha \Rightarrow r \,//\, \alpha.$
iv) Esistenza e unicità della retta r passante per un punto P e perpendicolare ad un piano α*, assegnati*. (Scriveremo: $(P \perp \alpha) := r$).

È comodo estendere la nozione di angolo anche al caso di una coppia retta-piano.

Definizione. Sia α un piano ed r una retta non parallela e non perpendicolare ad α. Detti P,R,R' tre punti tali che $\{P\} := r \cap \alpha$, $R \in r \setminus \{P\}$, $\{R'\} := (R \perp \alpha) \cap$ $\cap\ \alpha$, è detto *angolo formato dalla retta r e dal piano* α, e lo indicheremo con il simbolo $(\widehat{r,\alpha})$, l'angolo $(\widehat{\overrightarrow{P,R}\ ;\ \overrightarrow{P,R'}})$.

Osserviamo che la definizione è evidentemente indipendente dalla scelta del punto R su r.

IV - Angoli diedri e angoloidi

1. LE DEFINIZIONI

La nozione di *angolo diedro* o, semplicemente, *diedro*, estende al caso dei piani la classica nozione di angolo di due rette.

Definizione. Si chiama *diedro* una coppia di semipiani ($\overrightarrow{r,A}$), ($\overrightarrow{r,B}$) aventi lo stesso *bordo* r. I due semipiani sono dette *facce* del diedro, la retta r *spigolo* del diedro. Indicheremo tale diedro con il simbolo ($\overrightarrow{r,A} \,\hat{;}\, \overrightarrow{r,B}$), oppure $\sphericalangle$ ($\overrightarrow{r,A}$; $\overrightarrow{r,B}$) oppure ancora $(A, \hat{r}, B)$.

Definizione. Se ρ è un piano perpendicolare alla retta r, posto $\{R\} := r \cap \rho$ sia $\overrightarrow{R,A'} := (\overrightarrow{r,A}) \cap \rho$, $\overrightarrow{R,B'} := (\overrightarrow{r,B}) \cap \rho$. L'angolo ($\overrightarrow{R,A'} \,\hat{;}\, \overrightarrow{R,B'}$) è detto *sezione normale* del diedro ($\overrightarrow{r,A} \,\hat{;}\, \overrightarrow{r,B}$).

Non è difficile dimostrare che al variare del piano ρ, perpendicolare ad r, *tutte le sezioni normali sono tra loro congruenti*.

Questo ci permette di estendere ai diedri la classica terminologia già introdotta per gli angoli: parleremo quindi di *diedro retto, acuto, ottuso, piatto,* etc. In particolare diremo che due piani α, β sono tra loro *perpendicolari*, e scriveremo $\alpha \perp \beta$, se essi danno luogo a quattro diedri retti.

Due diedri si diranno *congruenti* se e solo se sono congruenti le loro sezioni normali.

Teorema 1. *Siano P un punto, r una retta e* α, β *piani. Si ha:*
i) $r \perp \alpha,\ r \subset \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$;
ii) $\alpha \perp \beta,\ s = \alpha \cap \beta,\ P \in \beta \Rightarrow (P \perp s)_\beta \perp \alpha$.

Definizione. Sia $(V; A_1, A_2, \ldots, A_n)$ una $(n + 1)$-upla ordinata di punti distinti, a 3 a 3 non allineati, tali che per ogni $i \in \{1,\ldots,n\}$ i punti $A_1, A_2, \ldots, A_{i-2}, A_{i+1}, \ldots, A_n$ appartengono allo stesso semispazio rispetto al piano $\{\overline{V, A_{i-1}, A_i}\}$ (e quindi tra l'altro non appartengono a tale piano; per $i = 1$ conveniamo di porre $A_o := A_n$). Ponendo $\vec{a_i} := \overrightarrow{V,A_i}$ e $a_i := \overline{V,A_i}$ $(i \in \{1, 2, \ldots, n\})$, si dice *angoloide di vertice V* la n-upla ordinata di semirette $(V; \vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n})$, che sarà indicata anche $(V; A_1, A_2, \ldots, A_n)$; le semirette $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}$ sono dette *spigoli*, gli angoli $\sphericalangle (\vec{a_1}, \vec{a_2}), \ldots, \sphericalangle (\vec{a_{n-1}}, \vec{a_n})$ sono detti *facce* mentre $(A_n, \hat{a}_1, A_2), \ldots, \ldots, (A_{n-1}, \hat{a}_n, A_1)$ sono detti i *diedri* dell'angoloide.

In particolare si chiama *angoloide triedro*, o semplicemente *triedro,* un angoloide avente tre spigoli (e quindi tre facce).

2. LA GEOMETRIA DELLA STELLA

Per gli angoloidi in generale, e per i triedri in particolare, sussistono alcune proposizioni che costituiscono una interessante generalizzazione di analoghe proposizioni valide nel caso piano per i poligoni e in particolare per i triangoli.

Teorema 2. *In ogni triedro si ha:*
i) una faccia è minore della somma delle altre due;
ii) la somma delle tre facce è sempre minore di quattro angoli retti.
Questa proposizione si può poi estendere agli angoloidi in generale:

Corollario. *In un angoloide qualsiasi si ha:*
i) una faccia è sempre minore della somma delle rimanenti;
ii) la somma delle facce è sempre minore di quattro angoli retti.

Nella stella di rette e piani è possibile definire una notevole biiezione involutoria tra l'insieme delle rette e quello dei piani, detta *polarità*. Questa in particolare permette di associare ad ogni triedro della stella il corrispondente *triedro polare* che risulta legato al primo da una fondamentale proprietà che ha un ruolo centrale nello studio della geometria dei triedri.

Definizione. Sia $(V;\ A,\ B,\ C)$ un *triedro* i cui *spigoli* sono le semirette $\vec{a} := \overrightarrow{V, A}$, $\vec{b} := \overrightarrow{V, B}$, $\vec{c} := \overrightarrow{V, C}$ e le cui *facce* appartengono ai piani $\alpha := \{\overline{V, B, C}\}$, $\beta := \{\overline{V, A, C}\}$, $\gamma := \{\overline{V, A, B}\}$. Si considerino ora le rette per V perpendicolari rispettivamente ai piani α, β, γ e si definiscano su esse le semirette di origine V che si trovano nel semispazio avente bordo rispettivamente α, β, γ e che contiene il resto del triedro. Precisamente poniamo:
$\vec{a}' := (V\perp\alpha) \cap \overrightarrow{(\alpha, A)}$, $\vec{b}' := (V\perp\beta) \cap \overrightarrow{(\beta, B)}$, $\vec{c}' := (V\perp\gamma) \cap \overrightarrow{(\gamma, C)}$. Il triedro $(V;\ \vec{a}',\ \vec{b}',\ \vec{c}')$ è detto *polare* del triedro $(V;\ \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}) = (V;\ A,\ B,\ C)$.

Teorema 3. *Se il triedro* $(V;\ \vec{a}',\ \vec{b}',\ \vec{c}')$ *è polare del triedro* $(V;\ \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})$*, il triedro polare di* $(V;\ \vec{a}',\ \vec{b}',\ \vec{c}')$ *è ancora* $(V;\ \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})$. (Diremo che *la polarità è una corrispondenza involutoria*).

Dimostrazione. La retta $(V\perp\{\overline{\vec{a}', \vec{b}'}\})$ è per definizione perpendicolare alle rette che contengono $\vec{a}'$, $\vec{b}'$ e quindi deve appartenere contemporaneamente ai piani α,

β e dunque è la retta $\overline{V,C} = \alpha \cap \beta$. Dobbiamo ora mostrare che nel semispazio di bordo $\{\overline{\vec{a}',\vec{b}'}\}$ che contiene $\vec{c}'$, si trova anche la semiretta $\vec{c}$; infatti si trovano entrambe, per definizione, nello stesso semispazio rispetto al piano $\gamma = \{\overline{\vec{a},\vec{b}}\}$, inoltre l'angolo $\sphericalangle(\vec{c},\vec{c}')$ è acuto poiché $\vec{c}'\perp\gamma$ e, di più, $\vec{c} \subset \overline{V, C} = (V\perp\{\overline{\vec{a}',\vec{b}'}\})$. Allora $\vec{c} = (V\perp\{\overline{\vec{a}',\vec{b}'}\}) \cap \{\{\overline{\vec{a}', \vec{b}'}\}, \vec{c}'\}$.

Le stesse considerazioni valgono anche per gli altri spigoli.

Teorema 4. *Sia* $\delta = (\overrightarrow{r,A}\,\widehat{;}\,\overrightarrow{r,B})$ *un diedro tale che* $B \notin \{\overline{r,A}\}$ *e sia* $P \in r$. Posto $\alpha := \{\overline{r,A}\}$, $\beta := \{\overline{r,B}\}$, $\vec{a} := (P\perp\alpha) \cap (\overrightarrow{\alpha,B})$, $\vec{b} := (P\perp\beta) \cap (\overrightarrow{\beta,A})$, *l'angolo* $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$ *è supplementare della sezione normale del diedro* δ.

Dimostrazione. Detto $\gamma := (P\perp r)$ sia $\vec{a}' := (\overrightarrow{r,A}) \cap \gamma$, $\vec{b}' := (\overrightarrow{r,B}) \cap \gamma$, l'angolo $\sphericalangle(\vec{a}',\vec{b}')$ costituisce quindi una sezione normale del diedro assegnato δ. Dobbiamo dimostrare che $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) \equiv \sphericalangle(\vec{a}',\vec{b}')$ ovvero $\sphericalangle(\vec{a},\bar{\bar{\vec{b}}}) \equiv \sphericalangle(\vec{a}',\vec{b}')$.
Per come sono state scelte le semirette $\vec{a}'$, $\vec{b}'$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ si ha che $\sphericalangle(\vec{a},\vec{a}') \equiv \sphericalangle(\vec{b},\vec{b}') \equiv 1$ (angolo retto).
Se $\sphericalangle(\vec{a}',\vec{b}')$ è ottuso allora $\vec{a}$, $\vec{b}$ sono contenute nella regione angolare $\sphericalangle[\vec{a}',\vec{b}']$ e inoltre $\vec{b} \subset \sphericalangle[\vec{a},\vec{a}']$; allora è pure $\vec{a}' \subset \sphericalangle[\vec{b},\bar{\bar{\vec{b}}}']$ e quindi $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) + \sphericalangle(\vec{b},\vec{a}') \equiv \sphericalangle(\vec{a},\vec{a}') \equiv$ $\equiv 1$ (retto) $\equiv \sphericalangle(\vec{b},\bar{\bar{\vec{b}}}') \equiv \sphericalangle(\vec{b},\vec{a}') + \sphericalangle(\vec{a}',\bar{\bar{\vec{b}}}')$ e in conclusione $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) \equiv \sphericalangle(\vec{a}',\bar{\bar{\vec{b}}}')$.
Se invece $\sphericalangle(\vec{a}',\vec{b}')$ è acuto allora $\vec{a}' \subset \sphericalangle[\vec{b},\vec{b}']$ e $\vec{b}' \subset \sphericalangle[\vec{a},\vec{a}']$ e quindi con ragionamento analogo $\sphericalangle(\vec{a}',\vec{b}') \equiv \sphericalangle(\vec{a},\bar{\bar{\vec{b}}})$.

Dai Teoremi 3 e 4 consegue immediatamente il seguente:
Teorema 5. *Se due triedi* $(V; \vec{a},\vec{b},\vec{c})$, $(V; \vec{a}',\vec{b}',\vec{c}')$ *sono polari uno dell'altro, le sezioni normali dei diedri di uno di essi sono supplementari delle facce dell'altro.*

Dai Teoremi 2 e 5 si ha:

Teorema 6. *In ogni triedro si ha:*
i) la somma di due diedri è minore del terzo diedro aumentato di due diedri retti;
ii) la somma dei tre diedri è maggiore di due diedri retti.

Possiamo ora introdurre una opportuna *relazione di congruenza* tra triedri e stabilire di conseguenza i relativi *criteri di congruenza*.
Definizione. Due triedri si dicono *congruenti* se le facce e gli angoli diedri del primo sono ordinatamente congruenti con le corrispondenti facce e angoli diedri del secondo.

Teorema 7. (Criteri di congruenza dei triedri).
Due triedri sono congruenti se hanno tra loro ordinatamente congruenti:
i) (F,D,F): due facce e l'angolo diedro compreso; oppure
ii) (D,F,D): una faccia e i due diedri ad essa adiacenti; oppure
iii) (F,F,F): le tre facce; oppure
iv) (D,D,D): i tre diedri.

Se si stabilisce una analogia tra i triedri della stella e i triangoli del piano affine si possono fare corrispondere ai lati e agli angoli dei triangoli rispettivamente le facce e i diedri dei triedri. Da questo punto di vista i primi tre criteri di congruenza per i triedri corrispondono ai tre classici criteri di congruenza dei triangoli.

Il quarto criterio di congruenza per i triedri non ha invece il corrispettivo per i triangoli. Anzi, utilizzando per i triedri concetti analoghi a quelli introdotti per i triangoli, la proposizione (7, iv) si potrebbe esprimere dicendo che *non esistono triedri simili*, cioè *se due triedri sono simili, allora sono anche congruenti*.

Osserviamo che i quattro criteri di congruenza suggeriscono la esistenza di una sorta di simmetria nel ruolo svolto da facce e diedri: in altre parole le quattro proposizioni (7, i)-(7, iv) non sono tra loro indipendenti. Infatti, in forza del Teorema 5, dalle proposizioni (7, i) e (7, iii) si ottengono immediatamente rispettivamente le proposizioni (7, ii) e (7, iv), o viceversa.

Questo fatto illumina in profondità l'importanza della relazione di polarità tra triedri. In particolare possiamo osservare che è legata alla esistenza della relazione di polarità la coincidenza dei concetti di congruenza e similitudine per i triedri.

3. LA GEOMETRIA ELLITTICA

Come abbiamo osservato, la nozione di triedro e le proprietà relative presentano profonde analogie con la geometria del triangolo in un piano euclideo. Tali analogie non sono però complete ma, anzi, ammettono alcune essenziali difformità. Questi fatti ci suggeriscono che è possibile costruire una nuova geometria metrica piana, per certi aspetti analoga e per altri essenzialmente diversa dalla classica geometria euclidea del piano. Tale nuova geometria è la cosiddetta *geometria non-euclidea ellittica* (piana o, meglio, 2-dimensionale).

Per definire gli elementi fondamentali di questa geometria (cioè i "punti" e le "rette") consideriamo la totalità delle rette e dei piani di una stella nell'ordinario spazio euclideo. Indicheremo con Π i "*punti*" e con G le "*rette*" della geometria ellittica; se $V \in P$, sia $[V] := \{r \in R \mid V \in r\}$ la stella di rette dello spazio euclideo $(P, R, //, >, \equiv)$ di sostegno V e sia $\mathcal{E}(V)$ la totalità dei piani di tale spazio passanti per V. Al fine di dare una rappresentazione facilmente intuibile degli insiemi Π e G, consideriamo in $(P, R, //, >, \equiv)$ la superficie Σ di una sfera di centro V; detto γ un suo cerchio massimo, sia Σ' una delle due semisfere determinate su Σ da γ, escluso il bordo γ stesso: supporremo cioè

$$\gamma \not\subset \Sigma' \subset \Sigma \setminus \gamma.$$

Indichiamo ora con γ' la totalità delle coppie di punti di γ diametralmente opposti, cioè poniamo:

$$\gamma' := \{\{Q_1, Q_2\} \mid Q_1, Q_2 \in \gamma,\ Q_1 \neq Q_2,\ V \in \overline{Q_1, Q_2}\}\ .$$

È evidente che esiste una corrispondenza biunivoca ξ tra $[V]$ e l'insieme $\Pi := \gamma' \cup \Sigma'$:

$$\xi : [V] \to \Pi := \gamma' \cup \Sigma' \ ; \ a \to \underline{a} \text{ essendo}$$

$\forall\, a \in [V]$ tale che $a \cap \Sigma' =: \{A\} \neq \emptyset$: $\quad \underline{a} := A$ oppure
$\forall\, a \in [V]$ tale che $a \cap \Sigma' = \emptyset$ e $a \cap \gamma = \{Q_1, Q_2\}$ con $Q_1 \neq Q_2$, $V \in \overline{Q_1, Q_2}$ e quindi $\{Q_1, Q_2\} \in \gamma'$: $\underline{a} := \{Q_1, Q_2\}$.
Assumiamo come insieme G la totalità degli archi di cerchio massimo di Σ tracciati su Σ', completati con l'elemento di γ' costituito dalle intersezioni dell'arco col cerchio γ. Precisamente, indicato per ogni $\alpha \in \mathcal{E}(V) := \{\pi \in \varepsilon \mid V \in \pi\}$, $\underline{\alpha} := \{\underline{a} \mid a \in [V],\ a \subset \alpha\}$ si ha: $G := \{\underline{\alpha} \mid \alpha \in \mathcal{E}(V)\}$.
In base a questa definizione è chiaro che $\gamma' \in G$ e $\gamma' = \underline{\gamma}$.
Possiamo ora riconoscere che l'insieme G soddisfa l'assiona **I1**, cioè, in altre parole, è "ragionevole" chiamare "rette" gli elementi di G.
Siano infatti $\underline{a}, \underline{b} \in \Pi$ due "punti distinti dell'insieme Π". Chiameremo "retta" dei "punti" $\underline{a}, \underline{b}$ l'insieme

$$\overline{\underline{a}, \underline{b}} := \{\underline{r} \in \Pi \mid r \in [V],\ r \subset \{\overline{a,b}\}\} = \{\underline{\overline{a,b}}\} \in G$$

ove si è indicato con $\{\overline{a,b}\}$ il piano di $\mathcal{E}(V)$ univocamente individuato dalle rette $a, b, \in [V]$.
Dunque:
I1. *per due "punti' distinti di Π passa esattamente una "retta" di G.*
Viceversa se $\underline{\alpha}, \underline{\beta} \in G$ sono due "rette" distinte, poiché $\alpha \cap \beta \in [V] \subset R$, si ha:

$$\underline{\alpha} \cap \underline{\beta} = (\underline{\alpha \cap \beta}) := \xi(\alpha \cap \beta)\ .$$

Dunque:

I6. *due "rette" distinte di G si incontrano sempre in un "punto".*

Le proposizioni **I1** e **I6** costituiscono gli assiomi di incidenza della geometria non-euclidea ellittica (Π, G).

A questi si può aggiungere anche la proposizione **I4'** che è chiaramente verificata dalla coppia (Π, G).

Le "rette" della geometria (Π, G) differiscono dalle rette della geometria euclidea non solo a causa della proprietà espressa da **I6**, ma anche per le loro proprietà rispetto alla nozione di ordinamento. Non vale infatti sulle “rette” di G l’assioma **O1** poiché su tali rette si può definire solo un *ordinamento circolare*, esattamente come avviene nel fascio di rette del piano euclideo.

Non potendo definire sulle rette di G un ordinamento analogo a quello del piano (o dello spazio) euclideo, non si possono definire analoghe nozioni di segmento, semiretta e semipiano. È possibile tuttavia assegnare una opportuna definizione di *congruenza* tra coppie di punti e, analogamente, una definizione di *angolo* e di *congruenza tra angoli*. Ci limiteremo per semplicità a riportare le suddette definizioni relativamente agli elementi che appartengono a Σ'.

Per ogni $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d} \in \Sigma' \subset \Pi$ definiamo

$$(\underline{a},\underline{b}) \equiv_E (\underline{c},\underline{d}) \text{ sse } (\underline{a}, \widehat{V}, \underline{b}) \equiv (\underline{c}, \widehat{V}, \underline{d}),$$

ove il simbolo “$\equiv_E$” indica la *congruenza ellittica* tra le coppie di punti di Π mentre $(\underline{a}, \widehat{V}, \underline{b})$, $(\underline{c}, \widehat{V}, \underline{d})$ sono angoli definiti nello spazio euclideo che contiene la sfera Σ.

Per ogni $\underline{a},\underline{b} \in \Sigma' \subset \Pi$ definiamo *segmento ellittico* l’arco di cerchio massimo dato da:

$$[\underline{a},\underline{b}] := \{\underline{r} \in \Sigma' \mid r \in [V], r \subset [\underline{a}, \widehat{V}, \underline{b}]\}$$

essendo $[\underline{a}, \widehat{V}, \underline{b}]$ la *regione angolare* delimitata dall’angolo $(\underline{a}, \widehat{V}, \underline{b})$.

Per ogni coppia di punti distinti $\underline{a},\underline{b} \in \Sigma' \subset \Pi$ chiamiamo semi-retta ellittica l’insieme

$$\overrightarrow{\underline{a},\underline{b}} := \{\underline{r} \in \Pi \mid r \in [V], r \subset (\overrightarrow{a,\underline{b}})\}$$

ove con $(\overrightarrow{a,\underline{b}})$ abbiamo indicato, come al solito, il semi-piano di bordo $a \in [V] \subset R$, che contiene il punto $\underline{b} \in \Sigma'$.

Per ogni terna di punti distinti $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \Sigma' \subset \Pi$ definiamo quindi *angolo* $(\underline{b}, \hat{\underline{a}}, \underline{c})$ della geometria ellittica, la coppia di semi-rette ellittiche $(\overrightarrow{\underline{a},\underline{b}} \,;\, \overrightarrow{\underline{a},\underline{c}})$. Possiamo allora definire *congruenti* due angoli siffatti se e solo se sono tali i diedri dello spazio euclideo che li generano. Precisamente si ha, per ogni $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{a}_1,\underline{b}_1,\underline{c}_1 \in \Sigma' \subset \Pi$,

$$(\underline{b}, \hat{\underline{a}}, \underline{c}) \equiv_E (\underline{b}_1, \hat{\underline{a}}_1, \underline{c}_1) \text{ sse } \widehat{(\overrightarrow{a,\underline{b}} \,;\, \overrightarrow{a,\underline{c}})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{a_1,\underline{b}_1} \,;\, \overrightarrow{a_1,\underline{c}_1})}$$

Nella geometria ellittica (Π,G) possiamo ora precisare la nozione di triangolo, e studiarne le proprietà. Siano $\underline{a},\underline{b},\underline{c} \in \Sigma' \subset \Pi$ non allineati; diremo che tali punti costituiscono i *vertici* di un triangolo $\Delta(\underline{a},\underline{b},\underline{c})$, i cui *lati* sono i *segmenti ellittici* $[\underline{a},\underline{b}]$, $[\underline{b},\underline{c}]$, $[\underline{c},\underline{a}]$ e i cui *angoli* sono $(\underline{b},\widehat{\underline{a}},\underline{c})$, $(\underline{a},\widehat{\underline{b}},\underline{c})$, $(\underline{b},\widehat{\underline{c}},\underline{a})$. Al triangolo $\Delta(\underline{a},\underline{b},\underline{c})$ corrisponde nella stella $[V]$ dello spazio euclideo il *triedro* $(V,\underline{a},\underline{b},\underline{c})$ le cui *facce* generano i lati e i cui *diedri* generano gli angoli del triangolo stesso.

È chiaro da quanto detto che i criteri di congruenza tra triangoli della geometria ellittica (Π,G) coincidono con i criteri di congruenza tra triedri dello spazio euclideo. Inoltre poiché sappiamo misurare l’ampiezza delle facce e dei diedri di un triedro, possiamo attribuire tale misura anche ai rispettivi lati e angoli del triangolo (basta supporre che la sfera Σ abbia raggio unitario).

Ricordando le proprietà di triedri e angoloidi espresse dai teoremi del paragrafo precedente, possiamo enunciare le seguenti proprietà di triangoli e poligoni della geometria ellittica.

Dai teoremi 2 e 6 si ha:

Teorema 8. *In ogni triangolo della geometria ellittica:*
i) un lato è minore della somma degli altri due;
ii) la somma dei tre lati è minore di quattro angoli retti;
iii) la somma dei tre angoli è maggiore di due angoli retti.

La proposizione (8, i) esprime, in sostanza, la *disuguaglianza triangolare* relativa alla nozione di distanza subordinata nell'insieme Π dalla relazione di congruenza ellittica precedentemente introdotta. Per questa ragione la geometria ellittica può essere considerata come un caso particolare di geometria metrica.
La proposizione (8, iii) differisce dalla classica proposizione euclidea che afferma "*la somma degli angoli di un triangolo è uguale a due angoli retti*".
Se $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ sono rispettivamente le ampiezze degli angoli di un triangolo della geometria ellittica e π è l'ampiezza di due angoli retti, si chiama *eccesso angolare* il numero $(\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} - \pi)$.
Dal teorema 7 si ha:

Teorema 9. (Criteri di congruenza dei triangoli per la geometria ellittica).
Due triangoli sono congruenti se hanno tra loro ordinatamente congruenti:
i) (L,A,L) due lati e l'angolo compreso; oppure
*ii) (A,L,A) un lato e due angoli adiacent*i; oppure
iii) (L,L,L) tre lati; oppure
iv) (A,A,A) tre angoli.

La proposizione (9, iv) ci dice che in geometria ellittica le nozioni di *similitudine* e di *congruenza* coincidono.
Le isometrie C della geometria ellittica (Π,G) sono tutte e sole le trasformazioni indotte dalle isometrie dello spazio euclideo in cui è immersa la sfera Σ, che mutano Σ in sé.
Indichiamo con $M(V)$ il gruppo delle isometrie della stella $[V]$. Per ogni $\varphi \in$ $\in M(V)$ poniamo:

$$\varphi_E : \Pi \to \Pi \; ; \underline{a} \to \underline{a}' := \underline{\varphi(a)}$$

Si verifica immediatamente che ogni φ_E è una biiezione che trasforma rette di G in rette di G e che conserva la relazione di congruenza ellittica.

Si ha dunque:

$$C = \{\varphi_E \mid \varphi \in M(V)\} \; .$$

V - I poliedri

1. I POLIEDRI CONVESSI

La nozione di poliedro generalizza nel caso della geometria dello spazio la nozione piana di poligono.

Parlando di poliedri è opportuno distinguere tra il contorno, o *superficie poliedrica* e la porzione di spazio delimitata dalla detta superficie, che diremo anche *poliedro pieno*, o, più semplicemente, *poliedro*.

Definizione. Si chiama *superficie poliedrica* un insieme di punti dello spazio formato dall'unione di un numero finito di poligoni piani convessi, che due a due appartengono a piani distinti e che, se si intersecano, hanno in comune o un vertice o un lato.

Sono esempi di superfici poliedriche le superfici laterali e totali dei prismi e delle piramidi definite.

I poligoni piani che compongono una superficie poliedrica si dicono *facce*, i loro lati *spigoli* e i loro vertici *vertici* della superficie stessa.

Definizione. Una superficie poliedrica si dice *connessa* se non è unione di due superfici poliedriche non vuote e disgiunte.
Una superficie poliedrica si dice *chiusa* se *ogni suo spigolo appartiene esattamente a due facce distinte*.
Una superficie poliedrica si dice *convessa* se è *chiusa, connessa* e se è lasciata tutta in uno stesso semispazio dal piano di ciascuna sua faccia.

Le superfici totali di una piramide o di un prisma sono superfici poliedriche convesse. Le loro superfici laterali non sono chiuse.

Ci interesseremo nel seguito, salvo esplicito avviso contrario, solamente di superfici poliedriche convesse.

Per ogni spigolo s di una superficie poliedrica convessa Π, l'intersezione dei semispazi in cui le due facce che lo hanno in comune lasciano la superficie è un diedro convesso che contiene Π e che diciamo *diedro* di Π. Per ogni vertice V di Π le semirette degli spigoli di Π uscenti da V sono gli spigoli di un angoloide convesso contenente Π, che chiamiamo *angoloide* di Π. Se una retta interseca una superficie poliedrica convessa la interseca o in un solo punto (che sarà quindi su un suo spigolo) o lungo un segmento di una faccia o in due punti situati su facce distinte.

Definizione. Si chiama *poliedro convesso* l'insieme formato dai punti dei segmenti i cui estremi appartengono a una superficie poliedrica convessa assegnata. La superficie si dice *superficie del poliedro* e i suoi vertici spigoli e facce rispettivamente *vertici, spigoli* e *facce* del poliedro.
Tale poliedro è l'intersezione dei semispazi che hanno per contorno i piani delle facce della superficie e contengono la superficie.

Si osservi che da un vertice di un poliedro escono almeno tre spigoli e ciascun vertice è comune ad almeno tre facce.

Un segmento che unisca due vertici di un poliedro e non sia un suo spigolo si dice una *diagonale* del poliedro.

Osserviamo che ad ogni vertice di un poliedro corrisponde un angoloide, generato dalle semirette dei lati che in esso concorrono; ad ogni spigolo corrisponde un diedro, generato dalle due facce che lo hanno in comune. Essi si dicono *angoloidi* e *diedri* del poliedro.

Prismi e piramidi finiti sono particolari esempi di poliedri.

Teorema. (Eulero)
Sia Π un poliedro convesso, f il numero delle sue facce, s quello dei suoi spigoli, v quello dei suoi vertici; si ha allora:

$$f + v - s = 2 \ .$$

Dimostrazione. Proiettiamo il poliedro Π da un punto P dello spazio su un piano π in modo tale che una faccia F del poliedro venga proiettata in un poligono di π al cui interno si proiettano da P tutti i restanti vertici e spigoli di Π.
Questo si può ottenere prendendo il punto P abbastanza vicino alla faccia F. Si può sempre scegliere P in modo tale che la proiezione risulti biunivoca su vertici e spigoli. Si ottiene così un grafo il cui numero di vertici e spigoli è uguale a quello di Π.
Il numero delle facce di Π è uguale al numero delle componenti connesse di π delimitate dagli spigoli del grafo: la componente illimitata corrisponde alla faccia F di Π, le altre componenti limitate sono in corrispondenza biunivoca con le altre facce di Π.
Operiamo ora certe trasformazioni del grafo che non alterano il valore di $(f + v - s)$. Osserviamo che se sopprimiamo uno spigolo del grafo possono presentarsi due casi:
i) il numero dei vertici non cambia ma diminuisce di uno il numero delle componenti connesse (limitate);
ii) sopprimendo lo spigolo si sopprime anche il vertice che era rimasto estremo di quell'unico segmento ma il numero delle componenti connesse non cambia.

In entrambi i casi, detti f', s', v' il numero di facce, spigoli, vertici, *dopo* l'operazione di trasformazione, si ha rispettivamente nei due casi esaminati:
i) $v'=v,\ s'=s-1,\ f'=f-1 \Rightarrow f'+v'-s'=(f-1)+v-(s-1)=f+v-s$;
ii) $v'=v-1,\ s'=s-1,\ f'=f \Rightarrow f'+v'-s'=f+(v-1)-(s-1)=f+v-s$.
Con un numero opportuno di queste trasformazioni si ottiene infine solo il poligono (chiuso) composto dai vertici e dagli spigoli che sono proiezione di quelli della faccia F.
Il teorema della curva di Jordan ci assicura allora che le componenti connesse in cui π rimane suddiviso sono due e quindi se tale poligono è un n-gono si ha: $v=s=n, f=2$ e quindi

$$f+v-s=2+n-n=2\,.$$

2. I POLIEDRI REGOLARI

Definizione. Un *poliedro convesso* si dice *regolare* se:
i) tutte le facce sono *poligoni regolari*;
ii) tutte le facce sono tra loro *congruenti*;
iii) tutti gli angoloidi sono *congruenti* tra loro;
iv) tutte le figure i cui vertici sono gli estremi (liberi) degli spigoli uscenti da ciascun vertice (*figure al vertice*) sono *poligoni regolari* (*piani*).

Osservazioni
1. La condizione (iii) è equivalente a chiedere che tutte le figure al vertice siano congruenti tra loro. Inoltre le condizioni (iii) e (iv) si possono sostituire con la richiesta che da ciascun vertice esca lo stesso numero di spigoli.
2. Una qualsiasi delle quattro condizioni della definizione consegue dalle altre tre. (Quindi in particolare bastano 3 delle 4 condizioni enunciate).
3. La coppia di condizioni (i) e (iv) è sufficiente per la regolarità del poliedro. Le altre coppie di condizioni non sono invece sufficienti: in particolare non lo sono per esempio le condizioni (i) e (ii).
<u>Controesempio</u>. Il poliedro ottenuto incollando due tetraedri regolari (congruenti) lungo una faccia soddisfa le condizioni (i) e (ii) ma *non* la condizione (iii) perché vi sono vertici da cui escono 3 spigoli e altri da cui ne escono quattro (e quindi non possono essere congruenti tra loro i relativi angoloidi!).
Anche la condizione (iv) non è soddisfatta dalla figura in questione. Infatti la figura al vertice di un vertice da cui escono 4 spigoli è una poligonale non piana, che è equilatera ma non equiangola, cioè non è un poligono regolare.
4. Un tipo di *poliedro regolare* si individua con una coppia (p,q), $p,q \in \mathbb{N}$; $p,q \geq 3$ ove p indica il numero dei lati di ogni faccia e q il numero degli spigoli che escono da ogni vertice.

Teorema. *Sia* Π *un poliedro regolare.*
i) Esiste un punto O (detto centro) equidistante dai vertici del poliedro. Dunque esiste la sfera circoscritta a Π*, di centro O.*
ii) Il centro è equidistante dalle facce del poliedro. Dunque i piani bisettori interni dei diedri del poliedro passano tutti per il centro O e inoltre esiste la sfera inscritta a Π *che è la sfera di centro O e tangente alle facce di* Π.
iii) Il centro è equidistante dagli spigoli di Π. *Dunque esiste una sfera di centro O e tangente agli spigoli di* Π*: essa viene detta sfera interscritta.*

Teorema. *I tipi di poliedri regolari sono al più 5.*

Dimostrazione (i). Sia Π un poliedro regolare di tipo (p,q): le facce sono dunque poligoni regolari di p lati (p-goni) e da ogni vertice di Π escono in totale q facce. Poiché i p-goni regolari hanno gli angoli interni che misurano ciascuno ampiezza $(p-2)\,\pi\,/p$ e in ogni vertice di Π ci sono in totale q di tali angoli si ha

$$q\,[(p-2)\,\pi\,/p] < 2\,\pi$$

poiché il poliedro è convesso e inoltre vale la proprietà che "in un angoloide qualsiasi la somma delle facce è sempre minore di due angoli piatti".
Dunque dividendo per $(2\,\pi\,q)$ si ha:

[1] $$\frac{1}{2}-\frac{1}{p}<\frac{1}{q}\Rightarrow\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}$$

Le soluzioni intere di [1], con la limitazione $p,\ q\ \geq\ 3$ sono tali che:

$$2(p+q) > pq \Rightarrow 2p+2q-pq+4>4 \Rightarrow 4+pq-2p-2q<4 \Rightarrow (p-2)(q-2)<4$$

dunque dovrà essere $(p-2)<4$ e $(q-2)<4$ e quindi:

$p=3 \Rightarrow p-2=1 \Rightarrow q-2=1 \Rightarrow q=3$
oppure $q-2=2 \Rightarrow q=4$
oppure $q-2=3 \Rightarrow q=5$;
$p=4 \Rightarrow p-2=2 \Rightarrow q-2=1 \Rightarrow q=3$;
$p=5 \Rightarrow p-2=3 \Rightarrow q-2=1 \Rightarrow q=3$.

I possibili poliedri sono dunque:

$$(3,3)\ ,\ (3,4)\ ,\ (3,5)\ ,\ (4,3)\ ,\ (5,3)\ .$$

Dimostrazione (ii). Ricordiamo la formula di Eulero: $f+v-s=2$ ove si era posto: f = numero delle facce, v = numero dei vertici, s = numero degli spigoli.
Nel poliedro regolare di tipo (p,q) si ha:
$pf=2s$ poiché ogni faccia ha p lati e ogni spigolo è comune ad esattamente due facce;
$qv=2s$ poiché da ogni vertice escono q spigoli e ogni spigolo termina in esattamente due vertici.

Dunque $f=2s/p,\ v=2s/q$ e quindi

$$2s/p + 2s/q - s = 2 \Rightarrow 1/p + 1/q = (2+s)/2s \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1/p + 1/q = 1/2 + 1/s \Rightarrow 1/p + 1/q > 1/2 \text{ , poiché } s>0 \text{ .}$$

In questo modo si ha nuovamente la [1].

Occorrerebbe ora provare che questi solidi esistono veramente assegnandone una costruzione.
Per quanto abbiamo visto i *poliedri regolari* ammissibili, detti anche *poliedri platonici*, sono:
tetraedro (4 facce che sono triangoli equilateri):

$$p=3 \ , \ q=3 \ , \ f=4 \ , \ v=4 \ , \ s=6 \ ;$$

ottaedro (8 facce che sono triangoli equilateri):

$$p=3 \ , \ q=4 \ , \ f=8 \ , \ v=6 \ , \ s=12 \ ;$$

icosaedro (20 facce che sono triangoli equilateri):

$$p=3 \ , \ q=5 \ , \ f=20 \ , \ v=12 \ , \ s=30 \ ;$$

cubo o *esaedro* (6 facce quadrate):

$$p=4 \ , \ q=3 \ , \ f=6 \ , \ v=8 \ , \ s=12 \ ;$$

dodecaedro (12 facce di pentagoni regolari):

$$p=5 \ , \ q=3 \ , \ f=12 \ , \ v=20 \ , \ s=30 \ .$$

Osservazione. Tra i tipi di poliedri platonici si osservano le seguenti regolarità.
i) Esistono due coppie di tipi di poliedri per le quali si scambiano tra loro i parametri p,q e f,v mentre rimane uguale *s*.
Tali sono il *cubo-ottaedro* $p,q \in \{3,4\};\ f,v \in \{8,6\};\ s=12$ e l'*icosaedro-dodecaedro* $p,q \in \{3,5\};\ f,v \in \{20,12\};\ s=30.$
Tali tipi si chiamano *duali* tra loro. Il *tetraedro è autoduale*.
ii) La dualità si può descrivere in generale come segue. Sia Π un poliedro regolare di *f* facce, ciascuna con *p* lati e *v* vertici, da ciascuno dei quali escono *q* spigoli.
Sia Π' un poliedro i cui vertici sono nel centro delle facce di Π; quindi *v*'=*f*. Ogni faccia di Π ha *p* lati dunque è circondata da altre *p* facce e quindi da ogni vertice di Π' escono *p* segmenti che vanno agli altri vertici, cioè escono *p* spigoli; quindi in conclusione *q*'=*p*.
In ogni vertice di Π concorrono *q* spigoli, cioè *q* facce; allora ogni faccia di Π', che ha i vertici nelle facce di Π che si trovano attorno ad un suo vertice, possiede tanti lati quante sono queste facce che escono dallo stesso vertice di Π; cioè $p'=q$.
Allora si ha pure che le facce di Π' sono tante quanti i vertici di Π (attorno ai

quali sono costruite) e quindi $f' = v$.
Dunque Π' è il poliedro duale di Π. Inoltre Π' è inscritto nella sfera inscritta a Π.
iii) Il duale di Π' è un poliedro Π'' dello stesso tipo di Π.
iv) Se Π è poliedro regolare e Π' il suo duale, una isometria che fissa Π deve necessariamente fissare anche Π'. Allora i gruppi di simmetria di Π e Π' coincidono.

Bibliografia

[1] A.A.V.V. *Enciclopedia delle matematiche elementari*, a cura di L.BERZOLARI, G.VIVANTI, D.GIGLI; vol.II, parte 1ª. Hoepli, Milano 1937.
[2] A.A.V.V. *Piani di studio della scuola secondaria superiore e programmi dei primi due anni. Le proposte della Commissione Brocca*. Studi e Documenti degli Annali della Pubblica Istruzione, vol. 56, Roma 1991.
[3] CHOQUET, G. *L'insegnamento della Geometria*. Feltrinelli, Milano 1969.
[4] COXETER, H.S.M. et. a. (Ed.) *M.C.Escher: Art and Science*. North Holland, Amsterdam 1986.
[5] DIEUDONNÈ, J. *Algebra lineare e geometria elementare*. Feltrinelli, Milano 1970.
[6] FANO, G. *Lezioni di geometria descrittiva*. Paravia, Torino 1914.
[7] HILBERT, D. *Grundlagen der Geometrie*. trad. it.: *Fondamenti della Geometria*. Feltrinelli, Milano 1970.
[8] KARZEL, H., SÖRENSEN, K., WINDELBERG, D. *Einführung in die Geometrie*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1973.
[9] MANARA, C.F., MARCHI, M. Il linguaggio matematico. *Scuola e Didattica*, 16 (1986), 93-97.
[10] MANARA, C.F., MARCHI, M. *L'insegnamento della Matematica*. Editrice La Scuola, Brescia 1993.
[11] MARCHI, M. Geometria elementare nel geopiano. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 4 (1981), 5-78.
[12] MARCHI, M. Aspetti educativi di una presentazione assiomatica della geometria. I, II parte. *Nuova Secondaria*; 6, 8 (1984), 66-69, 81-82.
[13] MARCHI, M. Evoluzione della matematica da scienza di contenuti a scienza di strutture. *Scuola e Didattica*, (ottobre 1985), 46-48.
[14] MARCHI, M. Aspetti educativi di una presentazione assiomatica della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 11 (1988), 497-511.
[15] MARCHI, M. Rigore e verità nell'insegnamento della matematica. *Atti Convegno Internazionale "Cultura Matematica e Insegnamento"*, Firenze 1988, pg.69-80.
[16] MARCHI, M. Intuizione e rigore in geometria. *Atti XVII Convegno Nazionale UMI-CIIM*, Latina 1994. Supplemento al n.8-9 (1995) del *Notiziario della Unione Matematica Italiana*, 103-110.

RISCOPRENDO LA GEOMETRIA DEL TRIANGOLO

Benedetto Scimemi
Università di Padova

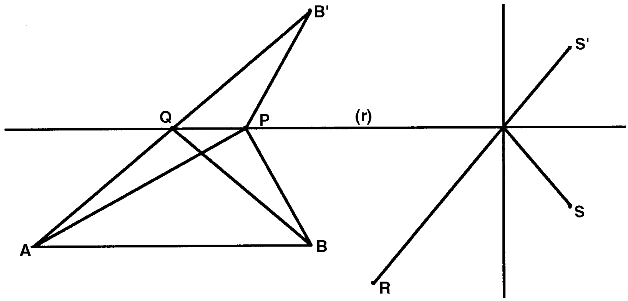
Nella geometria euclidea del piano il *triangolo* è protagonista: fonte inesauribile di problemi, palestra di dimostrazioni più o meno elementari, il triangolo fa la sua comparsa precocemente nei nostri programmi scolastici, ma troppo presto ne scompare, quando si è acquisita poco più che la nomenclatura ma non si è avuto il tempo di raccogliere la ricca messe di risultati che pur sono apprezzabili da parte dei giovanissimi.

L'argomento *trasformazioni geometriche* compare anch'esso assai presto nei programmi, ma non è corredato dalle istruzioni per l'uso. Molti insegnanti si chiedono: ammesso che si trovi il tempo per descrivere le trasformazioni fondamentali (traslazioni, rotazioni, omotetie, ecc.) che cosa dobbiamo poi farcene? come motivare questo lavoro supplementare ed evitare che si tratti dell'ennesimo elenco di nomi superflui?

In questa conversazione mi propongo di rivisitare certi teoremi classici (alcuni sono notissimi) della geometria elementare del triangolo, che portano il nome di grandi geometri del passato (Torricelli, Fagnano, Eulero, Poncelet ecc.), cercando di utilizzare - quando sembrerà conveniente - le similitudini del piano. Questo metodo rende spesso le dimostrazioni più *intuitive* (non più rigorose) di quelle tradizionali. Così gli argomenti *triangolo* e *trasformazioni* dovrebbero aiutarsi l'uno con l'altro. Le nozioni che daremo per scontate (sia per il triangolo che per le similitudini) sono quelle descritte in un buon libro per la scuola media.

1. PROBLEMI DI MINIMO: USO DI SIMMETRIE ASSIALI

Problema. *Consideriamo l'insieme dei triangoli che hanno una certa base AB e una certa altezza h. Quale tra essi ha perimetro minimo?*



I triangoli in questione hanno il terzo vertice P sulla retta r, parallela ad AB e da essa distante h. Occorre scegliere P in modo che sia minima la somma |AP|+ |PB|. Si consideri il punto B', simmetrico di B rispetto a r. Allora |AP|+|PB|= |AP|+|PB'| e quest'ultimo è minimo quando il percorso APB' è rettilineo. Tracciata la retta per A, B' e intersecatala con r in Q, si applicano le proprietà della simmetria per trovare |AQ|=|QB'|=|QB|. Si conclude :

[1] **tra tutti i triangoli che hanno una certa base e una certa altezza, il triangolo isoscele è quello che ha il perimetro minimo.**

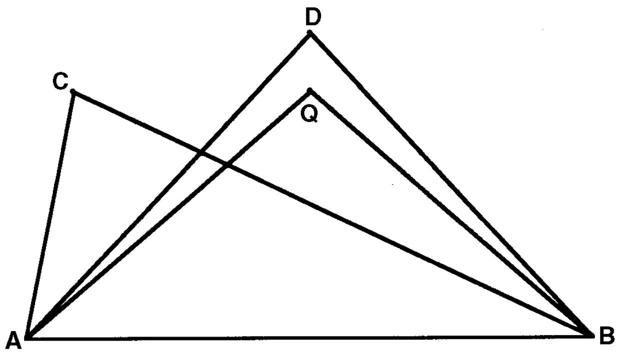
Problema. *Come scegliere la direzione di un raggio luminoso uscente da R in modo che, dopo una riflessione sullo specchio r, arrivi in S?*

Sapendo che la luce percorre percorsi minimi (principio di Fermat) si dimostra che

[2] **il raggio in arrivo e quello riflesso formano con lo specchio angoli eguali** (legge di Cartesio).

Problema. *Consideriamo l'insieme dei triangoli che hanno un certo lato e un certo perimetro. Quale tra essi ha area massima?*

Possiamo derivare la dimostrazione dal teorema precedente.



Siano: ABC un triangolo di base AB, perimetro p, area A.
ABD un triangolo isoscele di base AB, perimetro p, area A^*
ABQ un triangolo isoscele di base AB, perimetro p**, area A.

Per il teorema precedente, p** ≤ p . Confrontando i due triangoli isosceli si ha allora $A \le A^*$ |. Dunque

[3] **tra tutti i triangoli che hanno un certo lato e un certo perimetro, quello isoscele ha area massima.**

2. IL PROBLEMA ISOPERIMETRICO

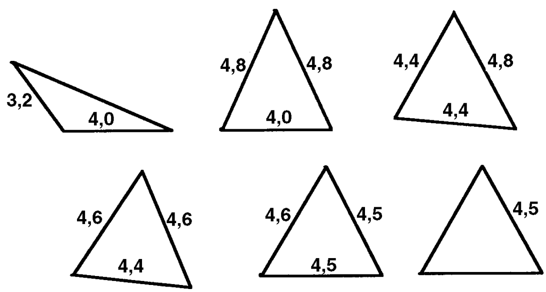
Nel classico problema isoperimetrico ci si chiede: *tra i poligoni di n lati che hanno un certo perimetro, quale ha area massima?* Il caso più semplice è ovviamente quello del triangolo, che ha la seguente prevedibile risposta:

[4] **tra tutti i triangoli che hanno un assegnato perimetro, quello equilatero ha area massima.**

La dimostrazione sembrerebbe a portata di mano applicando [3], ma occorre sapere a priori che un tale massimo esiste. Se invece ci si accinge a costruirlo, si innesca una situazione più complessa. Partiamo dal triangolo T =ABC e sia |AB|= c, |BC|= a, |CA|= b, p = a+b+c. L'area di T sia Δ. Applicando ripetutamente [3], costruiremo una successione di triangoli isosceli T_1 T_2, T_3 … ciascuno di perimetro p, ma di area crescente ($\Delta \leq$) $\Delta_1 \leq \Delta_2 \leq \dots$ Proveremo che le lunghezze dei loro lati vanno avvicinandosi quanto si vuole a p/3, cioè T_n tende, al crescere di n, verso un triangolo equilatero.

Ecco la costruzione

T_1 :	base	c	altri due lati	(a+ b)/2	$= s_1/2$
T_2:	base	$s_1/2$	altri due lati	$(c + s_1/2)/2$	$= s_2/2$
T_3:	base	$s_2/2$	altri due lati	$(s_1/2 + s_2/2)/2$	$= s_3/2$
T_n:	base	$s_{n-1}/2$	altri due lati	$(s_{n-2}/2 + s_{n-1}/2)/2$	$= s_n/2$



Si vede subito che in ogni passaggio da un triangolo al successivo si conservano uno dei lati e il perimetro e dunque l'area non diminuisce. Calcoliamo ora la differenza d_n tra i lati diversi:

$d_1 = c - s_1/2$

$d_2 = (s_2 - s_1)/2 = (c - s_1/2)/2 \qquad = d_1/2$

$d_3 = (s_2 - s_3)/2 = (s_2 - s_1)/4 \qquad = d_1/4$

$d_4 = (s_4 - s_3)/2 = (s_2 - s_3)/4 \qquad = d_1/8$

In generale si trova $d_n \qquad = d_1/2^{n-1}$

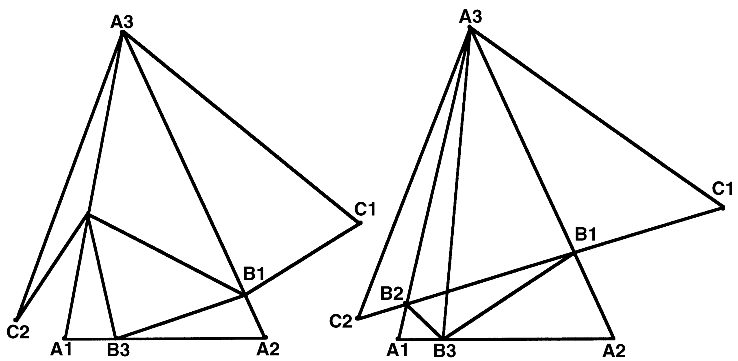
una quantità che diventa piccola quanto si vuole, pur di prendere n abbastanza grande. Così è intuitivo pensare che il triangolo equilatero, di lato p/3, è il *limite* di quella successione, e la sua area è $\Delta^* \geq \Delta_n > \Delta$.

L' argomentazione precedente potrebbe diventare una rigorosa dimostrazione, ma occorrerebbe corredarla con la nomenclatura e le proprietà dei limiti. Esistono naturalmente dimostrazioni alternative (quelle più note utilizzano la formula di Erone e il teorema delle medie aritmetica e geometrica), ma tutte richiedono una certa preparazione di risultati ausiliari. Anche per questo appare veramente notevole - per brevità e autonomia - la risoluzione del prossimo problema che ora esporremo: è un'idea che ebbe L. Fejer nel 1900 .

3. IL PROBLEMA DI FAGNANO

Come si devono scegliere tre punti B_1, B_2, B_3 sui tre lati di un triangolo acutangolo $A_1A_2A_3$ affinchè sia minimo il perimetro del triangolo $B_1B_2B_3$?

Si potrebbe pensare di procedere come sopra: fissati due punti B_1, B_2 (rispett. su A_2A_3 e A_3A_1) cercare la scelta migliore per B_3 su A_1A_2. Poi con la coppia B_2, B_3 cercare un nuovo B_1 che diminuisca il perimetro ecc. Ma questo ci porterebbe ancora una volta a una successione infinita di triangoli. L'idea vincente di Fejer è invece quella di fissare un solo punto B_3 e ottimizzare in un sol colpo le scelte di B_1, B_2. Il problema si suddivide in due sottoproblemi: 1) *Prefissato arbitrariamente il punto B_3 sul lato A_1A_2 , come si debbono scegliere i punti B_1 (sul lato A_2A_3) e B_2 (sul lato A_3A_1) per minimizzare la lunghezza $p=|B_1B_2|+|B_2B_3|+|B_3B_1|$?* 2) Risolto il problema 1, si vedrà che la scelta di B_3 individua gli altri due punti B_1, B_2. *Come si deve scegliere B_3 ?*



Problema 1). Sul lato A_1A_2 si prefissi arbitrariamente il punto B_3. Siano C_2 e rispettivamente C_1 i punti simmetrici di B_3 rispetto alle rette per A_3A_1 e A_3A_2 . Allora p = $|C_1B_1|+|B_1B_2|+|B_2C_2|$. È chiaro che il tragitto più breve si ottiene quando la spezzata $C_1B_1B_2C_2$ è rettilinea, e questo individua i punti B_1, B_2 come intersezioni della retta per C_1C_2 con i lati A_2A_3, A_1A_3. 2) Calcoliamo la lunghezza p. Si ha $|C_1A_3|=|A_3B_3|=|C_2A_3|$ e dunque il triangolo $C_1A_3C_2$ è isoscele. Poichè l'angolo $\angle C_1A_3C_2$ è il doppio di $\angle A_2A_3A_1$ (e quindi è indipendente dalle scelte) la sua base C_1C_2 ha lunghezza minima quando è minima quella dei suoi lati eguali, che a loro volta hanno la lunghezza di A_3B_3. Allora il problema diventa: come scegliere B_3 affinchè sia minima la sua distanza da A_3? Evidentemente, B_3 è il piede dell'altezza per A_3. Con questa scelta di B_3, possiamo scoprire che i punti B_1, B_2 individuati dallo stadio 1 sono anch'essi i piedi delle altezze. Infatti, rifacendo il ragionamento precedente dopo una permutazione dei vertici, si vede che se B_2 non fosse il piede dell'altezza per A_2 il perimetro non potrebbe essere minimo.

Il risultato che abbiamo provato si usa enunciare dicendo:

[5] **tra tutti i triangoli iscritti in un certo triangolo (acutangolo) il triangolo *ortico* è quello che ha perimetro minimo.**

Incidentalmente, dal precedente ragionamento si ottiene un importante risultato che non avevamo perseguito: se i punti B_i sono i piedi delle altezze, la retta per $C_1B_1B_2C_2$ e la retta B_3B_2 sono simmetriche rispetto al lato A_1A_3, dunque anche rispetto all'altezza A_2B_2.

Questa circostanza si può esprimere con le leggi della riflessione, ovvero dei rimbalzi di una sponda elastica, che teoricamente sono le stesse:

[6] **i lati del triangolo ortico si ottengono l'uno dall'altro per riflessione sui lati del triangolo originario**

[7] **in un biliardo triangolare il perimetro del triangolo ortico è un'orbita chiusa**,

cioè si tratta di una traiettoria che una bilia percorre indefinitamente.

Siamo ora in grado di risolvere facilmente anche i seguenti problemi: *in un biliardo rettangolare UVWZ, assegnati due punti A, B come scegliere la traiettoria AP di una bilia che partendo da A rimbalzi prima in P sulla sponda VW, poi sulla sponda UV, per poi colpire il pallino in B? Come sono fatte le orbite chiuse?*

Nella tradizionale geometria del triangolo il risultato [6] si trova normalmente nella forma seguente, che reincontreremo più avanti:

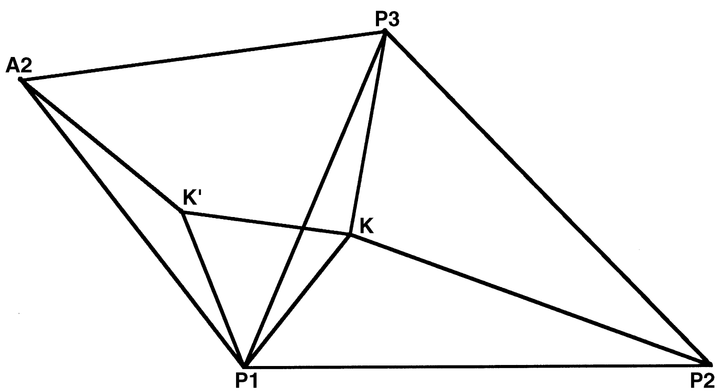
[8] **le altezze di un triangolo (acutangolo) sono le bisettrici del suo triangolo ortico; dunque l'ortocentro del primo è l'incentro del secondo.**

4. ALTRO PROBLEMA DI MINIMO: USO DI ROTAZIONI

I teoremi precedenti ci portano a risolvere un altro famoso problema di minimo :
Problema: *Assegnato un triangolo $P = P_1P_2P_3$, qual è il punto F che rende minima la somma delle distanze dai vertici: $d(F) = |FP_1|+|FP_2|+|FP_3|$?*
La prima soluzione di questo problema è dovuta a Cavalieri e Torricelli. La sua versione più nota è la seguente
[9] **il punto che rende minima la somma delle distanze dai tre vertici di un triangolo è quello che vede i tre lati sotto il medesimo angolo ($2\pi/3$).**

Vi sono modi assai diversi di provare questo risultato. Qui ci proponiamo di fare uso delle rotazioni.

Assegnato il triangolo $T= P_1P_2P_3$, si costruisca, esternamente, un triangolo equilatero $T_3 = P_1P_2A_3$ (cioè in modo che A_3 e P_3 stiano, rispetto al lato P_1P_2, su semipiani opposti) e analogamente si costruiscano i triangoli equilateri $T_1 = P_2P_3A_1$, $T_2 = P_3P_1A_2$. Proviamo anzitutto che F appartiene alle tre rette A_iP_i. Assegnato un qualunque punto K, sottoponiamo il triangolo P_1KP_3 ad una rotazione ρ di ampiezza $\pi/3$, attorno al punto P_1, che porti P_3 su A_2 . Allora, se ρ manda K in K', anche il triangolo P_1KK' è equilatero. Ne segue l'uguaglianza $|A_2K'|+|K'K|+|KP_2| = |KP_3|+|KP_1|+|KP_2|= d(K)$.



La spezzata $A_2K'KP_2$ ha lunghezza minima se è rettilinea, cioè se K e K' appartengono al segmento A_2P_2. Accertato dunque che, nella ricerca del minimo, occorre scegliere K sul segmento A_2P_2, basterà ragionare analogamente con riferimento agli altri vertici del triangolo per concludere che il punto di minimo deve appartenere anche alle rette A_1P_1, A_3P_3. |

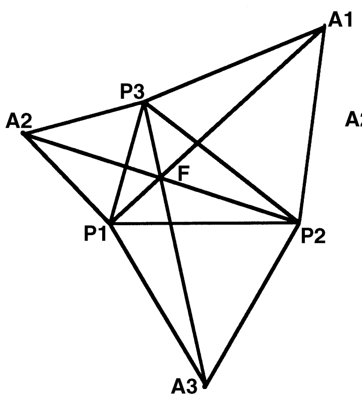
Abbiamo così visto che

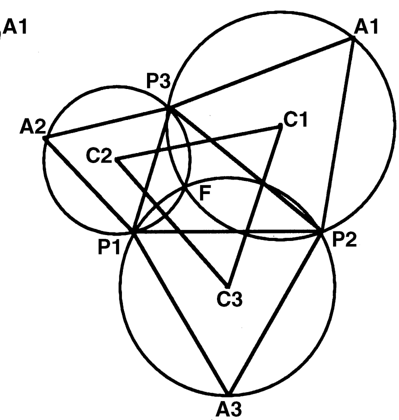
[10] **le tre rette A_1P_1, A_2P_2, A_3P_3 hanno un punto F in comune; la somma delle distanze dai vertici P_1, P_2, P_3 ha un minimo in F, e questo minimo è la lunghezza di ciascuno dei tre segmenti A_iP_i** .

Un'altra costruzione del punto di minimo e la sua caratterizzazione secondo l'enunciato [9] si ottengono ora come segue. Consideriamo le circonferenze C_1 e C_2, circoscritte ai triangoli T_1 e T_2, e sia F la loro intersezione (diversa da P_3). Allora gli angoli $\angle P_1FP_3 = \angle P_3FP_2$ valgono $=2\pi/3$, perché supplementari di $\angle P_1A_2P_3 = \angle P_3A_1P_2 = \pi/3$. Così F vede sotto lo stesso angolo $2\pi/3$ i lati P_2P_3, P_3P_1 e dunque anche il terzo lato P_1P_2 . Ne segue che F appartiene anche alla circonferenza C_3, circoscritta a P_3. Per motivi analoghi risulta $\angle P_1FA_3 = \angle P_1P_2A_3 = \pi/3$, dunque $\angle P_1FP_3$ è supplementare di $\angle P_1FA_3$, cioè i punti A_3, F, P_3 sono allineati. Si conclude che F appartiene alla retta A_3P_3, e analogamente alle A_1P_1, A_2P_2, cioè si tratta del punto di minimo descritto in [9].

Un'appendice al teorema precedente è attribuita a Napoleone Bonaparte (al quale si deve il maggior merito della diffusione della cultura geometrica nelle scuole europee del 19º secolo):

[11] **sui tre lati di un triangolo si costruiscano, esternamente, tre triangoli equilateri. Allora i loro centri sono i vertici di un triangolo equilatero** (detto il *triangolo di Napoleone*).





Siano C_i i centri dei cerchi C_i . Allora segmento FP_3 (che ha per estremi le intersezioni di C_1 e C_2) è perpendicolare al segmento C_1C_2, e analogamente FP_1 è perpendicolare a C_2C_3. Allora $\angle C_1C_2C_3 = \pi/3$ e analogamente $\angle C_2C_3C_1 = \angle C_3C_1C_2 = \pi/3$.

5. RETTA DI EULERO, CERCHIO DEI 9 PUNTI: USO DI OMOTETIE

Un'*omotetia* è caratterizzata da un centro O e da un fattore λ ($\neq 0,1$) . Il generico punto P viene trasformato nel punto P' individuato dalla equazione (vettoriale) $OP' = \lambda \cdot OP$.

In altre parole, i punti P, P' sono allineati con O, dalla stessa parte (se $\lambda>0$) o da parti opposte (se $\lambda<0$), e risulta $|OP'|=|\lambda|\cdot|OP|$. Di conseguenza, un segmento PQ viene trasformato in un segmento parallelo P'Q' di lunghezza $|\lambda|\cdot PQ$. Se è $\lambda > 0$, i segmenti orientati PQ, P'Q' hanno lo stesso verso, altrimenti hanno versi opposti.

Viceversa, se un'omotetia trasforma il segmento PQ nel segmento parallelo P'Q' (non della stessa lunghezza e non allineato con PQ) il centro dell'omotetia si ottiene come intersezione delle rette PP' e QQ' .

Nel triangolo $A=A_1A_2A_3$ sia M_i il punto medio del lato opposto al vertice A_i. Sappiamo che le mediane A_iM_i si incontrano nel *baricentro* G, che cade a un terzo della loro lunghezza. Perciò A_i e M_i sono allineati con G, da parti opposte, l'uno a distanza doppia dell'altro: $GM_i = (-1/2)\, GA_i$. Il triangolo *mediale* $M=M_1M_2M_3$ è dunque immagine di $A=A_1A_2A_3$ secondo l'omotetia di centro G e fattore -1/2. Osserviamo che un'omotetia (poichè rispetta i rapporti tra lunghezze e gli angoli, come ogni similitudine) trasforma l'asse di un segmento PQ nell'asse del segmento trasformato P'Q'. Ciò significa che il circocentro di un triangolo viene trasformato nel circocentro del triangolo immagine. Considerazioni analoghe si possono fare per l'ortocentro ecc.

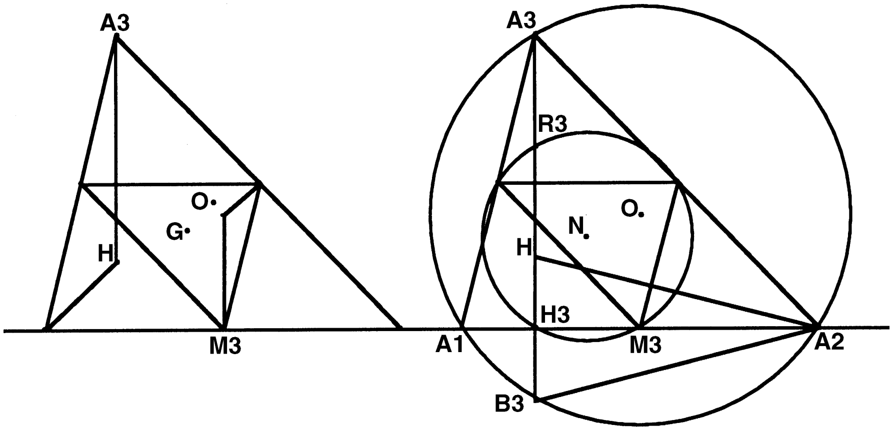
[12] **in un triangolo il baricentro G, l'ortocentro H e il circocentro O sono allineati** (sulla *retta di Eulero*) **e G divide il segmento OH nel rapporto 1:2.**

Infatti le mediane del triangolo mediale $M=M_1M_2M_3$ sono le stesse mediane di A; dunque G è baricentro anche di M. D'altra parte, gli assi di A sono le altezze di M e dunque il circocentro O di A è l'ortocentro di M. Riassumiamo queste osservazioni con i simboli

$$G = G_M \qquad\qquad O = H_A$$

Introduciamo ora l'omotetia γ di centro G e fattore -1/2. Essa trasforma un punto P nel punto P' per cui $GP' = (-1/2)\cdot GP$. Dunque γ trasforma il triangolo A nel triangolo $M = M_1M_2M_3$.

Ora l'omotetia, come si è detto, trasforma l'ortocentro H di A nell'ortocentro $H_M = O$ di M, perciò risulta $GO = (-1/2)\, GH$, cioè appunto O,H sono allineati con G, da parti opposte, e $|HG| = 2|GO|$. |



Siano ora $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ le circonferenze circoscritte ai triangoli A e $\mathcal{M}$. Poichè $\gamma(\mathcal{A}) = \mathcal{M}$, anche $\gamma(\mathcal{B}) = \mathcal{N}$, il raggio di $\mathcal{N}$ è la metà di quello di $\mathcal{B}$ e $\gamma(O)=N$ è il suo centro. Dunque GO = -2 GN. Confrontando con GH = -2 GO si trova che N è il punto medio tra O e H. Con riferimento al prossimo enunciato, dovuto a Poncelet, $\mathcal{N}$ è noto come il circolo dei 9 punti di A.

[13] **il punto medio N tra il circocentro O e l'ortocentro H di un triangolo $\mathcal{A}$ è il centro di una circonferenza $\mathcal{N}$ cui appartengono i seguenti nove punti: i tre punti medi M_i dei lati di $\mathcal{A}$, i tre piedi H_i delle altezze di $\mathcal{A}$, i punti medi R_i tra H e i vertici A_i di $\mathcal{A}$.**

I punti medi M_i appartengono a $\mathcal{N}$ per definizione. Proviamo l'appartenenza a $\mathcal{N}$ degli altri 6 punti. L'altezza A_iH_i di $\mathcal{A}$ incontra la circonferenza $\mathcal{B}$ (oltre che in A_i) anche in un secondo punto B_i. Osserviamo l'uguaglianza degli angoli $\angle A_1A_3B_3 = \angle HA_2A_1$ (i cui lati sono a due a due perpendicolari) e $\angle A_1A_3B_3 = \angle A_1A_2B_3$ (perchè sottesi dall'arco A_1B_3 in $\mathcal{B}$). Ne deduciamo che il triangolo HA_2B_3 è isoscele, e dunque H_3 è il punto medio di HB_3. Lo stesso si ottiene per H_1, H_2 permutando gli indici. Possiamo esprimere questo fatto dicendo che c'è un'omotetia η di centro H e coefficiente $\mu = 1/2$ che manda B_i in H_i . Si trasformi ora la circonferenza $\mathcal{B}$ secondo η; si ottiene una circonferenza il cui raggio è la metà di quello di $\mathcal{B}$ e il cui centro $\eta(O)$ è medio tra H e O. Ma allora, per quanto osservato sopra, $\eta(O)=\mathcal{N}$ e $\eta(\mathcal{B})=\mathcal{N}$. Poichè $\mathcal{B}$ è circoscritta al triangolo $B_1B_2B_3$, anche la sua immagine N è circoscritta al triangolo $H_1H_2H_3$, come si voleva. Quanto ai punti R_i dell'enunciato, basta osservare che η manda A_i in R_i e quindi si tratta ancora di punti di $\mathcal{N}$.

Gli ultimi tre punti (dei nove) non sembrano avere la stessa ... dignità geometrica degli altri sei. Per convincerci del contrario, basterebbe inoltrarci nella *geometria del quadrangolo*, un capitolo poco conosciuto: interpretando infatti $A_1A_2A_3H$ come un (particolare) quadrangolo completo, i nove punti precedenti diventano i sei punti medi dei sei lati e i tre punti *diagonali* (intersezione dei lati opposti); e si vedrebbe che, anche per un quadrangolo qualsiasi, vale un teorema analogo al precedente, pur di sostituire al circolo un'opportuna *conica*. Un'insolita applicazione del teorema dei nove punti ([16]) si troverà anche nel paragrafo che segue.

6. ALTRE SIMILITUDINI: UNA DISUGUAGLIANZA DI EULERO

In un triangolo $A_1A_2A_3$, per ogni vertice A_i passano una bisettrice interna e un bisettrice esterna, tra loro ortogonali. Queste sei rette si incontrano a tre a tre in quattro punti: l'incentro I, intersezione delle tre bisettrici interne, e i tre excentri E_i (i=1,2,3), intersezione della bisettrice interna per A_i con le due bisettrici esterne per A_j e A_h . I quattro punti I, E_1, E_2, E_3, sono (i soli) punti del piano che hanno eguale distanza dalle tre rette che prolungano i lati del triangolo. Ma, tenuto conto dell'ortogonalità, questi stessi punti si possono anche interpretare come i vertici e l'ortocentro di un triangolo, di cui $A_1A_2A_3$ è il triangolo ortico. Precisamente:

[14] **sia A = $A_1A_2A_3$ un triangolo acutangolo e sia E = $E_1E_2E_3$ il triangolo che ha per vertici gli excentri di A. Allora A è il triangolo ortico di E e l'incentro di A è l'ortocentro di E.**

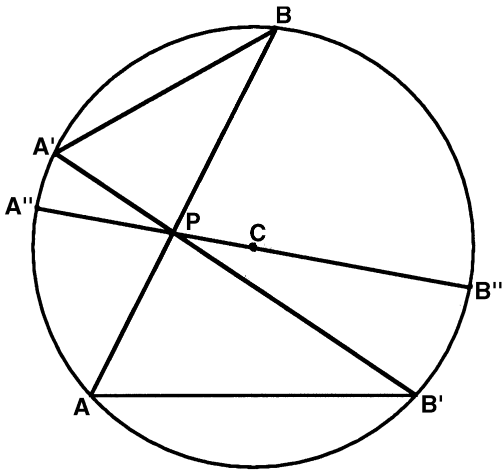
Si può confrontare questo enunciato con [8]. Se il triangolo A non è acutangolo, un analogo enunciato rimane vero, purchè si scambino i ruoli dei punti H, A_i, dove A_i è il vertice dell'angolo ottuso. A proposito di questa interscambiabilità tra vertici e ortocentro, il seguente enunciato è tanto sorprendente quanto semplice da dimostrare:

[15] **Se di quattro punti A_1, A_2, A_3, A_4, uno è ortocentro del triangolo che ha per vertici gli altri tre, allora lo stesso vale per tutti gli altri.**

Combinando [13] e [14], osserviamo che la circonferenza circoscritta a A è il circolo dei nove punti di E. Allora il teorema di Poncelet garantisce, tra l'altro, che:

[16] **i punti medi tra incentro ed excentri di un triangolo appartengono alla sua circonferenza circoscritta.**

Faremo uso tra poco di [16] per dimostrare un altro celebre risultato di Eulero. Ma occorre prima richiamare un'altra osservazione, che riguarda una similitudine di triangoli già segnalata nei libri di Euclide:



[17] **Sulla circonferenza C si considerino i punti A, B, A', B' e si supponga che le rette AB, A' B' si incontrino nel punto P. Allora risulta |PA|· |PB| =|PA'|·|PB'|.**

Infatti, per le solite proprietà degli angoli al cerchio sottesi dalla stessa corda, risultano le seguenti eguaglianze: ∠ ABA' = ∠ AB'A' , ∠ BAB' = ∠ BA'B', e dunque sono simili i triangoli PAB', PA' B. L' uguaglianza del rapporto tra le lunghezze dei corrispondenti lati |PA'|/|PA|= |PB|/ |PB'| si può allora scrivere |PA|· |PB| = |PA'|· |PB'|.

Questo prodotto dipende dunque dal punto P ma è indipendente dalla particolare corda AB; ciò sta alla base della nozione di *potenza* p di un punto P rispetto a un cerchio *C*. In particolare, per calcolare p si può scegliere un diametro A"B" di *C* nel ruolo della corda AB. Indicata con d=|PC| la distanza di P dal centro C di *C* e con R il raggio di *C*, la potenza di P rispetto a *C* è data allora dalla formula

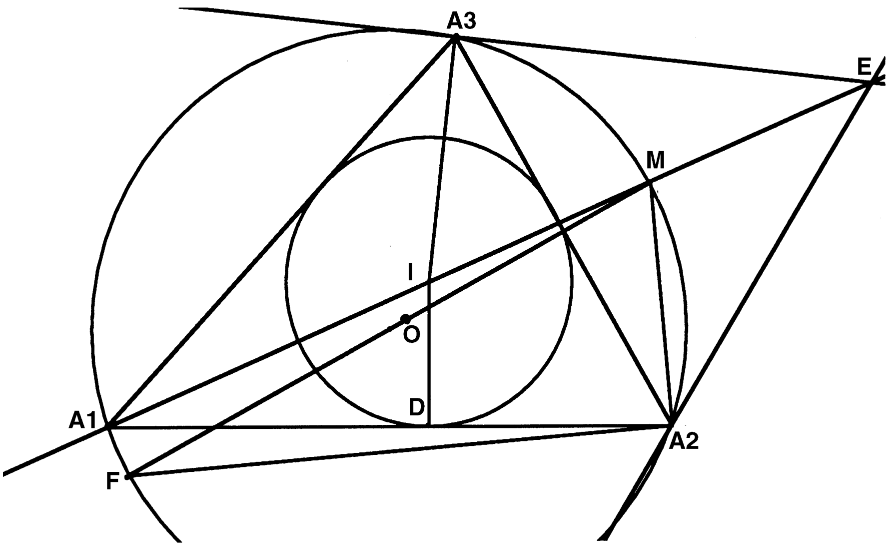
$$p = |PA''| \cdot |PB''| = (R - d) \cdot (R+d) = R^2 - d^2.$$

Abbiamo ora tutti i mezzi per dimostrare il teorema di Eulero:

[18] **in un triangolo siano O il centro (circocentro) ed R il raggio del circolo circoscritto, I il centro (incentro) ed r il raggio di quello inscritto. Allora risulta $|IO|^2 = R^2 - 2Rr$. In particolare, R ≥ 2r.**

Sappiamo da [16] che il punto di mezzo M tra l'incentro I e l'excentro E appartiene alla circonferenza *C* circoscritta al triangolo *A* = $A_1A_2A_3$. Allora M è il centro di una circonferenza che ha IE per diametro e passa per A_2, A_3, perchè sono retti gli angoli $\angle IA_2E$ e $\angle IA_3E$. Allora $|IM|=|A_2M|$. Calcoliamo la potenza di I rispetto alla circonferenza C, con riferimento alla corda A_1M :

$|A_1I|\cdot|IM| = |A_1I|\cdot|A_2M|$. Sia D il punto di contatto del cerchio iscritto sul lato A_1A_2. Sia F il simmetrico di M rispetto al centro O di *C*. Proviamo che i triangoli rettangoli FA_2M e A_1DI sono simili. Infatti $\angle IA_1D = \angle MA_1A_2 = \angle MFA_2$ perchè sottesi dalla corda A_2M. Dunque si ha $|IA_1|/|MF| = |ID|/|MA_2|$. Questo si riscrive $|IA_1|/2R = r/|MA_2|$ e dunque, vista l'uguaglianza $|IM|=|A_2M|$, la potenza di I vale 2rR. Ma si è visto che la potenza vale anche $R^2 - |IO|^2$. Ne segue, come volevamo, $|IO|^2 = R^2 - 2Rr$.



È facile vedere che l'uguaglianza R = 2r si verifica solo nel triangolo equilatero. La disuguaglianza $R \geq 2r$ è invece il caso particolare di una disuguaglianza scoperta molto più recentemente:

[19] **se $A_1A_2A_3$ è un triangolo e P un punto qualunque, la somma delle distanze di P dai vertici non è minore del doppio della somma delle distanze di P dai lati.**

Questo teorema, dimostrato per la prima volta nel 1937 da Mordell, fu pochi anni dopo ridimostrato elementarmente, facendo un uso opportuno delle riflessioni, un po' come nei nostri primi esempi.

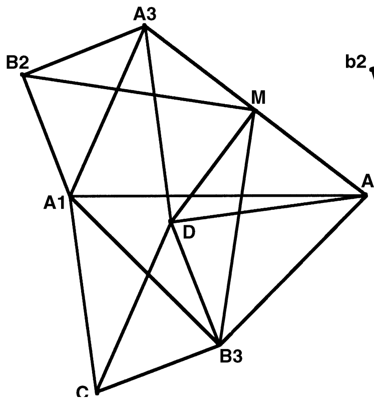
ADDENDUM (1 /12/1995)

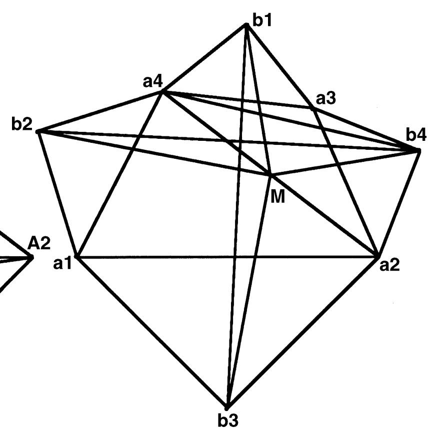
Al termine della conversazione con i partecipanti al corso del MPI a Viareggio, in cui avevo esposto alcuni dei precedenti risultati, il collega Massimo Galuzzi mi sottopose il seguente enunciato, di cui aveva ottenuto e illustrato ai corsisti una facile dimostrazione per via analitica, usando il PC per le manipolazioni algebriche:

Su due lati opposti di un quadrilatero si costruiscano (esternamente) due quadrati, e si consideri il segmento che ha per estremi i centri dei due quadrati. Partendo dagli altri due lati si costruisca un analogo segmento. Allora i due segmenti sono perpendicolari .

Come produrne una dimostrazione sintetica? Non fui allora in grado di rispondere, e solo a distanza di qualche giorno trovai una dimostrazione elementare ma poco interessante, che coinvolgeva un gran numero di angoli e di reciproche relazioni. Più recentemente ho invece ritrovato il medesimo problema tra gli esercizi del Coxeter (1), corredato da una traccia di dimostrazione per noi assai più interessante, perchè basata sull'uso delle trasformazioni geometriche, e precisamente delle rotazioni . Data la pertinenza dell'argomento, e le analogie con il metodo del § 4, ritengo opportuno svilupparne qui i dettagli. La dimostrazione del primo lemma è già nel suo enunciato:

Lemma 1. Sia $A_1A_2A_3$ un triangolo e si orienti il piano in modo che la rotazione $A_1 \to A_2 \to A_3$ sia positiva . Sui suoi lati si costruiscano tre quadrati, uno internamente (su A_2A_3) e due esternamente (su A_3A_1 e su A_1A_2), e siano rispettivamente D, B_2, B_3 i loro centri. Sia poi C ottenuto da D per rotazione di un angolo $\pi/2$ (in verso positivo) attorno a B_3. Allora componendo la rotazione $-\pi/2$ attorno a D con la rotazione precedente si ottiene una traslazione che manda DA_3 in CA_1.





Perciò A_1A_3DC è un parallelogramma.

Lemma 2. Sia A_1A_3DC un parallelogramma. Su 3 dei suoi lati A_1A_3, A_3D, DC, si costruiscano tre quadrati (esternamente) e siano rispettivamente B_2, M, B_3 i loro centri. Allora il segmento B_3M si ottiene da B_2M per rotazione di $\pi/2$ attorno a M.

Se infatti A_2 è il simmetrico di A_3 rispetto a M, dal Lemma 1 risulta che ruotando di un angolo retto attorno a M si trasformano A_3 in D, A_3B_2 in DB_3, MA_3 in MD, quindi anche B_2M in B_3M.|

[20] **Sia $A_1A_2A_3A_4$ un quadrangolo. Sui 4 lati A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 si costruiscano quattro quadrati (esternamente) e siano rispettivamente B_3, B_4, B_1, B_2 i loro centri. Se M è il punto medio di A_2A_4 allora la rotazione di un angolo retto attorno a M trasforma B_4B_2 in B_1B_3.**

Infatti, se M è il punto medio di A_2A_4, applicando i lemmi precedenti ai triangoli $A_1A_2A_4$ e rispettivamente $A_3A_2A_4$ (e ai parallelogrammi da essi individuati) si trova che la rotazione di $\pi/2$ attorno a M trasforma B_2M in B_3M, B_4M in B_1M, quindi anche B_2B_4 in B_3B_1.|

Si osservi che, oltre all'enunciato originario, abbiamo provato che i due segmenti in questione hanno la stessa lunghezza. Per analogia con il teorema di Cavalieri-Torricelli, ci si potrebbe chiedere se esista una ragionevole funzione del quadrangolo per cui quella lunghezza $|B_2B_4|=|B_1B_3|$ possa interpretarsi come un minimo.

BIBLIOGRAFIA

(1) COXETER, H.S.M. *Introduction to Geometry*, J.Wiley, New York, 1961
(2) KAZARINOFF, N.D. *Disuguaglianze geometriche*, Zanichelli, 1973.

ELENCO DEI PARTECIPANTI

Bassignana Gabriella - Istituto d’Arte di Aosta - Aosta
Mattello Francesco - I.S.A. “A. corradini” - Este (PD)
Boiti Aldo - I.S.A. “E.E.U. Nordio” - Trieste
Brandi Carmela - I.S.A. “P. Mercuri” - Marino (Roma)
Gargani Gianfranco - L. Artistico “P. Aldi” - Grosseto
Giambolini Celio - I.S.A. “B. di Betto” - Perugia
Iarrera Domenica - I.S.A. - Milazzo (ME)
Lietz Olga - I.S.A. - Cetrara (CS)
Mendella Giovanna - I.S.A. “V. Boccioni” - Napoli
Peraio Renato - I.S.A. Roma II - Roma
Suria Paola - L.S.S. ‘C. Cattaneo” - Torino
Giovannotti Laura - L.CL.S. “Virgilio” - Mantova
Carlotti Maura - L.S.S. “Calini” - Brescia
Lo Nardo Stefano - L.S.S. “N. Copernico” - Udine
Garuti Nadia - L.S.S. “M. Fanti” - Carpi (MO)
Moliterni Giacinta - Ist. Mag. S. “T. Stigliani” - Matera
Brambilla Maura - L.CL.S. “V. Emanuele II” - Jesi (AN)
Crespina Elena - L.S.S. “E. Majorana” - Roma
Nobili Maria Alba - L.C. “Tacito’ - Terni
Di Paolo Cinzia - I.M. “M.T. Varrone” - Cassino (FR)
Zoccante Sergio - L.S. “G.B. Quadri” - Vicenza
Bernecoli Sandra - L.S. “P. Paleocapa” - Rovigo
Romeni Claudio - L.S. “A. Issel” - Finale Ligure (SV)
Bianchini Silvana - L.S. “B. Varchi” - Montevarchi (AR)
Scarpino Gianfranco - I.T.I. “A. Monaco” - Cosenza
Mauro Raffaele - I.T.C. “Bianchini” - Terracina (LT)
Dessi Roberto - I.T.C. “P. Colli Vignarelli” - Sanluri (CA)
Tazza Caterina - L.S. “G. Galilei” - Terni

NEOLAUREATI

Guliana Bettini,
Maria Cantiello,
Alessia Cupini,
Valentina Del Col,
Lorella Patone,
Roberta Gorni,
Daniela Ippolito,
Anna Maria Ranigoni,
Laura Tomasini,
Maria Grazia Zagabrio.

APPENDICE
1. ELENCO DELLE SCUOLE POLO

Le scuole polo, di cui si pubblica l'elenco, hanno assunto il compito di distribuire i *Quaderni* agli istituti che rientrano nel territorio loro affidato.
I Presidi che non avessero ricevuto tutti i numeri della collana possono pertanto richiederne l'invio alla scuola polo dell'area provinciale di appartenenza.

ELENCO SCUOLE POLO DELLA ZONA - A

LM	SLATAPER	Corso Verdi, 17	Gorizia
LS	TORRICELLI	Via Udine 7	Maniago (PN)
LC	PETRARCA	Via Rossetti, 74	Trieste
IM	PERCOTO	Via Pier Silverio Leicht, 4	Udine
IM	GOBETTI	Via Istituto Tecnico, 1	Genova-Sampierdarena
IM	AMORETTI	Piazzetta G.B. De Negri, 2	Imperia
IM	MAZZINI	Viale Aldo Ferrari, 37	La Spezia
IM	G. DELLA ROVERE	Via Monturbano, 8	Savoia
IM	G. FALCONE	Via Dunant, 1	Bergamo
LS	CALINI	Via Monte Suello 2	Brescia
LS	GIOVIO	Via P. Paoli, 38	Como
LC	MANIN	Via Cavallotti, 2	Cremona
IM	TENCA	Bastioni Porta Volta, 16	Milano
LS	MAJORANA	Via Ratti, 88	Rho (MI)
IM	PARINI	Via Gramsci, 17	Seregno (MI)
LC	VIRGILIO	Via Ardigò, 13	Mantova
IM	CAIROLI	Corso Mazzini, 7	Pavia
LS	NERVI	Piazza S. Antonio	Morbegno (SO)
LS	LUINO	Via Lugano, 24	Luino (VA)
IM	SALUZZO	Via E. Faà di Bruno, 85	Alessandria
IM	MONTI	Piazza Cagni, 2	Asti
IM	LEONARDO DA VINCI	Piazza S. Francesco, 1	Alba (CN)
IM	BELLINI	Baluardo La Marmora	Novara
LS	GRAMSCI	Colle Bella Vista	Ivrea (TO)
LS	GOBETTI	Via M. Vittoria, 39 bis	Torino
IM	ROSA STAMPA	Corso Italia, 48	Vercelli
IM	PASCOLI	Via M. Longon, 3	Bolzano
LC	VON DER VOLGELWIDE	Via A. Diaz, 34	Bolzano
LS	LEONARDO DA VINCI	Via Giusti, 1/1	Trento
IM	BINEL	Via Francheté, 111	Verres (AO)
LC	TIZIANO	Via Cavour, 2	Belluno
IM	AMEDEO DI SAVOIA	Via del Santo	Padova

IM	ROCCATI	Via Carducci, 8	Rovigo
LC	CANOVA	Via Mura S. Teonisto, 16	Treviso
IM	STEFANINI	Via Miglio	Venezia - Mestre
LC	G. B. BROCCHI	Via Beata Giovanna, 67	Bassano del Grappa
IM	VERONESE	Via Fiume, 61/B	San Bonifacio (VR)

ELENCO SCUOLE POLO DELLA ZONA - B

LC	D. COTUGNO	Portici del Liceo	L'Aquila
IM	ISABELLA GONZAGA	Via dei Celestini	Chieti
IM	MARCONI	Via M. Da Caramanico, 6	Pescara
IM	MILLI	Via G. Carducci	Teramo
LS	COPERNICO	Via F. Garavaglia, 11	Bologna
LC	ARIOSTO	Via Arianuova, 19	Ferrara
LS	RIGHI	Piazza Aldo Moro, 76	Cesena (FO)
LS	FANTI	Viale Peruzzi, 7	Carpi (MO)
LC	GIOIA	Viale Risorgimento, 1	Piacenza
LC	C/O C.N. MARIA LUIGIA	Via Lalatta, 14	Parma
LS	RICCI CURBASTRO	Viale degli Orsini, 8	Lugo (RA)
LS	MORO	Via XX Settembre, 5	Reggio Emilia
IM	REGINA MARGHERITA	Viale Regina Margherita	Anagni (FR)
LS	MAJORANA	Via Sezze	Latina
IM	ELENA PRINC. NAPOLI	Piazza Mazzini, 2	Rieti
LC	MAMIANI	Via delle Milizie, 30	Roma
LS	PEANO	Via Morandini, 38	Roma
SM	MONTESSORI	Via Livenza, 8Roma	
IM	S. ROSA DA VITERBO	Via S. Pietro, 27	Viterbo
LS	LEONARDO DA VINCI	Viale G. Verdi, 23	Jesi (AN)
IM	MERCANTINI	Via Emidio Consorti, 28	Ripatransone (AP)
IM	VARANO	Via Pieragostino, 18	Camerino (MC)
LC	MAMIANI	Via Gramsci, 2	Pesaro
IM	PRINCIPESSA ELENA	Via Trieste, 1	Campobasso
IM	CUOCO	Via G; Leopardi	Isernia
LS	REDI	Via Leone Leoni, 38	Arezzo
LS	C/O C.N. CICOGNINI	Piazza del Collegio, 13	Prato (FI)
IM	ROSMINI	Viale Porciatti, 2	Grosseto
IM	PALLI BARTOLOMEI	Via Maggi, 50	Livorno
LS	VALLISNERI	Via delle Rose, 68	Lucca
IM	MONTESSORI	Via Lunense, 39/B	Marina di Carrara (MS)
LS	BUONARROTI	Via Betti	Pisa
IM	LORENZINI	Via Sismondi, 7	Pescia (PT)
LC	PICCOLOMINI	Prato S. Agostino	Siena
LS	LEONARDO DA VINCI	Via Tusicum	Umbertide (PG)
LC	TACITO	Viale Fratti, 12	Terni

ELENCO SCUOLE POLO DELLA ZONA - C

IM	T. STIGLIANI	Via Lenera, 61	Matera
IM	GIANTURCO	Via Zara	Potenza
LS	FERMI	Via Molinella, 30	Cosenza
LC	GALLUZZI	Via De Gasperi	Catanzaro
IM	GRAVINA	Via Foscolo	Crotone
IM	ALVARO	Via Campanella	Palmi (RC)
IM	CAPIALBI	Via S. Ruba	Vibo Valentia
IM	IMBRIANI	Viale Italia, 2	Avellino
IM	GUACCI	Via Nicola Calandra, 138	Benevento
IM	SALVATORE PIZZI	Piazza Umberto I	Capua (CE)
LC	VICO	Via Salvator Rosa, 117	Napoli
LS	CALAMANDREI	Via Comunale Maranda, 84	Napoli - Barra
IM	SERAO	Via Carducci, 18	Pomigliano d'Arco (NA)
IM	ALFANO I	Via dei Mille	Salerno
LC	TROYA	Via R. Sanzio	Andria (BA)
LS	E. MAJORANA	Via A. Moro, 19	Mola (BA)
IM	PALUMBO	Via A. Grandi, 17	Brindisi
IM	RONCALLI	Piaza Europa	Manfredonia (FG)
LC	CAPECE	Piazza Moro, 37	Maglie (LE)
LC	ARISTOSSENO	Viale Virgilio, 15	Taranto
LS	PACINOTTI	Via Liguria	Cagliari
LS	FERMI	Via Veneto, 45	Nuoro
IM	CROCE	Via G. D'Annunzio	Oristano
IM	CASTELVÌ	Via Manno, 58	Sassari
LS	LEONARDO	Via della Vittoria	Agrigento
LC	RUGGERO SETTIMO	Via Rosso di San Secondo	Caltanissetta
LC	C/O C.N. CUTELLI	Via V. Emanuele II, 56	Catania
IM	CRISPI	Via Padova, 50	Piazza Armerina (EN)
LS	ARCHIMEDE	Viale Regina Margherita, 3	Messina
IM	DE COSMI	Via L. Ruggieri, 15	Palermo
IM	MAZZINI	Via Curtatone	Vittoria (RG)
IM	RAELI	Via Matteo Raeli, 9	Noto (SR)
IM	SALVO	Via Marinella, 1	Trapani

VOLUMI DELLA COLLANA *QUADERNI* GIÀ PUBBLICATI

1 – Gestione e innovazione*
2 – Lo sviluppo sostenibile
3 – La valenza didattica del teatro classico
4 – Il postsecondario per la professionalità*
5 – Dalla memoria al progetto
6 – La sperimentazione della sperimentazione*
7 – L'algebra fra tradizione e rinnovamento
8 – Probabilità e statistica nella scuola liceale
9 – L'Italia e le sue isole
10 – Lingua e civiltà tedesca
11 – La scuola nel sistema polo* (manuale guida)
12 – La "città" dei filosofi
13 – Le città d'Europa
14 – Dal passato per il futuro
15 – Gestione, innovazione e tecnologie*
16 – Per non vendere il cielo
17 – Briser la glace
18 – Dalla lingua per la civiltà
19 – L'insegnamento della geometria

VOLUMI IN CORSO DI PUBBLICAZIONE

20 – Se hace camino al andar
21 – Gli IDEI nel progetto formativo
22 – Il linguaggio dei linguaggi
23 – Tecnologia e disegno
24 – Il Liceo Classico Europeo

matteoni stampatore Lucca
maggio 1997

«Io non credo che si renda omaggio
alla verità e alla giustizia, che della
verità è compagna inseparabile,
se non si riconoscono accanto ai limiti
e alle carenze, non lievi, certamente non
marginali, che a volte toccano la vita
della scuola, anche i meriti e l'impegno,
sempre umile e qualche volta eroico,
dei tanti che nella scuola ci stanno con
fermezza di propositi, con chiarezza di
obiettivi, con sincerità di convinzioni
socio-culturali.»

Romano Cammarata