CESUMAR

CENTRO UNIVERSITÁRIO DE MARINGÁ

Comunidade do Conhecimento

MATEMÁTICA FINANCEIRA

Professor Dr. Daniel Eduardo dos Santos

GRADUAÇÃO

CIÊNCIAS CONTÁBEIS

MARINGÁ-PR

2012

CESUMAR
CENTRO UNIVERSITÁRIO DE MARINGÁ

Reitor: Wilson de Matos Silva
Vice-Reitor: Wilson de Matos Silva Filho
Pró-Reitor de Administração: Wilson de Matos Silva Filho
Presidente da Mantenedora: Cláudio Ferdinandi

NEAD - Núcleo de Educação a Distância

Diretoria do NEAD: Willian Victor Kendrick de Matos Silva
Coordenação Pedagógica: Gislene Miotto Catolino Raymundo
Coordenação de Marketing: Bruno Jorge
Coordenação Comercial: Helder Machado
Coordenação de Tecnologia: Fabrício Ricardo Lazilha
Coordenação de Curso: José Renato de Paula Lamberti
Supervisora do Núcleo de Produção de Materiais: Nalva Aparecida da Rosa Moura
Capa e Editoração: Daniel Fuverki Hey, Fernando Henrique Mendes, Jaime de Marchi Junior, Luiz Fernando Rokubuiti e Thayla Daiany Guimarães Cripaldi
Supervisão de Materiais: Nádila de Almeida Toledo
Revisão Textual e Normas: Cristiane de Oliveira Alves, Gabriela Fonseca Tofanelo, Janaína Bicudo Kikuchi, Jaquelina Kutsunugi e Maria Fernanda Canova Vasconcelos

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central - CESUMAR

CENTRO UNIVERSITÁRIO DE MARINGÁ. Núcleo de Educação a distância:

C397 Matemática financeira / Daniel Eduardo dos Santos. Maringá - PR, 2012.
194 f.

"Graduação em Ciências Contábeis - EaD".

1. Matemática financeira. 2. Capitalização. 3. Porcentagem. 4. EaD. I. Título.

CDD - 22 ed. 650.01513
CIP - NBR 12899 - AACR/2

r, 1610 - Jd. Aclimação - **(44) 3027-6360** - CEP 87050-390 - Maringá - Paraná - www.cesumar.br
NEAD - Núcleo de Educação a Distância - bl. 4 sl. 1 e 2 - **(44) 3027-6363 -** ead@cesumar.br - www.ead.cesumar.br

MATEMÁTICA FINANCEIRA

Professor Dr. Daniel Eduardo dos Santos

APRESENTAÇÃO DO REITOR

Viver e trabalhar em uma sociedade global é um grande desafio para todos os cidadãos. A busca por tecnologia, informação, conhecimento de qualidade, novas habilidades para liderança e solução de problemas com eficiência tornou-se uma questão de sobrevivência no mundo do trabalho.

Cada um de nós tem uma grande responsabilidade: as escolhas que fizermos por nós e pelos nossos fará grande diferença no futuro.

Com essa visão, o Cesumar – Centro Universitário de Maringá – assume o compromisso de democratizar o conhecimento por meio de alta tecnologia e contribuir para o futuro dos brasileiros.

No cumprimento de sua missão – “promover a educação de qualidade nas diferentes áreas do conhecimento, formando profissionais cidadãos que contribuam para o desenvolvimento de uma sociedade justa e solidária” –, o Cesumar busca a integração do ensino-pesquisa-extensão com as demandas institucionais e sociais; a realização de uma prática acadêmica que contribua para o desenvolvimento da consciência social e política e, por fim, a democratização do conhecimento acadêmico com a articulação e a integração com a sociedade.

Diante disso, o Cesumar almeja ser reconhecido como uma instituição universitária de referência regional e nacional pela qualidade e compromisso do corpo docente; aquisição de competências institucionais para o desenvolvimento de linhas de pesquisa; consolidação da extensão universitária; qualidade da oferta dos ensinos presencial e a distância; bem-estar e satisfação da comunidade interna; qualidade da gestão acadêmica e administrativa; compromisso social de inclusão; processos de cooperação e parceria com o mundo do trabalho, como também pelo compromisso e relacionamento permanente com os egressos, incentivando a educação continuada.

Professor Wilson de Matos Silva
Reitor

Caro(a) aluno(a), "*ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção*" (FREIRE, 1996, p. 25). Tenho a certeza de que no Núcleo de Educação a Distância do Cesumar, você terá à sua disposição todas as condições para se fazer um competente profissional e, assim, colaborar efetivamente para o desenvolvimento da realidade social em que está inserido.

Todas as atividades de estudo presentes neste material foram desenvolvidas para atender o seu processo de formação e contemplam as diretrizes curriculares dos cursos de graduação, determinadas pelo Ministério da Educação (MEC). Desta forma, buscando atender essas necessidades, dispomos de uma equipe de profissionais multidisciplinares para que, independente da distância geográfica que você esteja, possamos interagir e, assim, fazer-se presentes no seu processo de ensino-aprendizagem-conhecimento.

Neste sentido, por meio de um modelo pedagógico interativo, possibilitamos que, efetivamente, você construa e amplie a sua rede de conhecimentos. Essa interatividade será vivenciada especialmente no ambiente virtual de aprendizagem – AVA – no qual disponibilizamos, além do material produzido em linguagem dialógica, aulas sobre os conteúdos abordados, atividades de estudo, enfim, um mundo de linguagens diferenciadas e ricas de possibilidades efetivas para a sua aprendizagem. Assim sendo, todas as atividades de ensino, disponibilizadas para o seu processo de formação, têm por intuito possibilitar o desenvolvimento de novas competências necessárias para que você se aproprie do conhecimento de forma colaborativa.

Portanto, recomendo que durante a realização de seu curso, você procure interagir com os textos, fazer anotações, responder às atividades de autoestudo, participar ativamente dos fóruns, ver as indicações de leitura e realizar novas pesquisas sobre os assuntos tratados, pois tais atividades lhe possibilitarão organizar o seu processo educativo e, assim, superar os desafios na construção de conhecimentos. Para finalizar essa mensagem de boas-vindas, lhe estendo o convite para que caminhe conosco na Comunidade do Conhecimento e vivencie a oportunidade de constituir-se sujeito do seu processo de aprendizagem e membro de uma comunidade mais universal e igualitária.

Um grande abraço e ótimos momentos de construção de aprendizagem!

Professora Gislene Miotto Catolino Raymundo

Coordenadora Pedagógica do NEAD- CESUMAR

APRESENTAÇÃO

Livro: MATEMÁTICA FINANCEIRA

Professor Dr. Daniel Eduardo dos Santos

Olá, prezado(a) acadêmico(a)! Sou o professor doutor Daniel Eduardo dos Santos, atuo na área financeira e de projetos, e ministro a aula de matemática financeira, presencialmente, no Cesumar. Sendo assim, fiquei com a feliz missão de escrever um livro com uma linguagem que nos aproximasse, mesmo estando a distância. E ele foi elaborado especialmente para auxiliá-lo em seus estudos e ainda agregar novos conhecimentos em seu curso de graduação, mas não se limitando apenas a este livro. Nosso objetivo é que você faça dele um manual de utilização prática em suas atividades do dia a dia e, especialmente, em sua vida profissional.

Estaremos fazendo uso de ferramentas que possibilitarão a aceleração de seu aprendizado, e todas elas estarão disponíveis pelo site do Cesumar por meio dos links no Ambiente Virtual de Aprendizagem; além de que, por nossas aulas, assistidas sob demanda ou ao vivo, estaremos extrapolando os termos deste material e trazendo a você informações e *cases* atualizados que lhe permitirão compreender melhor nosso assunto.

Você percebeu como lhe chamei na primeira linha? Acadêmico(a)! Isso mesmo! Você está na academia, e aqui nosso objetivo é exercitar, mas diferentemente daquelas que estão focadas no físico, nosso interesse aqui é fortalecer sua mente.

Estudar matemática e também a matemática financeira está longe de ser desagradável, aliás, pode ser muito prazerosa: basta que você considere cada juros calculados como uma profecia de lucro para você. Assim fica mais interessante, não é mesmo.

Deixe para trás o fantasma da matemática que lhe assombrou. Estamos falando aqui sobre calcular e juntar dinheiro. Simples assim. Tenha um bom ânimo e exercite sua mente, afinal a academia é para isso.

Quando tratamos sobre matemática financeira, compreendemos que ela se sustenta sobre dois pilares essenciais: o dinheiro e o tempo. Muito mais do que fórmulas, tabelas financeiras e calculadores, estamos discutindo e analisando a importância do dinheiro quando considerados os tempos. Os juros são, desta forma, uma remuneração do capital.

Nosso objetivo neste material é abordar, de maneira prática e didática, assuntos inerentes à matemática financeira, de forma a ligar esse conteúdo com temas relacionados ao dia a dia empresarial e até mesmo pessoal, utilizando-nos de exemplos retirados da vivência profissional e ainda de bibliografias selecionadas, mas sempre pertinentes e relevantes ao seu estudo.

Na Unidade I, o breve assunto Juros Simples traz os conceitos básicos e as primeiras abordagens para seu contato com fórmulas e compreensão do mecanismo de juros.

Os conceitos de Valor Presente, Valor Futuro, Montante, Juros e taxa de juros são apresentados de forma que sirvam de fundamento para a aplicação semelhante em juros compostos.

Na Unidade II, ainda sob a ótica de capitalização simples, estudaremos a ferramenta de Descontos. Novos conceitos como Valor Atual, Valor Nominal, Desconto, Taxa de Desconto e Valor Descontado serão objeto de nossos estudos e compreenderemos as relações intrínsecas entre Juros e Descontos.

Vários exercícios, aplicando esses conceitos, serão propostos ao final dessa unidade, o que sedimentará seu conhecimento a respeito e lhe permitirá progredir para um novo nível de estudos.

Na Unidade III, trataremos a respeito de Juros Compostos. As relações entre juro, taxa de juros e Montante serão estudadas, assim como a explanação sobre a diferença entre os regimes de capitalização (simples e composta). As fórmulas de cálculo e o uso da calculadora financeira provarão sua eficiência no desenvolvimento dos exemplos criados para explanar sobre o Montante, assim como no cálculo do Juro.

Consequentemente, o levantamento do Valor Atual e Valor Futuro será possível e, partir deste momento, compreender o conceito de Taxas Equivalentes será facilitado, além de conhecer as diferentes convenções utilizadas quando da ocorrência de períodos não inteiros em uma capitalização.

Ainda nessa unidade, avançamos na discussão de engenharia financeira quando tratamos sobre Equivalência de Capitais em suas definições, abrangendo ainda o tema Capitais Equivalentes, além do Valor atual de um conjunto de capitais e Conjuntos equivalentes de capitais.

Finalmente, último assunto nos Juros Compostos, estudaremos sobre Rendas Certas ou Anuidades, assim como suas classificações quanto ao prazo, quanto ao valor dos termos, quanto à forma de pagamento ou de recebimento e quanto à periodicidade.

Na Unidade IV, veremos os Sistemas de amortização em suas especificações e consideraremos suas formas mais conhecidas no mercado como Sistema de Amortização Constante (SAC), Sistema Francês (Price) e Sistema Americano.

Na Unidade V, consideraremos os aspectos financeiros da Inflação, quando abordarmos o tema Taxa de Juros Aparente e Taxa de Juros Real. Estudaremos sobre índices de preços e seus reflexos sobre aplicações de curto, médio e longo prazo.

Desejamos que seu sucesso na utilização deste material seja produto de seu esforço e dedicação. Estaremos juntos na caminhada para compreender os efeitos do dinheiro no tempo e a importância do uso racional dos recursos disponíveis, afinal – como gestores – estamos compromissados com a perenidade das organizações e seu desenvolvimento profissional.

SUMÁRIO

UNIDADE I

FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA FINANCEIRA

Professor Dr. Daniel Eduardo dos Santos

Objetivos de Aprendizagem

- Entender os principais termos da matemática financeira.
- Diferenciar os regimes de capitalização.
- Analisar os fluxos de caixa de uma operação.

Plano de Estudo

A seguir, apresentam-se os tópicos que você estudará nesta unidade:

- **Capital**
- **Juro**
- **Montante**
- **Período**
- **Juros Simples**
- **Juros Compostos**
- **Fluxo de caixa**

INTRODUÇÃO

Caro(a) aluno(a), nesta primeira unidade do livro será discutido os principais conceitos da matemática financeira. Esses fundamentos serão utilizados em todas as nossas aulas, mas não se limitará à teoria, pois você observará que utilizará em suas práticas profissionais os termos apreendidos aqui.

Imagine você, agora, em uma reunião importantíssima para fechar um contrato de venda de uma máquina financiada. Se você não souber utilizar os termos corretos, será que alguém confiará no seu trabalho?

Desse modo, aprender a linguagem financeira empresarial, como o que é capital, juros, capitalização, montante, fluxo de caixa etc., e conhecer o que significam esses termos é uma habilidade essencial para você que deseja atuar nesse contexto.

Deixo claro que esta unidade inicial deve ser revista sempre, principalmente, quando você estudar as próximas unidades e sentir dificuldade no procedimento de algum exercício.

Bons estudos!

Anotações

CAPITAL COMO FATOR DE PRODUÇÃO

Lembre-se que Capital compõe, juntamente com o Trabalho, o Empreendedorismo, a Tecnologia e os Recursos Naturais os fatores de produção (ROSSETTI, 2003), ou seja, os recursos utilizados na produção de quaisquer bens ou serviços. Dependendo do que se pretenda produzir, o mix desses fatores pode se alterar, utilizando-se assim com maior intensidade um desses e com menos intensidade outros, mas todos eles estão sempre presentes.

Como exemplo disso, podemos considerar qual é o arranjo dos fatores de produção em uma empresa de mineração: o uso de recursos naturais e capital é intensivo, enquanto que os demais fatores, ainda que importantes no processo, têm um peso relativamente menor.

No outro lado, podemos exemplificar uma pizzaria, onde os recursos naturais, o capital e a tecnologia têm peso inferior quando comparados ao Empreendedorismo e ao Trabalho, já que se trata nesse exemplo de um produto *commodity*, cujas vantagens competitivas estão mais relacionadas à gestão e ao processo de produção.

Fonte: SHUTTERSTOCK.COM

Em ambos os exemplos, e em quaisquer outros que você puder imaginar, os fatores de produção são utilizados e os seus proprietários esperam receber um benefício por permitir sua utilização. Esses benefícios podem ser entendidos a partir da tabela a seguir:

Anotações

Fator de Produção	REMUNERAÇÃO
Recursos Naturais	Aluguel/Renda
Trabalho	Salário
Capital	Juros
Empreendedorismo	Lucro
Tecnologia	*Royalties*

A economia conceitua juros como sendo a remuneração paga pelo tomador de um empréstimo junto ao detentor do capital emprestado. Segundo escreve Frederico Caldas, o conceito econômico do juro se completa com critérios objetivos e subjetivos que, respectivamente, consistem na escassez de capital e renúncia à liquidez monetária, aliada à oferta e procura da moeda em investimentos. A ciência jurídica, apoiando-se nas conceituações econômicas, qualifica os juros como sendo o preço do uso do capital, fruto produzido pelo dinheiro, daí a expressão fruto civil, corriqueira na doutrina: "Ele a um tempo remunera o credor por ficar privado de seu capital e paga-lhe o risco em que incorre de o não receber de volta" (RODRIGUES, 2002).

Juros são, portanto, a forma de remuneração de um capital utilizado. Mas qual seria a razão pela qual estaríamos pagando ou cobrando juros de alguém? A razão se dá pelo esforço realizado na formação deste capital. Compreendendo que os meios, para se juntar dinheiro e convertê-lo em capital, são demorados e sacrificados, exigir uma contraprestação ou um benefício por esse sacrifício é medida aceitável imposta pelo capitalista.

CONCEITOS GERAIS

Juros

Como vimos há pouco, o juro pode ser entendido como o "aluguel" do dinheiro por tempo determinado, ou ainda como a remuneração de um investimento de capital, e finalmente como

Anotações

o custo em uma operação de empréstimo. Dependendo do ponto de vista, o fluxo de caixa se posiciona adequadamente: o juro é remuneração para quem investe ou empresta o recurso e, para quem está “tomando” o dinheiro, o juro assume papel de custo financeiro.

Taxa de Juros

Fonte: SHUTTERSTOCK.COM

O juro é determinado por meio de um coeficiente relacionado a determinado período de tempo. Esse coeficiente corresponde à remuneração do capital aplicado por um tempo equivalente àquele índice.

Taxas de juros podem ser apresentadas de duas formas:

- Forma percentual: diz-se aplicada a centos do capital, ou seja, o que se obtém após dividir-se o capital por 100.
- Forma unitária: a taxa refere-se à unidade do capital, assim calculamos o rendimento da aplicação de uma unidade do capital no intervalo de tempo referido pela taxa.

Forma percentual	Transformação	Forma Unitária
10% a.a.	10/100	0,10 a.a.
5% a.s.	3/100	0,05 a.s.
1% a.m.	1/100	0,01 a.m.

Nas calculadoras financeiras, a tecla *i é usada para designar a taxa, pois o inglês interest rate pode ser traduzido para taxa de juros.*

Anotações

Capital

Focados nos conceitos utilizados na matemática financeira, capital é qualquer valor monetário disponível para investimento ou empréstimo por tempo determinado. Outras expressões como Principal e Valor Presente também são utilizadas para denominar o capital.

Na calculadora financeira HP12C, assim como em outras calculadoras financeiras, o registrador financeiro do capital está na tecla PV (*Present Value*), que em inglês significa Valor Presente.

Montante

Designa-se como montante o valor do capital inicial (ou Valor Presente, como vimos acima), que foi adicionado aos juros gerados nos períodos anteriores. Também conhecido como Valor Futuro, nas calculadoras financeiras, sua tecla de registro é a FV (*Future Value*, em inglês).

Tempo ou Períodos

Nenhuma operação financeira se prolongará indefinidamente, assim entendendo que todas têm um prazo, ainda que longo, o tempo é importante parâmetro no processo de cálculo dos juros. Nas calculadoras financeiras, o prazo é designado pela letra *n*. Um "aportuguesamento" da matemática financeira levou alguns autores a substituir seu símbolo pela letra t, mas, para evitar maiores transtornos com siglas e padrões, utilizaremos o que está posto nas calculadoras financeiras.

REGIMES DE CAPITALIZAÇÃO

Capitalizar, em matemática financeira, indica o cálculo de juros e a incorporação destes ao capital inicial (PV). Duas maneiras de operar essa capitalização estão disponíveis: a simples e a composta.

Anotações

Capitalização Simples, Juros Simples ou Juros Lineares

Nesse regime de capitalização, os juros são calculados sempre sobre o valor do capital inicial e, quando multiplicados pelo número de períodos da operação juntamente com a taxa de juros, resumem-se na seguinte fórmula:

$$J = C \cdot i \cdot n$$

Em que:

- J é o valor dos juros que se quer encontrar.
- C é o valor do capital inicial, valor presente.
- i é a taxa de juros.
- n é o prazo a que se refere a taxa.

Capitalização Composta, Juros Compostos ou Juros Exponenciais

Nesse sistema, os juros são calculados período a período, pois o valor dos juros é resultado da incidência da taxa sobre o capital inicial somado aos produzidos no período anterior, razão pela qual é também conhecido como juros sobre juros. Em outras palavras, o montante calculado ao final de cada período torna-se o capital inicial do período seguinte, sobre o qual incidirá novos juros e esse processo repete-se até o final do prazo.

A fórmula desse sistema de capitalização é a seguinte:

$$M = C\,(1 + i)^n$$

Em que:

- M é o valor do Montante que se quer encontrar.

Anotações

- C é o valor do capital inicial, valor presente.
- i é a taxa de juros.
- n é o prazo a que se refere a taxa.

Comparando Juro Simples e Juros Compostos

De forma sintética, vamos estudar cada regime com suas particularidades nas Unidades posteriores, veja abaixo os resultados produzidos em operação nas quais se pega emprestado o Capital de $1.000,00, à taxa de 10% a.m., pelo período de 5 meses, nos regimes de capitalização simples e composta.

Tabela 1 – Regime de Capitalização Simples

Período	Base de Cálculo	SD_1	Juros (J = C.i)	$SD_2 = SD_1 + J$
1	1.000	1.000	100	1.100
2	1.000	1.100	100	1.200
3	1.000	1.200	100	1.300
4	1.000	1.300	100	1.400
5	1.000	1.400	100	1.500

Fonte: o autor

Tabela 2 – Regime de Capitalização Composta

Período	Base de Cálculo	SD_1	Juros (J = SD1.i)	$SD_2 = SD_1 + J$
1	1.000	1.000	100	1.100
2	1.000	1.100	110	1.210
3	1.000	1.210	121	1.331
4	1.000	1.331	133	1.464
5	1.000	1.464	146	1.610

Fonte: o autor

Como podemos observar, o mesmo Capital calculado sob as formas de ambos os regimes produz um total de juros de $500,00 na capitalização simples e $610,00 na capitalização composta. Tal diferença entre as formas de cálculo é fruto da remuneração de juros sobre juros.

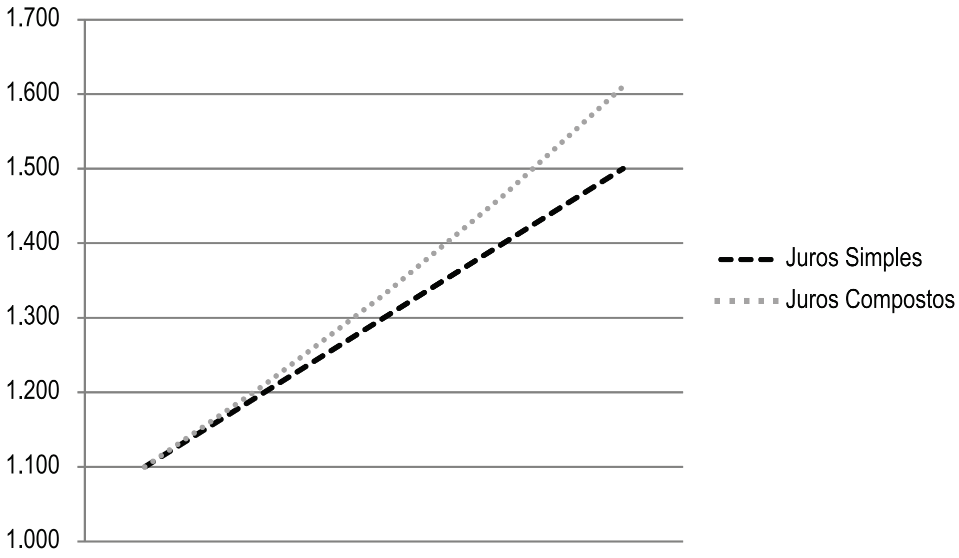


Gráfico 1 - Comparação entre os regimes de Capitalização Simples e Composta

Fonte: autor.

Essa diferença é exponencial, pois com o transcurso do tempo, o coeficiente angular dos juros compostos aumenta cada vez mais, enquanto que o valor dos juros simples permanece o mesmo até o final da operação. O gráfico traz um comparativo entre os valores remunerados entre ambos os sistemas de capitalização.

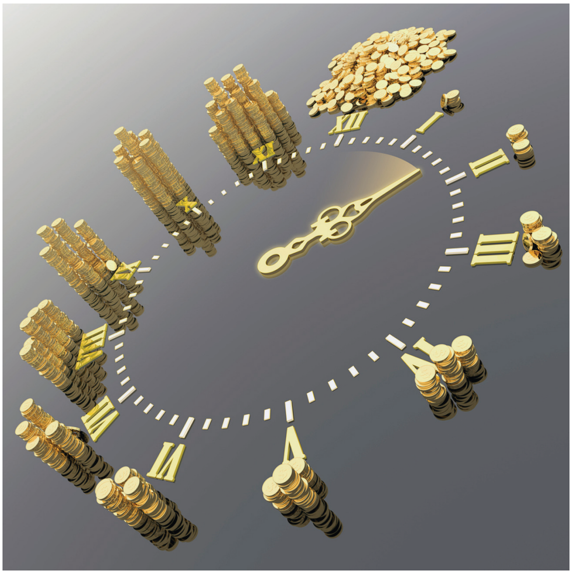
Anotações

Sugestão de Vídeo

Impacto da redução das taxas de juros para a sociedade brasileira.

<http://www.youtube.com/watch?v=r2KAVYBCvA4>.

VALOR DO DINHEIRO NO TEMPO



Fonte: SHUTTERSTOCK.COM

Os juros e os impostos existem desde a época dos primeiros registros de civilizações existentes na Terra. Um dos primeiros indícios apareceu já na Babilônia no ano de 2000 a.C. Nas citações mais antigas, os juros eram pagos pelo uso de sementes ou de outras conveniências emprestadas. Muitas das práticas existentes originaram-se dos antigos costumes de empréstimo e devolução de sementes e de outros produtos agrícolas.

Anotações

A História também revela que a ideia se tinha tornado tão bem estabelecida que já existia uma firma de banqueiros internacionais em 575 a.C., com os escritórios centrais na Babilônia. Sua renda era proveniente das altas taxas de juros cobradas pelo uso de seu dinheiro para o financiamento do comércio internacional. O juro é uma das nossas mais antigas aplicações da Matemática Financeira e Economias sendo que seus usos sofreram poucas mudanças através dos tempos.

Como em todas as instruções que têm existido por milhares de anos, algumas das práticas relativas a juros foram modificadas para satisfazer às exigências atuais, mas alguns dos antigos costumes ainda persistem de tal modo que o seu uso nos dias atuais ainda envolve alguns procedimentos incômodos.

Entretanto, devemos lembrar que todas as antigas práticas que ainda persistem foram inteiramente lógicas no tempo de sua origem. Por exemplo, quando as sementes eram emprestadas para a semeadura de uma certa área, era lógico esperar o pagamento na próxima colheita – no prazo de um ano. Assim, o cálculo de juros, em uma base anual, era mais razoável, tanto quanto o estabelecimento de juros compostos para o financiamento das antigas viagens comerciais, que não poderiam ser concluídas em um ano. Conforme a necessidade de cada época, novas formas de se trabalhar com a relação tempo-juros foram criadas (juros semestral, bimestral, diário etc.).

Considerando o caráter de continuidade de uma organização, seu valor e as decisões do gestor devem ser avaliados à luz tanto dos fluxos de caixa presentes como futuros, quer sejam entradas ou saídas de caixa. As empresas se deparam com oportunidades de gerar taxas de retornos positivas sobre seus recursos, isto é, como as taxas de juros são sempre superiores a zero, a análise temporal dos fluxos de caixa tem importantes consequências econômicas. Uma visão de longo prazo exige que o gestor, de uma maneira objetiva, reconheça o valor do dinheiro no tempo.

Anotações

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Prezado(a) aluno(a), observamos nesta primeira unidade, de forma abrangente, os principais termos da matemática financeira. Entender os seus conceitos lhe auxiliará a entender e resolver questões complexas em seu mercado de trabalho.

Dessa forma, caso seja necessário, retorne aos conceitos desta primeira unidade sempre que você tiver dúvidas. Com certeza, na segunda leitura, você fixará ainda mais os principais termos que utilizaremos. Note que esses conceitos estarão presentes em nossa vida profissional.

Fico muito satisfeito em escrever esta unidade inicial, visto que tentei ser o mais didático possível, utilizando vídeos para que você possa interagir com o material. Então, mãos à obra!

ATIVIDADE DE AUTOESTUDO

1. Um capital é aplicado a juros simples, à taxa de 1,5% ao mês. Obtenha o montante para os seguintes prazos:

   a) Dois meses.

   b) Três meses.

   c) Cinco meses.

   d) Dez meses.

2. Agora, monte os fluxos de caixa referente à questão 1.

3. Explique, com suas palavras, o que significam os principais termos:

   a) Montante.

   b) Juros.

   c) Capital.

   d) Fluxo de caixa.

UNIDADE II

JUROS SIMPLES

Professor Dr. Daniel Eduardo dos Santos

Objetivos de Aprendizagem

- Calcular os juros simples com o tempo em anos ou meses.
- Calcular os juros simples comercial usando um ano de 360 dias.
- Calcular os juros simples exato usando um ano de 365 dias.
- Comparar juros simples comercial e juros simples exato.
- Calcular o principal, a taxa e o tempo a partir da fórmula básica de juros.
- Entender os conceitos de Valor Nominal, Valor Atual e Valor Futuro.

Plano de Estudo

A seguir, apresentam-se os tópicos que você estudará nesta unidade:

- **Calculando Juros Simples**
- **Cálculo de Montante Simples**
- **Taxa Proporcional**
- **Taxa Equivalente**
- **Valor Nominal, Valor Atual e Valor Futuro**

INTRODUÇÃO

Grande parte das empresas e indivíduos já comprou, ao menos uma vez, algo sem realizar quitação total no momento da compra. O vendedor dá posse imediata do bem ao comprador, mas não exige pagamento senão até alguma data posterior. Por exemplo, grandes redes varejistas recebem mercadorias para vendas de Natal, mas apenas começarão a pagar por tais produtos a partir de janeiro do ano seguinte. O vendedor, que estende este crédito ao comprador final, pode ou não cobrar por essa vantagem. A cobrança é chamada de **juros** e é normalmente indicada como um percentual do valor total de crédito concedido (o principal). Quando parte do preço é pago no momento da compra, essa parte é chamada de **entrada**.

Se o vendedor cobra juros altos ou ainda não estende o **crédito**, o comprador deveria emprestar dinheiro de um terceiro, como bancos ou financeiras. O comprador deveria então vender a mercadoria para repagar o empréstimo bancário. O banco irá cobrar juros entre a data de empréstimo e a data de pagamento (ou devolução) do dinheiro. Esse período de tempo é chamado de **período de juros** ou **prazo de empréstimo**.

O Novo Código Civil de 2002 incorpora a disciplina dos títulos de crédito no Livro I, da Parte Especial, dedicada ao “direito das obrigações”. Segundo (VIVANTE, s/d), “título de crédito é o documento necessário para o exercício do direito, literal e autônomo, nele mencionado”. É a promessa de pagamento de um empréstimo ou pagamento de uma mercadoria ou serviço, e circulam no Brasil vários títulos de crédito, sendo os mais conhecidos a letra de câmbio, o cheque (quando apontado como promessa de pagamento e não ordem de pagamento à vista), a nota promissória e a duplicata.

Transações de **curto prazo** são aquelas cujos termos (empréstimo e pagamento) estão entre 1 dia e 1 ano. Transações de crédito longo prazo são aquelas com termos superiores a 1 ano. Normalmente, transações de **longo prazo** são aquelas que envolvem operações de maior valor, como novas construções ou equipamentos, apesar de também serem utilizadas inadvertidamente na compra de bens de consumo por brasileiros.

Anotações

CONCEITOS GERAIS

Fonte: SHUTTERSTOCK.COM

O tipo mais fácil de cálculo para juros é chamado de **juros simples**. Os cálculos são os mesmos tanto para um empréstimo quanto para uma compra a crédito. A taxa de juros é um porcentual do capital para o período do empréstimo ou crédito. O percentual citado normalmente é uma taxa anual, podendo ser feito sua equivalência em taxa mensal.

Uma alíquota de 10% significa que o pagamento de juros para um ano será de 10% do principal.

Para calcular o montante de juros simples de um empréstimo de 1 ano, basta multiplicar o capital (principal) pela taxa.

O detalhe mais característico deste tipo de juros é que o seu valor é sempre calculado sobre o investimento ou dívida inicial (Valor Presente), significando assim que, a cada período, os juros calculados serão sempre iguais, como será possível perceber no exemplo a seguir.

Simbologia

O uso de fórmulas é extensivo na matemática financeira, sendo necessária a adoção de símbolos que facilitem a estruturação e desenvolvimento dos problemas. Assim, adotam-se as seguintes simbologias:

- *i* representará a taxa de juros para um determinado período de tempo.
- *n* representará o número de períodos que determinada importância monetária estará sujeita à determinada taxa de juros.
- *P* representará o principal, o capital (C), o valor presente. Na calculadora HP12C, o valor presente é o registrador financeiro PV (*Present Value*, em inglês).
- *S* representará a somatória do principal mais juros, ou montante (M), ou valor futuro,

correspondentes a uma importância de dinheiro capitalizada após n períodos de tempo, sujeita à determinada taxa de juros. Na calculadora HP12C, o montante é o registrador financeiro FV (*Future Value*, em inglês).

- *R* representará uma série uniforme de pagamentos ou recebimentos nominalmente iguais, desde o período de ordem 1 até o de ordem n. Na calculadora HP12C, a série uniforme ou parcelas é o registrador financeiro PMT (*Payment*, em inglês).

- *G* representará uma série em gradiente de pagamentos ou recebimentos.

Tais simbologias são adaptadas conforme as ferramentas (tabelas financeiras, calculadoras financeiras, planilhas eletrônicas etc.) disponíveis, mas a compreensão de seu real significado é essencial para um bom desenvolvimento.

Além dessas designações, é importante ressaltar que, ao se tratar sobre taxas de juros, sempre temos em mente que essas taxas referem-se a períodos de capitalização, ou seja, o momento quando o dinheiro emprestado gera os juros. Esse período de capitalização pode também variar em conveniência com as partes acordadas. A forma de designar isso é simples, mas exige sua atenção. Os números que expressam a taxa de juros são acompanhados de uma expressão que indica a temporalidade da taxa. Essas expressões são abreviadas da seguinte forma:

- ad = ao dia;
- am = ao mês;
- ab = ao bimestre;
- at = ao trimestre;
- aq = ao quadrimestre;
- as = ao semestre; e
- aa = ao ano.

Anotações

Como exemplo disso, considere esta taxa: 12% a.a. Estamos tratando aqui que essa taxa produzirá juros de 12% a cada período anual, pois o seu período apontado é anual (a.a.), assim como se informássemos uma taxa de 0,5% a.m., significaria que a remuneração do capital emprestado seria mensal, à taxa de 0,5% no período.

Fórmulas

As três fórmulas a seguir, assim como suas variações, são utilizáveis no cálculo do desconto por dentro.

1) $\mathbf{M = C(1+i.n)} \rightarrow C = \frac{M}{1+i.n} \rightarrow i = \frac{\frac{M}{C}-1}{n} \rightarrow n = \frac{\frac{M}{C}-1}{i}$

2) $\mathbf{M = C + J} \rightarrow C = M - J \rightarrow J = M - C$

3) $\mathbf{J = C . i . n} \rightarrow C = \frac{J}{i.n} \rightarrow i = \frac{J}{C.n} \rightarrow n = \frac{J}{C.i}$

Observe que, nas variações apontadas nas fórmulas apresentadas, apenas buscou-se isolar cada elemento da fórmula, de modo a facilitar sua resolução, mas a compreensão das mesmas em sua forma básica (negrito) produz idêntico resultado.

Exemplo 1

Constâncio emprestou R$1.000 por um ano, a uma taxa de juros simples de 10% a.a. (ao ano). Calcule o valor dos juros.

O capital é R$1.000 e, por um ano, a taxa de juros simples é 10% de R$1.000, ou seja, 0,10 x R$1.000 = R$100.

A maioria dos empréstimos, no entanto, não é para um período de exatamente um ano. Os empréstimos para períodos mais longos exigirão do mutuário pagamento de mais juros. Da mesma forma, os empréstimos para períodos mais curtos exigem menos juros.

Para calcular os juros simples sobre empréstimos de qualquer período, multiplique o capital

Anotações

pela taxa e depois multiplique pelo tempo, devendo esse tempo ser expresso em anos ou fração de anos. A fórmula básica para juros simples é:

Juros = Capital x Taxa x Tempo, cuja abreviação é **J = C.i.n**

Em que J é o valor dos Juros, C é o Capital utilizado, i refere-se à Taxa de juros e o Tempo é expresso em n períodos.

Perceba que, conforme a fórmula descrita acima, trata-se de uma equação do 1º grau, e é representada graficamente por uma reta, tendo assim o mesmo coeficiente angular em toda a reta. Isso confirma que os valores de juros acrescidos a cada período são também sempre os mesmos, tanto no primeiro período quanto no último.

Podemos ainda montar uma tabela ou planilha eletrônica para o cálculo desses juros. Nesse último caso, teríamos toda a versatilidade e dinamismo que é próprio das planilhas. Com uma tabela, considere a estrutura a seguir:

Período	Base de Cálculo	SD_1	Juros (J = C.i)	$SD_2 = SD_1 + J$
1	1.000	1.000	100	1.100
2	1.000	1.100	100	1.200
3	1.000	1.200	100	1.300
4	1.000	1.300	100	1.400
5	1.000	1.400	100	1.500

SD_1 - Saldo Devedor no início do período / SD_2 - Saldo Devedor no fim do período

Observe novamente que, no regime de capitalização simples, o valor gerado de juros, período após período, é sempre o mesmo, uma vez que a base de cálculo não se altera no transcurso de tempo. O gráfico a seguir expõe eficientemente essa realidade.

Anotações

Gráfico 2 - Juros Simples Projetado

Fonte: o autor

Saiba mais sobre o **Assunto**

SAIBA MAIS

O conhecimento de matemática básica e de seus conceitos pode permitir uma aceleração considerável no seu aprendizado. As aplicações de juros simples sustentam-se todas sobre os conceitos do coeficiente angular da equação de primeiro grau. Você poderá entender um pouco melhor sobre isso no texto disponível na web, pelo link a seguir.

<http://www.vestibular1.com.br/revisoes/matematica/aulas_matematica/aula46.pdf>.

Exemplo 0-1

Encontre o montante de juros simples para empréstimo de R$1.500, quando a taxa de juros é de 7% e os períodos de empréstimo são:

Anotações

a) 6 meses

$$J = C \,.\, i \,.\, n$$

$$J = 1.500 \,.\, 0{,}07 \,.\, \frac{6}{12}$$ **ou**

$$J = 1.500 \,.\, 0{,}07 \,.\, 0{,}5$$

$$J = 52{,}50$$

b) 30 meses

$$J = C \,.\, i \,.\, n$$

$$J = 1.500 \,.\, 0{,}07 \,.\, \frac{30}{12}$$ **ou**

$$J = 1.500 \,.\, 0{,}07 \,.\, 2{,}5$$

$$J = 262{,}50$$

Como apresentado no exemplo acima, o período de tempo muitas vezes será apresentado em meses, ao invés de anos. É crucial que, antes de calcular, tanto o **tempo** quanto as **taxas** estejam **expressos no mesmo período**. Assim, faça a conversão do tempo (meses para anos), dividindo o número de meses por 12 (quantidade de meses em um ano). Essa medida de ajuste é possível em juros simples, pois, como já vimos, os valores produzidos a cada período serão sempre os mesmos.

O USO DE CALCULADORAS

Hoje, calculadoras ou computadores são usados em praticamente todos os cálculos de juros. Os números são muitas vezes grandes e realizar cálculos com precisão é algo sempre importante. Mesmo em juros simples, sua aplicabilidade e velocidade de resposta produzem claros benefícios ao usuário.

Anotações

Figura 1 – Calculadora HP12C, em sua versão Gold

Fonte: <http://epx.com.br/ctb/HP12C.png>

Os passos realizados na calculadora financeira HP12C[1] têm uma modificação relevante, como será observado a seguir.

Exemplo 0-2

Escrevendo os passos na calculadora HP12C, com juros simples calculados sobre um capital de R$7.000.000, a uma taxa de 4% a.a. por um período de 18 meses.

Calculando por meio da fórmula

$$J = C \,.\, i \,.\, n$$

$$J = 7.000.000 \,.\, 0{,}04 \,.\, \frac{18}{12} \quad \text{ou}$$

$$J = 7.000.000 \,.\, 0{,}04 \,.\, 1{,}5$$

$$J = 420.000$$

[1] HP12C é marca registrada da Hewlett-Packard Co.

Calculando por meio da HP12C		VISOR DA CALCULADORA HP12C
7.000.000	[ENTER]	7.000.000
4	[%]	280.000
18	[X]	5.040.000
12	[÷]	420.000

O *display* da calculadora mostra o número 420.000, que significa o valor de R$420.000,00 de juros incidentes na operação.

Como pode ser observado no cálculo demonstrado acima, o processo utilizado pela calculadora é diferente daqueles utilizados em calculadoras comuns. Isto se dá porque a calculadora HP12C faz uso da Notação Polonesa Reversa (cuja sigla é RPN, em inglês).

Segundo o fabricante[2], esse sistema de cálculo é vantajoso porque:

- RPN economiza tempo e toques nas teclas. Você nunca terá que contar os parênteses ao fazer os cálculos. O processo é similar à forma que você aprendeu a calcular matemática no papel.

- Você pode ver os resultados intermediários à medida que realiza seus cálculos em vez de apenas ver a resposta no final. Este é um subproduto extremamente útil. Os professores de matemática estão usando esse recurso para melhorar o entendimento de matemática pelos estudantes.

- O resultado intermediário permite ao usuário verificar os resultados e corrigir erros mais facilmente. É mais fácil seguir o fluxo do cálculo. O usuário define a prioridade dos operadores.

- RPN é lógico porque o usuário primeiro fornece o número e depois diz o que quer fazer com ele.

[2] <http://www.hp.com/latam/br/produtos/calculadoras/rpn.html>.

Anotações

Observe um cálculo comparado realizado em uma calculadora comum e na HP12C:

$$\frac{3+5}{7+6} = x \qquad \text{ou } (3+5) \div (7+6) = x$$

Método algébrico:	**Método RPN:**
Some 3 + 5 = 8. Escreva a resposta ou guarde na memória. Some 7 + 6 = 13. Agora digite 8 da primeira resposta e a seguir divida-o digitando a segunda resposta para obter x =0,62.	Digite 3 e depois a tecla ENTER. Digite 5 e depois a tecla +. Digite 7 e depois ENTER. Digite 6 e depois a tecla +. Note que a resposta para a segunda soma é exibida. Agora aqui está a parte mágica. Pressione a tecla de dividir e a calculadora exibe a resposta 0,62.
comparando....	
No método algébrico, foram 13 toques, não contando o esforço de escrever ou memorizar a primeira resposta enquanto calcula a segunda resposta.	Utilizando o método RPN, foram dados 9 toques e não há necessidade de escrever nada.

Leitura Complementar

Manual de Utilização da Calculadora Financeira HP12C. Material disponível para download no site da HP.

<http://h10032.www1.hp.com/ctg/Manual/bpia5239.pdf>.

Anotações

CALCULANDO JUROS SIMPLES

Fonte: SHUTTERSTOCK.COM

Juros comercial, considerando ano de 360 dias.

Quando as condições de uma operação de crédito são estabelecidas em determinada quantidade de dias, calcular juros exige dividir o número de dias da operação pelo número de um ano, podendo ser considerados 360 ou 365 dias. Observe que, antes de computadores e calculadoras, calcular juros era mais fácil considerando que o ano seria composto por 360 dias e que todos os meses teriam 30 dias. Esse sistema, chamado **Comercial**, ainda é utilizado em operações comerciais e financeiras.

Exemplo 0-3

Calcule o valor dos juros simples comercial em um empréstimo de R$1.300 à taxa de 14% a.a. por 90 dias.

Anotações

$$J = C \cdot i \cdot n$$

$$J = R\$1.300 \cdot 0{,}14 \cdot \frac{90}{360}$$

$$J = R\$45{,}50$$

Calculando juros simples exato, considerando ano de 365 dias.

Bancos, caixas econômicas e agentes de financiamento e fomento, além do Governo Federal, fazem uso de um ano de 365 dias (366 se bissexto) para calcular juros. Esse método é chamado de **Exato.** O sistema de cálculo é idêntico ao de juros simples comercial, com exceção de que é utilizado um tempo de 366 dias ao invés de 360.

Exemplo 0-4

Calcule o valor dos juros simples exato em um empréstimo de R$1.300 à taxa de 14% a.a. por 90 dias.

$$J = C \cdot i \cdot n$$

$$J = R\$1.300 \cdot 0{,}14 \cdot \frac{90}{365}$$

$$J = R\$44{,}876 \text{ ou } R\$44{,}88$$

Comparando Juros Simples Comercial e Juros Simples Exato.

O ano de 360 dias era muito útil antes do acesso massivo a calculadoras e computadores, estando assim seu uso ainda bem arraigado nas práticas financeiras do dia a dia. Entretanto, o ano de 365 dias é mais realístico e benéfico, inclusive ao devedor, já que o valor dos juros é

Anotações

menor. A razão disso está no denominador (365), que gera um quociente menor do que aquele calculado em um ano comercial (360 dias).

Outro ponto relevante e que exige destaque é que, se em seu problema não houver qualquer indicação de uso de juros exatos (365 dias), seus cálculos deverão se utilizar do ano comercial (360 dias).

Vamos considerar um novo exemplo, com grandezas maiores no cálculo, de forma a explicitar adequadamente essa sensível diferença.

Exemplo 0-5

Encontre a diferença entre juros simples comercial e juros simples exato, em um capital de R$10.000.000, calculados à taxa de 14% a.a. por 90 dias.

Juros Simples Comercial

$$J = R\$10.000.000\ .0{,}14\ .\ \frac{90}{360}$$

$$J = R\$350.000{,}00$$

Juros Simples Exato

$$J = R\$10.000.000\ .0{,}14\ .\ \frac{90}{365}$$

$$J = R\$345.205{,}48$$

A diferença é R$350.000,00 – R$345.205,48 = R$4.794,52

Reflita

A matemática deixará de ser encarada pelos nossos estudantes como “bicho-papão” quando nós, educadores, centrarmos nossos esforços para que o ensino objetive desenvolver o raciocínio lógico e não apenas a cópia ou repetição exaustiva de exercícios-padrão, estimular o pensamento independente e não apenas a capacidade de memorizar, desenvolver a criatividade e não apenas transmitir conhecimentos prontos e acabados, desenvolver a capacidade de manejar situações reais e resolver diferentes tipos de problemas e não continuar naquela “mesmice” que muitos de nós vivemos quando éramos alunos.

Janete Jacinta Carrer Soppelsa

CÁLCULO DE MONTANTE SIMPLES

Fonte: SHUTTERSTOCK.COM

Montante é o valor do capital somado aos juros calculados no período. Estamos tratando assim sobre um capital que foi remunerado à determinada taxa de juros durante certo tempo.

A fórmula básica de Montante Simples é:

$$M = C + J$$

Em que:

M = Montante

C = Capital

J = Valor dos Juros

É possível ainda fazer o cálculo dos juros simples diretamente por meio do uso da seguinte fórmula:

$$\mathbf{M = C(1 + in)}$$

Em que:

M = Montante

C = Capital

i = taxa de juros

n = período

O montante obtido, realizando-se o cálculo de forma indireta, achando o valor dos juros e somando-se ao capital ou desenvolvendo o cálculo diretamente, será necessariamente o mesmo, o que vale dizer que o uso de uma fórmula ou outra depende necessariamente do problema em análise.

Calculando a Taxa de Juros

Consideremos, por exemplo, a seguinte situação: ao adquirir um novo notebook, você deixou na loja um cheque pré-datado com vencimento em três meses no valor de $3.250,00. Sabendo que o valor à vista do equipamento é $2.500,00, para calcular a taxa de juros da operação utilizando a fórmula de juros simples:

Como:	Substituindo-se os valores:
$M = C + J$	$3.250 = 2.500 + J \rightarrow J = 3.250 - 2500 = 750$
	$750 = 2.500 \cdot i \cdot 3 \rightarrow 750 = 7.500i$
$J = C \cdot i \cdot n$	$i = \frac{750}{7.500} \rightarrow i = 0{,}10$ a.m. ou 10% a.m.

O mesmo cálculo por meio da fórmula do Montante

Como: Substituindo-se os valores:

M = C (1 + in) 3.250 = 2.500(1 + i.3)

Aplica-se a propriedade distributiva da multiplicação:

3.250 = 2.500 . 1 + 2.500 . i.3 à 3.250 = 2.500 + 7.500i

3.250 – 2.500 = 7.500i à 750 = 7.500i

$i = \frac{750}{7.500} \rightarrow i = 0{,}10$ a.m. ou 10% a.m.

Observe que, como a unidade de tempo utilizada no cálculo foi mês, a taxa descoberta fica relacionada também ao mesmo intervalo de tempo. Se buscássemos uma taxa trimestral, nosso cálculo teria um período (ou ***n***) equivalente a 1, o que geraria uma **taxa trimestral** de 30%.

Calculando o Capital

Vamos admitir agora, em novo exemplo, que não se saiba qual é o valor à vista do bem adquirido. Utilizaremos os mesmos dados, conforme abaixo:

Como: Substituindo-se os valores:

M = C (1 + in) 3.250 = C(1 + 0,1 . 3) → 3.250 = 1,3 C

$C = \frac{3.250}{1{,}3} \rightarrow C = 2.500{,}00$

Em que:

M = 3.250

n = 3 meses

i = 10% a.m.

C = ?

Calculando o Período

Tendo-se a taxa de juros, o mesmo processo poderá ser realizado para o valor atual ou capital e ainda o valor nominal ou montante, caso se pretenda conhecer de quanto tempo foi o tempo da operação. Veja abaixo o processo:

Como:

$M = C(1 + in)$

Em que:

$M = 3.250$

$n = ?$

$i = 10\%$ a.m.

$C = 2.500$

Substituindo os valores:

$3.250 = 2.500(1 + 0{,}1 \cdot n)$

Aplica-se a propriedade distributiva da multiplicação:

$3.250 = 2.500 \cdot 1 + 2.500 \cdot 0{,}1n \rightarrow 3.250 = 2.500 + 250n$

$3.250 - 2.500 = 250n \rightarrow 750 = 250n$

$n = \frac{750}{250} \rightarrow n = 3$ meses

Exercícios

1. Qual o montante produzido por um capital de $ 1.000,00 aplicado à taxa de juros simples de 17,28% ao ano durante 6 meses?

2. Um capital de $ 30.000,00 aplicado à taxa de juros simples de 0,99% ao mês, durante um biênio, produzirá qual montante?

3. Qual é o valor dos juros produzidos por um capital de $ 1.000,00 aplicado à taxa de 5% ao mês durante 21 dias?

Anotações

TAXA PROPORCIONAL

Fonte: SHUTTERSTOCK.COM

Muitas vezes, precisamos analisar não apenas uma taxa, mas comparar duas ou mais taxas para avaliar qual seria a mais vantajosa ou menos custosa em uma operação, assim como aquela que é mais benéfica quando se trata de aplicações.

Vamos considerar as duas taxas de juros definidas como i_1 e i_2, e que estão relacionadas diretamente a seus períodos, chamados de n_1 e n_2, que iremos estruturar na fórmula abaixo:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Por exemplo, quando precisamos verificar se as taxas de 5% ao trimestre e de 20% ao ano são proporcionais.

Resolvendo na fórmula acima, temos:

i_1 = 5% ao trimestre (a.t.) ou 0,05 a.t.

i_2 = 20% ao ano (a.a.) ou 0,2 a.a.

n_1 = 3 meses

n_2 = 12 meses

Anotações

Como: Substituindo-se os valores:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_1}{n_2} \qquad \frac{0{,}05}{0{,}20} = \frac{3}{12}$$

Obtemos:

0,05 x 12 = **0,60** e 0,20 x 3 = **0,60**

Produzindo o mesmo produto, estamos diante de grande proporcionais, logo as taxas dadas, nos períodos utilizados, são proporcionais.

Cabe ainda outra situação na qual, sendo dada uma taxa e período específicos, deseja-se conhecer qual seria a taxa proporcional em outro período.

Por exemplo, considere um investimento com taxa de juros de 36% ao ano, sendo necessário determinar a taxa proporcional mensal.

Novamente, conforme critério abordado, temos:

i = 0,36 a.a.

i = ?

n = 12 meses

n_2 = 1 mês

Como: Substituindo-se os valores:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_1}{n_2} \qquad \frac{0{,}36}{i_2} = \frac{12}{1}$$

Obtemos:

$$0{,}36 \text{ x } 1 = i_2 \text{ x } 12 \rightarrow i_2 = \frac{0{,}36}{12} = 0{,}02 \text{ a.m. ou i} = 2\% \text{ a.m.}$$

Anotações

Assim, determina-se que a taxa de 2% aplicada em período mensal é proporcional à taxa de 36% utilizada em período anual.

Exemplo 0-6

Considerando uma taxa anual de 18%, qual seria sua proporcional ao mês? Fazendo uso da calculadora financeira HP12C, teremos:

18	ENTER	G	12÷	→	1,5

Portanto, 18% a.a é proporcional a 1,5% a.m.

TAXA EQUIVALENTE

Outro conceito interessante é o de taxas equivalentes, pois indica que duas taxas são equivalentes quando, aplicando um mesmo capital em ambas as taxas e pelo mesmo intervalo de tempo, o juro produzido é o mesmo.

Quando se fala sobre juros simples, esse conceito é basicamente o mesmo da **taxa proporcional**, pois, como tratado anteriormente, a equação de juros simples é uma equação do primeiro grau e sua representação gráfica – uma reta – se estende infinitamente sem quaisquer variações ao longo do tempo. Em outras palavras, significa que o valor recebido em um dia de aplicação seria equivalente ou proporcional a esta mesma aplicação por trinta dias, já que bastaria multiplicar por trinta o valor diário recebido ou ainda dividir por trinta o valor mensal produzido.

Esses conceitos serão abordados diferentemente quando estudarmos os Juros Compostos.

Anotações

VALOR NOMINAL, VALOR ATUAL E VALOR FUTURO

Valor Nominal

Fonte: PHOTOS.COM

Quando assumimos um compromisso para pagar determinada dívida em data específica, estamos falando a respeito de valor nominal, porque, ao darmos um cheque pré-datado, por exemplo, indicamos um valor nele. O mesmo ocorre quando financiamos um valor em parcelas, porque sabemos qual exatamente será essa parcela. Assim, entendemos que valor nominal é exatamente aquele valor expresso no documento, seja ele cheque, duplicada, boleto ou nota promissória, que não se alterará, já que o tempo para resgate ou pagamento também está determinado.

O fato de que, não ocorrendo o pagamento da data prevista, incidirião, por exemplo, multa e juros de mora durante o período de atraso, pois estes se calculam sobre o valor nominal, alterando o valor de cobrança e não o próprio valor nominal.

Anotações

Exemplo 0-7

Um industrial adquire um equipamento novo hoje e vai liquidá-lo por $30.000,00 no final de 12 meses. A situação poderia ser representada conforme diagrama a seguir:

O valor nominal do equipamento é, portanto, igual a $30.000,00 no mês 12.

Valor Atual

Ao se tratar sobre valor atual, estamos buscando conhecer o valor de um compromisso em momento anterior ao do vencimento. Voltando ao exemplo de um cheque pré-datado, nota promissória ou duplicata, ao se pretender pagar antecipadamente, é admissível que se modifique o seu valor para menos, uma vez que para pagamento com prazo foram embutidos juros.

Para se calcular o valor atual, faz-se necessário que seja especificado o **valor nominal**, a **taxa de juros** incidente na operação e qual o **tempo de antecipação**.

Exemplo 0-8

Consideremos por exemplo a seguinte situação: ao adquirir um novo notebook, você deixou na loja um cheque pré-datado com vencimento em três meses no valor de $3.250,00. Note que

Anotações

não foi especificado o valor atual do bem, também chamado de Capital (C) e tampouco a taxa de juros utilizada na operação. É necessário ter em mente que, uma vez tomada a decisão de compra ou investimento, esses fatores têm absoluta influência sobre os resultados do negócio realizado.

Retomando o exemplo dado no cálculo do Capital (C), com uma taxa na operação estabelecida em 10% a.m., teremos:

Como:	Substituindo os valores:
$M = C\,(1 + in)$	$3.250 = C(1 + 0{,}1 \,.\, 3) \rightarrow 3.250 = 1{,}3\,C$
Em que:	$C = \frac{3.250}{1{,}3} \rightarrow C = 2.500{,}00$
$M = 3.250$	
$n = 3$ meses	
$i = 10\%$ a.m.	
$C = ?$	

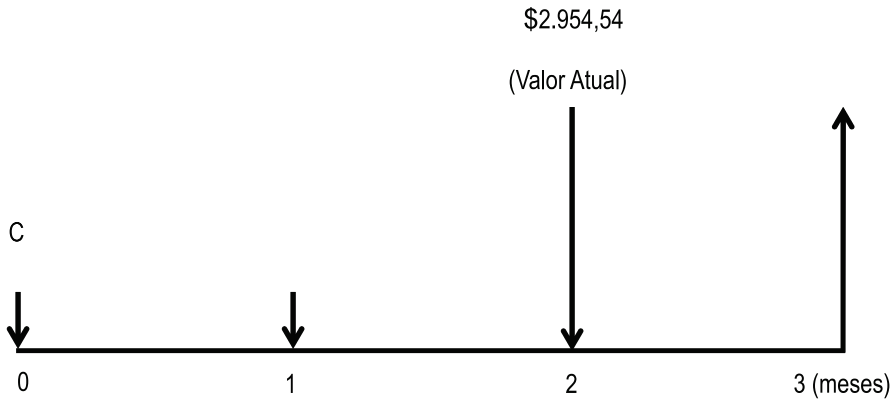
Podemos agora demonstrar essa operação com o diagrama abaixo:

Anotações

Esse diagrama representa o valor atual dessa operação. No exemplo dado, foi adquirido um equipamento com três meses de prazo e, abatendo-se esses juros do financiamento, chegou-se ao valor à vista de $2.500,00.

Considere uma nova situação em que, passados dois meses da compra, você receba um bônus em seu trabalho e quer utilizá-lo para quitar sua dívida. O mesmo cálculo seria realizado, mas o tempo (n) em seu cálculo seria modificado de três meses para um, já que é este o tempo que falta para concluir a operação.

Essa nova análise é demonstrada no diagrama a seguir:



O interessante dessa forma de cálculo é que seria possível calcular o valor para qualquer momento além do "tempo zero".

Valor Futuro

Ao falarmos sobre valor futuro, estamos pensando a respeito do valor de um título (direito ou obrigação) em momento diferente do atual. Vamos nos lembrar dos dois fatores essenciais da matemática financeira: capital e o tempo. Isso equivale a dizer que um capital de $100 hoje tem valor diferente de $100 daqui a um ano. Apesar de a quantidade de dinheiro ser a mesma,

Anotações

o momento de sua disponibilidade atribui a essa quantidade de dinheiro um valor diferente.

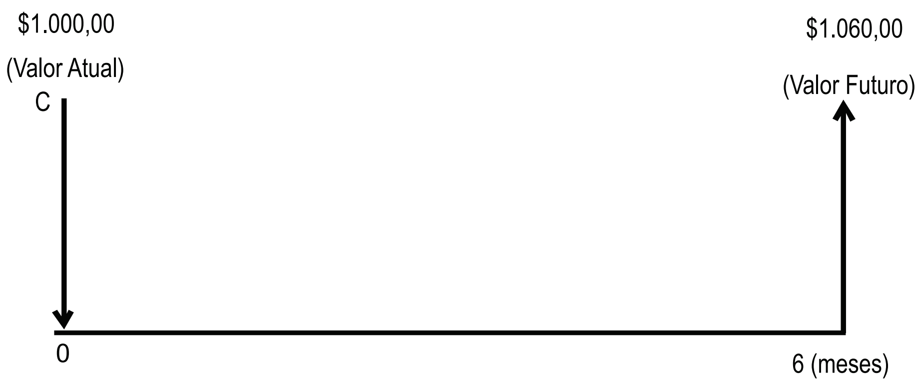
Dessa forma, ao considerarmos contrair uma dívida ou realizar um investimento, esse capital será remunerado a uma taxa de juros que, no transcorrer do tempo, significará o aumento deste mesmo capital.

Exemplo 0-9

Considere que você guardou seu 13º salário para fazer sua viagem de férias em julho do ano seguinte. Sua expectativa é de que, por não ter consumido esse salário extra, seis meses após seu depósito você receba mais do que depositou. Aplicando \$1.000,00 à taxa de 1% ao mês, em juros simples, você terá em seis meses:

Como:	Substituindo os valores:
$M = C (1 + in)$	$M = 1.000(1 + 0{,}01 \cdot 6)$
Em que:	$M = 1.000 \cdot 1{,}06$
$M = ?$	$M = 1.060{,}00$
$n = 6$ meses	
$i = 1\%$ a.m.	
$C = 1.000{,}00$	

Assim, poderíamos representar o diagrama dessa operação da seguinte forma:



Na calculadora HP12C, a resolução do problema seria:

1000	ENTER	1	ENTER	1	ENTER

100	÷	6	×	+	×	→	1.060,00

Para mais informações sobre o sistema de cálculo adotado na HP12C, veja o Apêndice B.

Sugestão de Vídeo

Rede Globo: Jornal Nacional - Comparar preços e juros é fundamental para comprar a prazo.
<http://www.youtube.com/watch?v=A-X4-bSxfeQ>.

DIAGRAMAS DE CAPITAL NO TEMPO

Você tem percebido que utilizamos muitas vezes os diagramas de capital no tempo. Essa forma de representação é meio eficiente para visualizar o problema em análise e desenvolver, a partir daí, o melhor processo de solução. Sim, eu disse O MELHOR, porque em muitos casos não existe apenas um único método, apesar de que sempre deverão chegar à mesma resposta.

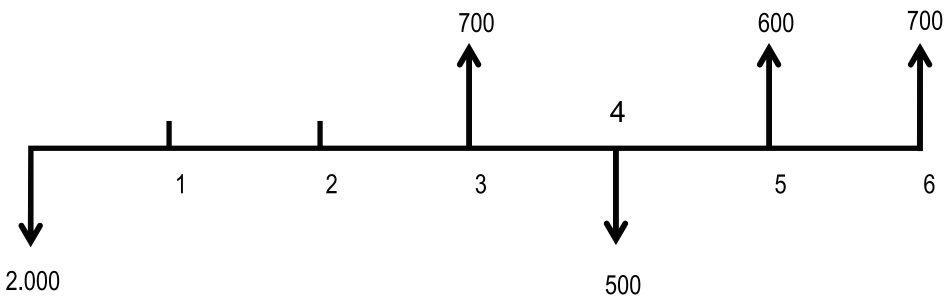
Anotações

Reflita!

A regra básica em matemática financeira é que não se pode comparar, somar ou subtrair dinheiros ($) que estejam em datas diferentes. E como o tempo e dinheiro são unidades separadas, a taxa de juros utilizada nesse cálculo deverá estar em harmonia com esse tempo.

A taxa de juros i e o tempo n deverão estar expressos na mesma temporalidade (em forma compatível). Assim, se a taxa de juros for expressa em anos (“aa”), o tempo n deverá estar expresso em anos, se a taxa de juros for expressa em meses (“am”) o tempo n deverá estar expresso em meses e assim por diante.

Como pode ser observado, as imagens representam um fluxo (entrada e saída) de dinheiro no tempo. Muito conhecido também como Fluxo de Caixa, basicamente pode ser representado da seguinte maneira:



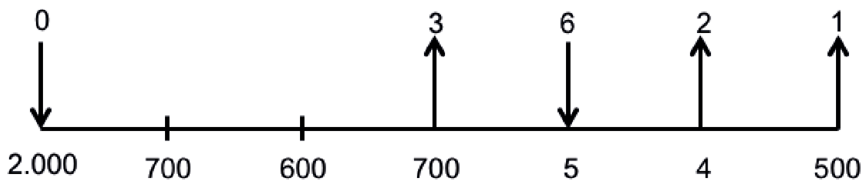
Representar dessa forma um fluxo de caixa é útil em situações nas quais é necessário visualizar o que ocorre quando existem entradas e saídas de capital em um determinado tempo.

Convencionou-se estruturar o diagrama de fluxo de caixa conforme os seguintes parâmetros:

- Horizontalmente, é posicionada uma reta que representa uma escala de tempo, com o transcurso desse tempo, iniciando-se à esquerda (tempo zero) e avançando à direita. Os períodos são representados em intervalos e os números indicam a cumulatividade do tempo. Mesmo que não se faça o uso de uma escala, como no exemplo acima, é necessária a indicação dos valores e tempos conforme ocorram.

- As flechas indicam qual é a natureza no valor apontado no fluxo de caixa, ou seja, se esse valor é de entrada ou saída. Uma seta para baixo significa uma saída ou aplicação de dinheiro (ou valor negativo), enquanto que uma seta para cima significa uma entrada ou recebimento de dinheiro (ou valor positivo). Fazer setas maiores para valores maiores e setas menores para valores menores está em desuso, pois, apesar de tornar a convenção completa, o apontamento dos valores em números próximo de cada seta simplifica o diagrama e torna sua criação mais rápida.

Esse mesmo diagrama poderia ser corretamente montado conforme abaixo:

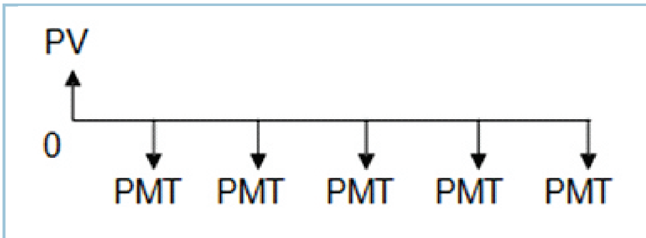
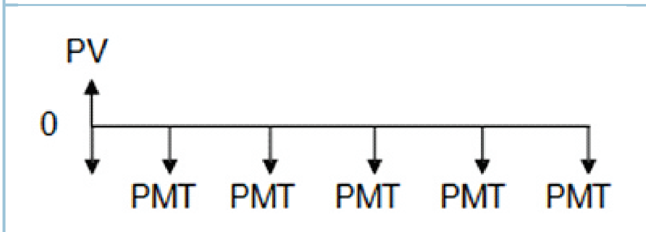
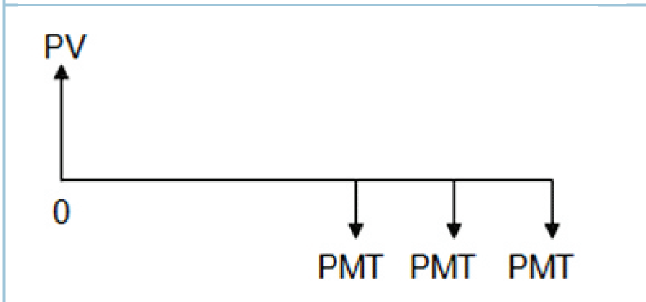
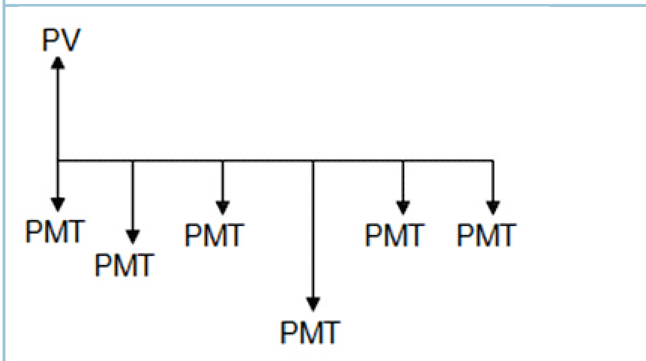
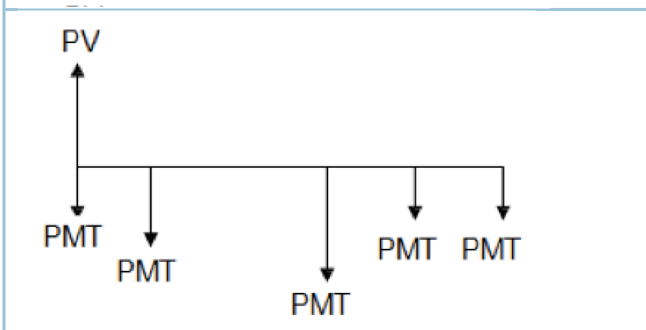


E como em uma operação financeira o dinheiro troca de mãos, o diagrama de fluxo de caixa depende da posição que é analisada. Por exemplo, consideremos que uma pessoa empreste $1.000,00 à taxa de juros simples de 10% a.a., pelo prazo de 1 ano. Para a pessoa que empresta o dinheiro, o diagrama é o que segue abaixo:

E para a pessoa que toma emprestado o dinheiro, tem-se o seguinte diagrama:

Ambos os diagramas representam a mesma operação, mas cada um de um prisma diferente.

Outros diagramas de fluxo de caixa e suas respectivas intepretações.

	Prestações iguais Postecipadas, ou seja, sem entrada.
	Prestações iguais Antecipadas, ou seja, com entrada.
	Prestações iguais com Carência.
	Prestações com Valores diferentes Com Períodos Iguais.
	Prestações com Valores diferentes Com Períodos Diferentes.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Vimos aqui os aspectos básicos da capitalização simples, em que nossos primeiros contatos com fórmulas e compreensão sobre o universo da matemática financeira foram realizados.

Essas informações, apesar de não serem utilizadas no dia a dia da empresa, servem de fundamento para a construção de um conhecimento mais complexo que está por vir. Assim, revise seus exercícios e considere reler esta Unidade, pois a boa assimilação deste conteúdo certamente permitirá compreender com maior facilidade os assuntos tratados nas próximas Unidades.

Exercícios

4. O banco “X” empresta ao Sr. Carlos a quantia de $300.000,00, à taxa de 5% ao ano, para ser paga após três anos e meio. Calcule o montante dessa operação.

5. A que taxa devemos aplicar um certo capital para que, em 8 meses, ele dobre de valor?

6. Um capital de $7.000,00 foi aplicado a juros simples durante 1 ano e meio à taxa de 15% a.s. Calcular os valores dos juros e do montante obtidos no final desse prazo.

7. Um capital de $900,00 foi aplicado a juros simples à taxa de 5% a.a., sendo obtidos $15,00 de juros. Calcular o prazo de aplicação em meses.

8. A empresa Monitoria S/A aplicou o valor de $5.000,00 a juros de 1,5% a.m. e pretende sacar o valor após 12 meses. Qual o montante a ser regatado?

9. Certo cliente adquire um título por $60.000,00 e resgata $119.350,00 após 9 meses. Qual a taxa de juros dessa operação?

10. Quais os juros recebidos por um comerciante que investe $20.000,00 à taxa de 5% a.m. durante 2 meses?

11. Calcular o prazo, em anos, necessário para um capital triplique de valor, caso seja aplicado à taxa de 10% a.t.

12. Um capital aplicado por 16 meses gerou $13.440,00 de juros. Sabendo que a taxa de juros mensal foi de 6%, calcule o valor do capital inicial.

13. Qual será o valor dos juros de um capital de $3.145,00 aplicado a uma taxa de 0,5% a.m. durante 1 ano e meio?

14. Um capital de \$4.250,00, aplicado a uma taxa de 3% a.m., produziu um montante de \$6.162,50. Qual foi o período de aplicação?

15. Danilo decidiu investir \$1.035,00 em uma instituição financeira que opera com uma taxa de juros simples de 1,8% a.m. durante 1 ano. Qual será o montante ao final do período?

16. Um empréstimo de \$15.000,00 foi feito para ser pago em 24 meses, foi liquidado, ao final do período, por \$23.000,00. Qual a taxa de juros utilizada?

17. Em quantos meses um capital de \$750,00 renderá juros iguais a um terço de seu valor, se aplicado a uma taxa de 6,67% a.m.?

18. Gilberto solicitou em seu banco um empréstimo de \$6.000,00. O pagamento será feito em 36 meses com incidência de juros de 2,7% ao mês. Qual o valor a ser pago para liquidar a dívida?

19. Por um empréstimo de \$12.450,00, pagou-se \$3.200,00 de juros. Sabendo que a taxa de juros utilizada foi de 1,79% a.m., qual foi o período dessa operação?

20. Leonardo solicitou um empréstimo de \$3.990,00 para pagar em 6 meses. A financeira cobrou juros de 1,97% a.m. Qual o valor dos juros a pagar?

21. Qual a taxa de juros cobrada por um banco, sabendo que, por um empréstimo de \$500,00, pagou-se \$115,00 de juros em 3 meses?

22. Qual o capital que aplicado a juros simples de 12% a.a., durante 5 meses, gerou um montante de \$1.260,00?

23. Ao se aplicar a importância de \$5.000,00, à taxa de 8% a.a., obtém-se, após certo período, o montante de \$6.000,00. Qual é o período de aplicação?

UNIDADE III

DESCONTOS SIMPLES

Professor Dr. Daniel Eduardo dos Santos

Objetivos de Aprendizagem

- Reconhecer quando uma operação é de desconto racional ou desconto comercial.
- Calcular o valor do desconto, valor descontado, taxa de desconto e valor nominal.
- Compreender as relações e diferenças entre taxas de juros e taxas de desconto.

Plano de Estudo

A seguir, apresentam-se os tópicos que você estudará nesta unidade:

- **Desconto Racional ou Desconto “por dentro”**
- **Desconto Comercial ou Desconto “por fora”**
- **Taxa de Juros Efetiva**

INTRODUÇÃO

Fonte: SHUTTERSTOCK.COM

A ideia de desconto está associada com o abatimento dado a um valor monetário em determinadas condições. Segundo (HAZZAN; POMPEU, 2007), esse conceito se confunde com o costume popular como, por exemplo, quando uma compra é feita em grande quantidade, é comum o vendedor conceder desconto no preço por unidade.

Outra relação é aquela na qual o vendedor concede um prazo para o pagamento; e em se desejando quitar à vista, normalmente se proporciona um desconto sobre o preço oferecido.

Em ambas as situações, o desconto é expresso por um percentual aplicado sobre o preço indicado, ou seja, a base de cálculo do desconto é preço “cheio”, de tabela, que deveria ser pago na data futura de vencimento, conforme exemplo anterior dado.

A figura a seguir demonstra em termos práticos essa situação, em que um valor de $1.700,00 vencível em 8 meses, para quitação na data de hoje, teria um desconto e o valor pago seria $918,45.

Algo semelhante ocorre quando se faz uma aplicação de capital com vencimento predeterminado, ou seja, o investidor deixa seu dinheiro retido em um investimento por um tempo específico, recebendo um comprovante de aplicação. Se esse investidor vier a necessitar de dinheiro antes do vencimento do prazo do investimento, ele deve retornar à instituição onde fez sua aplicação, transferir o título investido e levantar o capital e juros já ganhos neste período.

Ainda ocorre que uma empresa, realizando uma venda a prazo, recebe pela entrega das suas mercadorias uma duplicata com vencimento determinado. Caso a empresa necessite de dinheiro para suprir suas operações, poderá ir a um banco e transferir a posse da duplicata recebendo um valor descontado em troca. A seguir, uma figura ilustra o conceito de desconto.

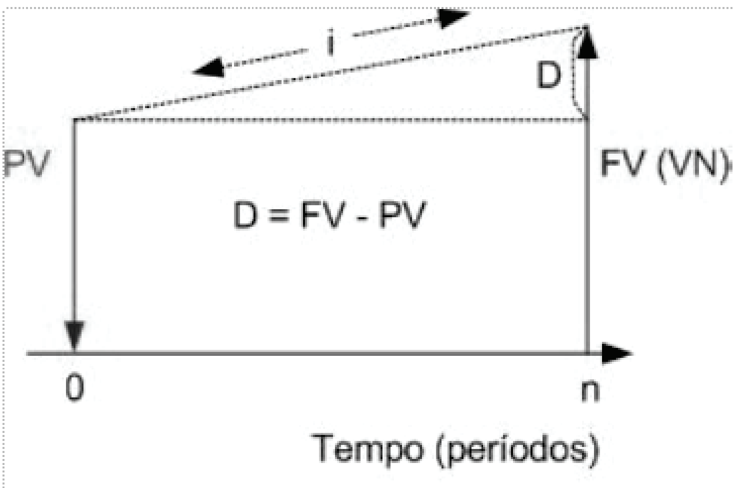


Figura 2 – Conceito de Desconto

Fonte: o autor

Todas essas operações acima descritas são chamadas de **desconto e, em geral, são** realizadas para **descontar um título** ou cheque no banco.

Anotações

Assim, desconto é operação inversa à capitalização, em que trazemos um valor futuro para a data presente, descontando os juros que estão embutidos no valor futuro.

Sugestão de Vídeo

Para esvaziar os estoques, as lojas estão oferecendo descontos de até 70%.
<http://www.youtube.com/watch?v=JIw-v4ESC1E>.

Conceitos básicos:

- *Valor de face*: valor de um título na data de sua emissão.
- *Valor nominal*: valor de um título na data de seu vencimento.
- *Valor atual*: valor de um título em uma data intermediária, entre a de emissão e a de vencimento.

Existem dois tipos de descontos: Racional e Comercial. Ambos podem ser utilizados tanto em juros simples quanto em juros compostos.

Simbologia Utilizada

- *N* - Valor Nominal.
- *Dr* - Valor do Desconto Racional Simples.
- *Vr* - Valor Atual Racional Simples.
- *Dc* - Valor do Desconto Comercial Simples.
- *Vc* - Valor Atual Comercial Simples.
- *Drc* - Valor do Desconto Racional Composto.

Anotações

- *Vrc* - Valor Atual Racional Composto.
- *i* - Taxa de Desconto.
- *n* - Número de períodos que faltam para o vencimento da dívida.

DESCONTO COMERCIAL OU DESCONTO "POR FORA"

Chamamos de valor nominal e indicamos por N o valor do título a ser descontado. Utilizando--nos do prazo *n* para o vencimento do título e como *d* a taxa de desconto utilizada na operação, a fórmula básica dessa modalidade de desconto é dada por:

$$D = N \,.\, d \,.\, n$$

E, analogamente ao que foi exposto em juros simples, a diferença entre o valor nominal (N) e o valor do desconto (D) produz o que chamamos de Valor Descontado (Vd), que é o valor líquido recebido. Uma forma de construir em fórmula essa relação seria:

$$Vd = N - D$$

Vamos utilizar um exemplo para analisarmos uma operação de desconto: um título de dívida

Anotações

com as seguintes características: data de emissão: 1/1/X12; data de vencimento: 1/1/X13; favorecido: João das Couves; emitente: José da Abóbora; e valor nominal no vencimento: $1.000,00. Em 1/3/X12, João das Couves vai ao Banco Bão e propõe ao mesmo descontar esse título. O Banco, após considerar todos os aspectos creditícios, libera a João a quantia de $700,00 pelo título naquela data. Não se esqueça de que o proprietário do crédito ainda é João, pois o banco não assume a responsabilidade plena pelo título: João das Couves é solidário com José Abóbora em sua dívida perante o banco. No caso do inadimplemento de José, João deverá pagar o título ao banco.

Para o exemplo acima, que pode ser visualizado na figura a seguir, tem-se o seguinte resumo de dados:

- N = FV = $ 1.000.
- Valor de compra = Valor Descontado (Vd) = PV = $ 700.
- Desconto: D = FV - PV = 1.000 - 700 = $ 300.

Em outras palavras, o Banco Bão despendeu $ 700,00 em 1/3/X12 a favor de João e receberá $1.000,00 de José em 1/1/X13, percebendo, portanto, $300,00 pela prestação desse serviço.

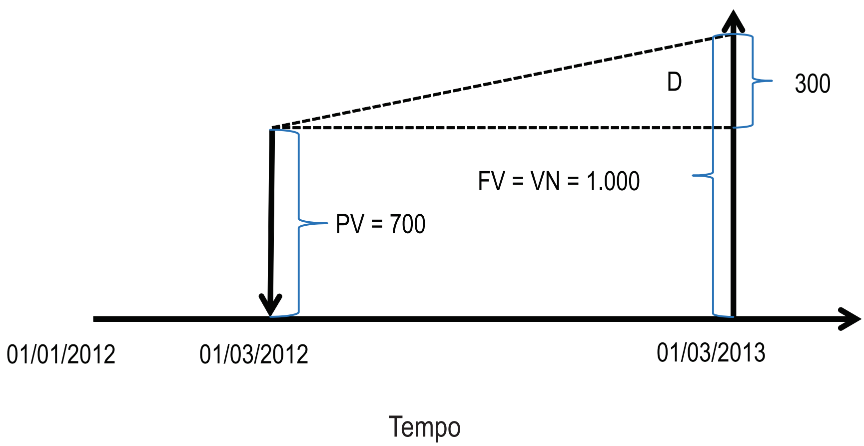


Figura3 – Exemplo de exercício

Fonte: o autor

Fique atento ao fato de que, no desenvolvimento da solução desse exemplo, o valor inicial à vista que originou o título de dívida (ou capital) não foi é considerado; essa é uma situação comum em finanças porque a operação financeira ocorreu anteriormente, e o que interessa é o hoje e o amanhã, e não o passado. Essa modalidade de desconto – na prática – é utilizada somente sob o regime de juros simples.

Exemplo 2-1

Uma duplicata de $ 18.000,00 foi descontada em um banco dois meses antes do vencimento a uma taxa de desconto comercial de 2,5% a.m. Obtenha o valor do desconto e o valor líquido recebido pela empresa.

Resolução:

$D = 18.000 \; . \; (0{,}025) \; . \; 2 = 900$

→ O desconto dessa duplicata foi de $900,00.

$Vd = 18.000 - 900 = 17.100$

→ O valor descontado (valor líquido) recebido pela empresa foi de $17.100,00.

Exercícios

24. Uma Duplicata com valor nominal de $12.000,00 foi descontada 2 meses antes do vencimento a uma taxa de 17,17% ao ano. Qual foi o valor do desconto comercial simples?

25. Uma Duplicata no valor nominal de $25.000,00 foi liquidada 12 meses antes do seu vencimento. Foi pago por ela a importância de $18.960,00. Calcule a taxa de desconto comercial simples da operação e a taxa efetiva que vigorou na transação.

26. André decide descontar um Título três meses antes do vencimento. Sabendo que o valor do título é $4.500,00 e que a taxa de desconto é de 1,5% a.m., qual o valor do desconto comercial?

27. Qual o valor atual comercial de uma Duplicata com valor nominal de $ 5.000,00, que foi descontada 3 meses antes do vencimento a uma taxa de desconto simples de 1,5% a.m.?

28. Um Título foi descontado 3 meses antes do vencimento à taxa de 24% a.a. Sabendo que

Anotações

o valor atual comercial apurado foi de \$17.860,00, qual era o valor nominal desse Título? (desconto comercial)

29. Uma Duplicata com valor nominal de \$45.000,00 é descontada 6 meses antes do vencimento à taxa de 30% a.a. Qual o valor de desconto comercial?

30. O valor nominal de um Título é \$35.000,00. Caso esse Título seja descontado 1 mês antes do vencimento, a uma taxa de 3% a.t., qual será o valor do desconto comercial simples?

31. Um título no valor nominal de \$20.000,00 sofre um desconto comercial simples de \$1.800,00 três meses antes de seu vencimento. Calcule a taxa mensal de desconto.

32. Uma Duplicata de valor nominal de \$20.000,00 foi resgatada por \$ 19.250,00. Se a taxa de desconto comercial simples era de 90% a.a., quanto tempo restava para o vencimento dessa Duplicata?

33. Qual o valor atual comercial recebido pelo detentor de um Título no valor de \$ 4.000,00, descontado 7 meses antes do vencimento, a uma taxa de 6,5% a.m. Qual foi a taxa efetiva de desconto comercial aplicada na operação?

34. Um Título com valor nominal de \$ 6.000,00 foi descontado 5 meses antes do vencimento a uma taxa de 5% a.m. Qual o valor do desconto comercial simples e qual o valor recebido pelo detentor do título?

35. Ao quitar uma dívida, obteve-se um desconto comercial simples. O valor nominal era de \$ 15.000, e a taxa de desconto de 2,75% ao mês. A antecipação foi de 9 meses. Qual o valor pago pela dívida?

36. Uma nota promissória de \$22.000,00 é descontada 6 meses antes do vencimento a uma taxa de desconto comercial simples de 1,6% a.m. Calcule o valor atual da nota.

37. Calcule o valor atual comercial simples recebido por Diego pelo seu título no valor de \$5.000,00, descontado 3 meses antes do vencimento, a uma taxa de 8,5% a.m. Calcule também a taxa efetiva de desconto comercial dessa operação?

38. Em uma operação de desconto comercial simples de um título com valor nominal de \$250,00, o desconto auferido foi de \$25,00. Considerando que a taxa utilizada foi de 10% ao mês, qual foi o tempo de antecipação?

Anotações

39. Uma duplicata com valor nominal de R$35.000,00 foi descontada 8 meses antes do vencimento a uma taxa de desconto comercial simples de 24% a.a, determine o valor recebido pelo detentor do título.

40. Por quanto tempo devo antecipar o pagamento de um título de $1.100,00 para obter um desconto comercial de $300,00, a uma taxa de 3,5% ao mês?

41. Qual o valor atual comercial recebido por um título de $900,00 descontado 2 meses antes do vencimento a uma taxa de 1,5% ao mês?

42. Qual é a taxa de juros que devo descontar em um título de $15.00,00 para obter um desconto comercial de $1.500,00, descontado 3 meses antes do vencimento?

43. Uma duplicata de $250.000,00 foi resgatada por $ 215.000,00 antes do seu vencimento. Calcular o tempo de antecipação, sabendo que a taxa de desconto comercial foi de 3,5 % ao mês.

Saiba mais sobre o **Assunto**

Pagamentos à vista

Já ouviu dizer que pagamento à vista merece desconto? Ou lhe disseram que essa história não existe? No oitavo programa do Educação Financeira, você ficará sabendo por que pode e deve exigir desconto quando fizer uma compra à vista.

<http://www.tveducacaofinanceira.com.br/episodios.asp?IDVideo=TVEF_Episodio08>.

Anotações

DESCONTO RACIONAL OU DESCONTO "POR DENTRO"

Fórmulas

Fonte: SHUTTERSTOCK.COM

As três fórmulas a seguir, assim como suas variações, são utilizáveis no cálculo do desconto por dentro.

1) **N = Vr (1+ i.n)** → $Vr = \frac{N}{1+i.n}$ → $i = \frac{\frac{N}{Vr}-1}{n}$ → $n = \frac{\frac{N}{Vr}-1}{i}$

2) **N = Vr + Dr** → Vr = N – Dr → Dr = N – Vr

3) **Dr =** $\frac{N.i.n}{1+i.n}$

Atente ao fato de que nas variações apontadas na fórmula n.1 e n.2 apenas isolou-se cada elemento da fórmula, de modo a facilitar sua resolução, mas a compreensão das mesmas em sua forma básica (negrito) produz idêntico resultado.

Anotações

Outro ponto interessante é que, sob um olhar mais atento, a formula básica do desconto racional tem a mesma estrutura e produz os mesmos efeitos da fórmula dos juros simples. Isto equivale a dizer que a base de cálculo do desconto por dentro é o valor líquido liberado e não o valor nominal do título, como é o caso com o desconto por fora (ou comercial).

Exemplo 2-2

Um título de valor nominal de $ 5.000,00 que vence daqui a 60 dias é levado a um banco para desconto. O banco opera em desconto racional simples e cobra juros de 4% a.m. (ao mês). Qual o valor do desconto e qual o valor recebido pelo detentor do título?

Temos:

FV = 5.000, n = 2 meses, i = 4% a.m.

Solução: é o caso mais típico de desconto de títulos. A taxa de juros está expressa em base mensal e por isso o prazo também será expresso nessa base e n = 2 meses.

A fórmula mais apropriada para essa resolução é

$$Dr = \frac{N.i.n}{1+i.n}$$

E, conforme os dados acima, basta substituir para desenvolvermos a solução.

a) $Dr = \frac{5.000\ .\ 0,04\ .2}{(1+0,04\ .2)} = \frac{400}{1,08}$ = \$ 370, 37

b) O portador do título receberá: PV = FV – Dr =5.000 – 370,37 → PV = $ 4.629,63

Exemplo 2-3

Um título que vence daqui a 60 dias foi descontado em um banco e o valor do desconto foi $370,37. O banco opera em desconto racional simples e cobra juros de 4% a.m. (ao mês). Qual o valor nominal e o valor presente desse título?

Anotações

Temos: FV = ?, Dr = 370,37, n = 2 meses, i = 4% a.m.

Solução: a taxa de juros está expressa em base mensal e por isso o prazo também será expresso nessa base e n= 2 meses.

a) Aplicação da fórmula:

$Dr = \frac{N.i.n}{1+i.n}$

a) $370{,}37 = \frac{N.0{,}04\,.2}{1+0{,}04\,.2} \rightarrow 370{,}37 = \frac{0{,}08N}{1{,}08} \rightarrow 370{,}37\ .\ 1{,}08 = 0{,}08N \rightarrow N = \frac{399{,}99}{0{,}08}$

N = 4.999,99, ou seja, o valor nominal desse título era de $ 5.000,00.

b) O Valor Descontado (Vd) ou PV é 5.000,00 – 370,37 = 4.629,63

Exercícios

44. Marta descontou um Título no valor de $15.000,00 1 mês e 15 dias antes do vencimento. Considerando que a taxa cobrada foi de 4,5% a.m., qual o valor do desconto racional simples?

45. Desconta-se racionalmente uma Nota Promissória 9 meses antes do vencimento, a uma taxa de 5,8% a.m. Sabendo que o valor descontado foi $ 5.250,00, qual era o valor nominal dessa Nota Promissória?

46. Uma Nota Promissória com valor nominal de $25.000,00 foi descontada 3 meses antes do vencimento a uma taxa de 4% a.m. Qual o valor do desconto racional simples?

47. Paulo, ao resgatar um Título com valor nominal de $50.000,00 sob o critério de desconto racional simples, desembolsou a quantia de $32.000,00. Considerando que a operação foi efetuada com base em uma taxa de 23% a.a., calcule o período de antecipação.

48. Qual o valor a ser pago hoje por uma Duplicata de $58.000,00, com vencimento para 60 dias, se for descontada sob o critério de desconto racional simples, a uma taxa de 3% a.m.?

49. Por um Título com valor nominal de $1.200,00, com vencimento para 16 de outubro,

Anotações

Manuel obteve o valor de $1.110,00 em 1º de setembro do mesmo ano. Qual foi a taxa mensal de desconto racional simples utilizada pelo banco?

50. Uma Nota Promissória foi descontada 1 ano antes do vencimento a uma taxa de 20% ao ano. Usando o desconto racional simples e sabendo que valor atual foi de $30.000,00, qual seria o seu valor nominal?

51. Uma dívida de $10.000,00 será saldada 2 meses antes de seu vencimento. Qual será o valor do desconto racional simples, se a taxa de juros for de 16% a.m.?

52. Quanto devo pagar por um Título com valor nominal de $10.000,00, com vencimento para daqui a 60 dias, se desejo ter uma taxa de retorno de 24% ao ano? (desconto racional simples)

53. Antecipando 3 meses um Título com valor nominal de $600,00, obtenho um desconto de $41,86. Qual é a taxa de desconto racional simples mensal dessa operação?

54. Ao descontar um Título no valor de $46.800,00, a uma taxa de 6,7% a.m., 6 meses de antes do vencimento, o valor do desconto racional simples será?

55. Quanto devo pagar por uma Promissória com valor nominal de $24.000,00, com vencimento para 9 meses, se pretendo obter um rendimento de 12% a.t?

56. Uma Duplicata foi descontada a uma taxa de 4,5% a.m., 210 dias antes do vencimento. Sabendo que o valor atual racional foi $19.452,48, calcule o valor nominal dessa Duplicata.

57. Em uma operação de desconto racional simples, com uma taxa de 12% a.m., o valor atual de um Título é igual à metade do seu valor nominal. Qual o tempo necessário para que isso ocorra?

58. $981,00 é o valor do desconto comercial simples de um Título com valor nominal de $10.900,00, se descontado 3 meses antes do vencimento. Calcule o valor do desconto racional simples desse Título, considerando a mesma taxa de desconto mensal.

59. Se um Título for resgatado três meses antes do vencimento por $ 53.409,00, à taxa de desconto racional simples de 84% a.a., qual é o valor nominal desse Título?

Anotações

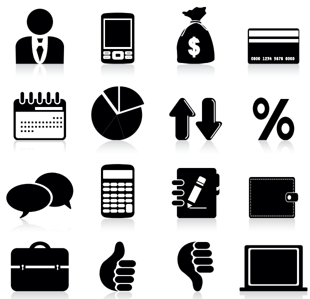
60. Uma Nota Promissória foi descontada racionalmente com 78 dias de antecipação por $3.652,00, à taxa de juros simples de 4% a.m. Qual o valor do desconto auferido nessa operação?

61. Marina possui um CDB de $1.300,00, com vencimento para daqui a 3 meses. A fim de comprar um notebook que está em promoção para pagamento à vista, ela pretende descontar esse Título hoje. Considerando o critério de desconto racional simples e taxa de 1,5% a.m., qual será o valor de resgate desse CDB?

62. Diego resgatou um Título de $1.150,00, a uma taxa de desconto racional simples de 2% a.m., tendo recebido a importância de $ 1.045,45. Quanto foi o período de antecipação dessa operação?

63. Se uma dívida de $ 6.462,20 for quitada 60 dias antes do prazo estabelecido, à taxa de juros de 60% a.a., qual será o valor do desconto racional simples?

TAXA DE JUROS EFETIVA



Fonte: SHUTTERSTOCK.COM

Como pôde ser visto até aqui, existe uma estreita relação entre taxas de juros e taxas de desconto. Apesar de operarem sobre os mesmos valores, suas bases de cálculo diferem e por essa razão produzem taxas também diferentes. Enquanto nos juros a base de cálculo é o valor presente, e sobre este vai se calculando os juros periódicos, no desconto a base de cálculo é o valor futuro ou montante, também identificado como Valor Nominal, a partir do qual vai se descontando mês ante mês o custo do capital.

Anotações

A relação entre eles é direta, e é possível fazer o cálculo da taxa de juros a partir da taxa de desconto e vice-versa. Isso é interessante especialmente quando for necessária a comparação entre duas operações: uma de capitalização (empréstimos) e outra de desconto de títulos.

A fórmula básica para conversão dessas taxas é:

$$i = \frac{d}{1-dn}$$

Em que:

i = taxa de juros

d = taxa de desconto

n = número de períodos da operação

Exemplo 2-4

Se a taxa de desconto comercial for de 4% a.m., e o prazo de vencimento de uma duplicata for de três meses, qual a taxa mensal de juros simples da operação?

Resolução:

Temos:

d = 4% e n = 3

Portanto:

$$i = \frac{0{,}04}{1-(0{,}04).3} = \frac{0{,}04}{1-0{,}12} = \frac{0{,}04}{0{,}88} = 0{,}04545 \text{ ou } 4{,}55\%$$

Assim, a taxa de juros simples da operação vale 4,55% a.m.

Anotações

Exemplo 2-5

Uma duplicata com prazo de vencimento de dois meses foi descontada em um banco, proporcionando-lhe uma taxa efetiva de juros simples igual a 3% a.m. Qual a taxa de desconto utilizada?

Resolução:

Temos:

i = 3% e n = 2

Portanto:

$0{,}03 = \frac{d}{1-d.2}$ → $0{,}03\,(1-2d) = d$ → $0{,}03 - 0{,}06d = d$

$-1{,}06d = -\,0{,}03$ → $d = \frac{0{,}03}{1{,}06} = 0{,}0283 = 2{,}83\%$

Assim, a taxa de desconto procurada vale 2,83% a.m.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O cálculo de descontos simples, em suas formas, é um belo exercício de raciocínio lógico para sua mente. O uso extensivo de fórmulas e conceitos de Valor Nominal, alteração de base de cálculo e diferenciação entre taxa de juros e taxa de desconto são recursos essenciais que formatam seu pensamento e lhe habilitam compreender com maior clareza e profundidade os conteúdos da área financeira.

Assim, anote suas dúvidas, reveja seus exercícios e as aulas sob demanda e participe ativamente de nosso fórum. Esses recursos possibilitarão uma assimilação mais eficiente da habilidade matemática e isso lhe será apenas benefício.

UNIDADE IV

JUROS COMPOSTOS

Professor Dr. Daniel Eduardo dos Santos

Objetivos de Aprendizagem

- Calcular o valor de juros, montante, prestações, valor presente ou valor atual no regime de capitalização composta.
- Reconhecer e utilizar adequadamente as taxas efetivas, nominais e equivalentes.

Plano de Estudo

A seguir, apresentam-se os tópicos que você estudará nesta unidade:

- **Juros e Montante**
- **Valor Atual e Valor Futuro**
- **Taxas Equivalentes, Taxas Efetivas e Taxas Nominais**
- **Períodos não inteiros**
- **Equivalência de Capitais**
- **Rendas Certas ou Anuidades**

INTRODUÇÃO

Hoje, as empresas e os indivíduos são confrontados com uma quantidade angustiante de opções de empréstimo e oportunidades de investimento. Nesta seção, vamos explicar como esses cálculos financeiros são realizados para permitir uma escolha fundamentada entre as várias possibilidades disponíveis.

Podemos começar por considerar o que acontece quando um único montante fixo é investido e mostrar como calcular o montante acumulado durante um período de tempo. Suponha que alguém lhe dá a opção de receber $500 agora ou $500 em 3 anos.

Qual dessas alternativas você aceitaria? A maioria das pessoas levaria o dinheiro agora, parcialmente porque eles podem ter uma necessidade imediata para ele, mas também porque eles reconhecem que $500 vale mais hoje do que no prazo de 3 anos. Mesmo se ignorarmos os efeitos da inflação, é ainda melhor pegar o dinheiro agora, uma vez que pode ser investido e vai aumentar em valor durante o período de 3 anos. Objetivando descobrir esse valor, precisamos saber a taxa de juros e a base em que é calculado. Vamos começar entendendo que o valor de $500 é investido por 3 anos a juros de 10% compostos anualmente. O que exatamente queremos dizer por "juros de 10% compostos anualmente"? Bem, ao final de cada ano, o valor juro é calculado e é adicionado ao valor atualmente investido. Se o montante inicial é 500, em seguida, após 1 ano o juro é 10% de 500, ou seja:

$$\frac{10}{100}\ x\ \$500 = \frac{1}{10}\ x\ \$500 = \$50$$

Assim, entendemos que o capital aumenta em $50, indo agora para $550.

O que acontece a esse montante no final do segundo ano? O valor dos juros também é $50? Isso estaria correto com juros simples, quando o montante dos juros recebido é o mesmo para todos os anos. No entanto, com juros compostos, temos "juros sobre os juros". Quase todos os

Anotações

investimentos financeiros usam compostos ao invés de juros simples, porque os investidores precisam ser recompensados por não levar o pagamento de juros do fundo de cada período. Na composição anual, os juros obtidos ao final do segundo ano é 10% do montante investido no início desse ano. Isso não só consiste nos $500 iniciais, mas também os $50 já recebidos como juros sobre o investimento do primeiro ano. Consequentemente, teremos:

$$\frac{1}{10}\ x\ \$550 = \$55$$

Elevando agora o valor total (ou montante) a $605. Finalmente, ao fim do terceiro ano, os juros serão:

$$\frac{1}{10}\ x\ \$605 = \$60{,}50$$

O que transforma o investimento em $665,50. Essa diferença, $165,50, significa que é melhor pegar $500 agora e investi-lo por três anos.

Quando tratamos sobre capitalização **simples**, compreendemos que o rendimento ocorre **linearmente** (em linha) ou de forma proporcional, o que significa que a base de cálculo era sempre o capital inicial. Já neste regime de capitalização – o **composto** – dizemos que o rendimento se dá **exponencialmente**, pois os juros do período são calculados com base em um capital, formando um montante, e esse montante (capital + juros) será utilizado como capital na base de cálculo do período seguinte.

Anotações

CAPITALIZAÇÃO

Fonte: SHUTTERSTOCK.COM

A capitalização é o instante de tempo no qual a aplicação rende os juros contratados. Sendo o tempo de aplicação igual a 2 anos e os juros capitalizados mensalmente, teremos 24 períodos de capitalização; para uma capitalização bimestral, a quantidade de períodos será igual a 12; se a capitalização for semestral, será 4, e assim sucessivamente.

Juros e Taxa de Juros

Ao tratarmos sobre Juros, esse é o <u>valor</u> gerado pela capitalização do investimento ou capital inicial, transcorrido o tempo necessário. Observe que estamos tratando aqui sobre quantia em dinheiro. Isso se diferencia de <u>taxa de juros</u>, pois esta representa percentualmente uma relação entre o que se investiu e o que se deseja obter. Certamente que a aplicação da <u>taxa de juros</u> sobre o capital produzirá os <u>Juros</u>, porém tais conceitos são distintos. Outro aspecto é quando tratamos sobre o Montante.

De semelhante forma ao que foi estudado no regime de capitalização simples, o Montante no regime composto tem a mesma função e comportamento: é o resultado da adição ao capital do início do período com os juros capitalizados neste mesmo período.

Isto equivale a dizer que

$$M = C + J \quad \text{ou} \quad FV = PV + J$$

Anotações

MONTANTE

Na apresentação deste livro alguns conceitos foram apresentados e vale recuperar o que lá foi exposto, conforme abaixo:

Tabela 3 – Regime de Capitalização Composta

Período	Base de Cálculo	SD_1	Juros (J = SD1.i)	M
1	1.000	1.000	100	1.100
2	1.000	1.100	110	1.210
3	1.000	1.210	121	1.331
4	1.000	1.331	133	1.464
5	1.000	1.464	146	1.610

Fonte: o autor

Percebem-se os efeitos da exponenciação do capital, pois o valor dos juros calculados, períodos após período, é aumentado, uma vez que a própria base de cálculo se altera após cada período.

Podemos representar esse conceito por meio da figura a seguir.

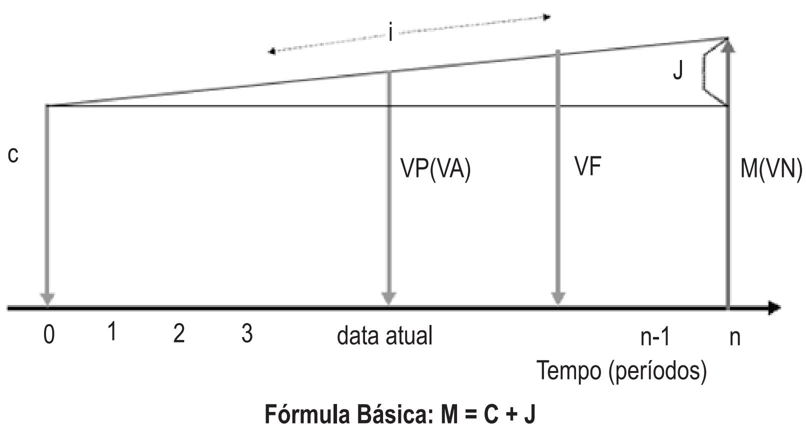


Figura 4 – Exponenciação

Fonte: o autor

A resolução de problemas envolvendo Montante é possível mediante três formas básicas: uso de fórmulas, cálculo por meio de tabelas financeiras e utilização da calculadora financeira HP12C.

Exemplo 3-1

Na aplicação de R$ 1.000,00, durante 5 meses, à taxa de 10% a.m., temos, contada uma capitalização mensal, 5 períodos de capitalização, ou seja, a aplicação inicial vai render 5 vezes.

No primeiro período, teríamos

$$1000 \times (1 + 0{,}10) \quad \longrightarrow M = 1000 \times (1{,}10)$$

No segundo período, teríamos

$$M = 1000 \times (1{,}10) \,.\, (1{,}10) \quad \text{ou } M = 1000 \times (1{,}10)^{2}$$

No terceiro período, teríamos

$$M = 1000 \times (1{,}10) \,.\, (1{,}10) \,.\, (1{,}10) \quad \text{ou } M = 1000 \times (1{,}10)^{3}$$

E assim sucessivamente, aplica-se tal regra aos demais períodos capitalizados. Poderemos resolver por meio da fórmula básica para cálculo do Montante:

$$\mathbf{M = C \times (1 + i)^n}$$

Em que:

M = Montante ou Valor Futuro (VF)

C = Capital ou Valor Presente (PV)

i = taxa de juros

n = Quantidade de Capitalizações (períodos)

Essa fórmula é resultado da dedução do cálculo acumulado da taxa sobre o capital, período após período.

Assim,

$$M = 1000 \times (1 + 0{,}10)^5 \quad \rightarrow M = 1000 \times (1{,}10)^5$$

$$M = 1000 \times 1{,}61051 \quad \rightarrow M = 1.610{,}510$$

Obtemos, dessa forma, que o montante, ao final de cinco meses, será \$ 1.610,51.

O mesmo cálculo é possível utilizando-nos da calculadora financeira HP12C.

Um olhar mais atento nesta ferramenta lhe revelará que a mesma possui registradores financeiros específicos para o cálculo de períodos (n), taxa de juros (i), Valor Presente ou Valor Atual (PV), Prestação ou Parcelas (PMT) e Montante ou Valor Futuro (VF). Destacamos na imagem abaixo a posição destas teclas e, a seguir, um destaque nas mesmas.

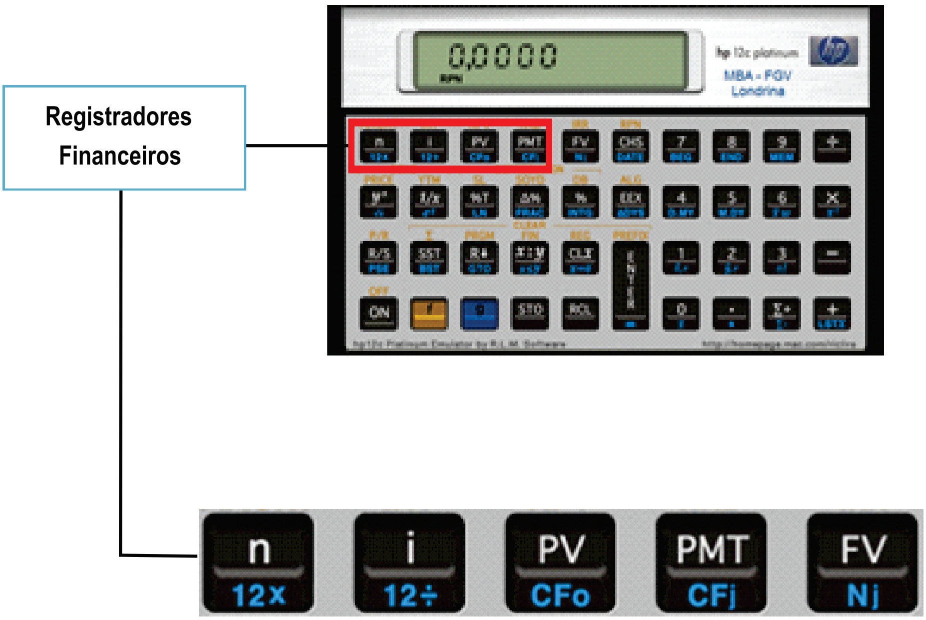


Figura 5 – Os registradores financeiros na calculadora HP12C

Fonte: o autor

Anotações

A existência desses cinco registradores significa que, em todo e qualquer problema, iremos utilizar todos eles. Na realidade, o processo de resolução de problemas parte do pressuposto de sempre termos explícitos ou implícitos três elementos e se pede então um quarto elemento. No nosso exemplo anterior, poderíamos identificá-los assim:

Exemplo 3-2

Na aplicação de R$ 1.000,00, durante 5 meses, à taxa de 10% a.m., temos, contada uma capitalização mensal, 5 períodos de capitalização, ou seja, a aplicação inicial vai render 5 vezes.

Em que:

M = Montante ou Valor Futuro (VF) = ?

C = Capital ou Valor Presente (PV) = 1000

i = taxa de juros = 10

n = Quantidade de Capitalizações (períodos) = 5

O processo de resolução na HP12C poderia ser assim:

1000 $\boxed{PV}$

10 $\boxed{i}$

5 $\boxed{n}$

FV → -1.610,51

O resultado na tela da calculadora HP12C aparece negativo por refletir o mesmo conceito apresentado no diagrama de fluxo de caixa: se você informou um valor de entrada negativo, o valor de saída será negativo ou vice-versa. Esse conceito será melhor explorado ao tratarmos sobre anuidades e fluxos variáveis de caixa.

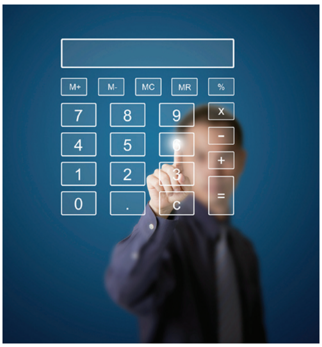
Exemplo 3-3

Problemas envolvendo juros compostos também podem ser resolvidos utilizando as tabelas financeiras. Para tanto, vá até o APÊNDICE A – TABELAS FINANCEIRAS para resolvermos esta questão.

Conhecendo a taxa da operação (10%), localize a tabela que tem essa taxa. Uma vez localizada a tabela, você olhará na coluna do Fator de Acumulação de Capital $(1+i)^n$, e procurará pelo número de períodos indicados no exercício, no caso 5. O fator encontrado é 1.61051. Esse fator deverá ser multiplicado pelo seu capital para se conhecer qual é o Montante da operação.

$$M = 1000 \times 1{,}61051 \quad \longrightarrow M = 1.610{,}51$$

CÁLCULO DOS JUROS



Fonte: SHUTTERSTOCK.COM

Os juros são a diferença entre o capital (ou valor presente) e o montante (ou valor futuro). Sabendo que o montante é expresso pelas fórmulas abaixo:

$$M = C \times (1 + i)^n$$

E

$$M = C + J \quad \text{ou seja} \quad J = M - C$$

$$\text{Então } J = C \times (1 + i)^n - C \quad \text{ou seja} \quad J = C\,[(1 + i)^n - 1]$$

O cálculo dos juros não apresentará maiores dificuldades, uma vez que a fórmula é apenas uma variação da fórmula do montante, como vimos anteriormente.

Como não há tecla com registrador financeiro para juros, mas apenas para montante na calculadora financeira, o processo é indireto: faz-se o cálculo do montante e subtrai-se desse o capital, seguindo basicamente o disposto na fórmula J = M – C.

Saiba mais sobre o **Assunto**

Você conhecerá as formas de pagamento a prazo e as taxas de juros praticadas, além de ver também como é muito mais caro comprar um bem a prazo do que à vista e a diferença nesse valor.
<http://www.tveducacaofinanceira.com.br/episodios.asp?IDVideo=TVEF_Episodio09>.

VALOR ATUAL E VALOR FUTURO

Fonte: SHUTTERSTOCK.COM

Valores de decisões podem ser avaliados, usando-se tanto técnicas de valor futuro como de valor presente. Embora essas técnicas, quando aplicadas corretamente, resultem nas mesmas decisões, as decisões são tomadas assumindo-se perspectivas diferentes. Técnicas de valor futuro são utilizadas para encontrar os valores que são medidas típicas do final da vida do projeto, enquanto que as técnicas de valor presente são usadas para encontrar valores que são medidas do início da vida do projeto (tempo zero).

Anotações

A linha do tempo, que é uma reta horizontal sobre a qual o tempo zero está no último ponto à esquerda, e os períodos futuros são apresentados à medida que se movimentam da esquerda para a direita, pode ser usada para ilustrar os fluxos de caixa associados com um dado investimento. As linhas do tempo são frequentemente usadas em finanças para permitir ao analista uma total compreensão dos fluxos de caixa associados com dado investimento.

Uma vez que o dinheiro tem um valor no tempo (existem oportunidades para se obter taxas de retorno positivas), os fluxos de caixa associados com um investimento devem ser medidos no mesmo instante no tempo. Tipicamente, esse instante é o final ou o início da vida do investimento.

A técnica de valor futuro usa o valor composto para capitalizar e encontrar o valor futuro de cada fluxo de caixa no final da vida do investimento. Essa abordagem é ilustrada na Linha do tempo da figura abaixo, pode ser visto que o valor futuro de cada fluxo de caixa é medido ao final da vida do investimento de cinco anos.

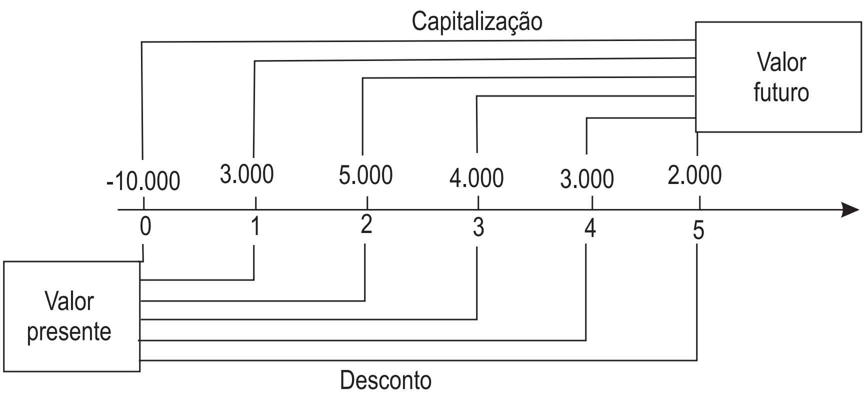


Figura 6 – Capitalização e Desconto

Fonte: o autor

Anotações

A técnica do valor presente, outra abordagem muito conhecida, usa o desconto para encontrar o valor presente de cada fluxo de caixa no tempo zero e, então, soma-os para encontrar o valor presente do investimento. A aplicação dessa abordagem é ilustrada na mesma linha do tempo da figura anterior. Embora o valor futuro e o valor presente, quando aplicados corretamente, resultem nas mesmas decisões, os administradores financeiros têm a tendência de confiar, principalmente, em técnicas de valor presente, uma vez que eles tomam decisões no tempo zero.

Exercícios

64. Calcule o montante de uma aplicação de $50.000,00 pelo prazo de 6 meses à taxa de juros compostos de 6% a.m.

65. Quanto deverei aplicar hoje para ter direito a receber a importância de $500.000,00 daqui a 5 anos, se a taxa de juro composto adotada for 15% ao ano?

66. Jean conseguiu um vale em sua empresa no valor de $200,00 a serem descontados nos seus próximos 2 salários. Sabendo que a empresa vai descontar no final o valor de $230,00, qual será a taxa de juros compostos cobrada?

67. Em quanto tempo um capital de $1.650,00 produzirá um montante de $1.776,87, se aplicado a uma taxa composta de 2,5% a.m.?

68. Qual o valor dos juros produzidos por um capital de $2.500,00 aplicado à taxa de 4% a.m. durante 12 meses?

69. Rivaldo, desejando viajar no próximo ano, decidiu aplicar $2.200,00 e resgatar daqui a 12 meses, com fins de custear a viagem. Sabendo que a instituição financeira paga juros compostos de 1,2% a.m., qual será o montante a ser resgatado ao final do período?

70. Um capital de $7.000,00, aplicado durante 6 meses, proporcionou ao aplicador um montante de $8.117,85. Qual a taxa de juros compostos dessa operação?

71. O que é mais vantajoso? Investir $5.000,00 durante 2 anos a juros compostos de 2% a.m., ou investir $5.000,00 durante 2 anos a juros simples de 3% ao mês.

Anotações

72. Um investidor investiu \$5.000,00 a juros de 1,5% a.m. durante um ano. Qual será o valor a ser resgatado ao final do período?

73. Um capital de \$5.000,00, aplicado à taxa de 20% a.m., produzirá um montante de \$10.000,00 em quanto tempo?

74. Um investidor aplicou \$45.000,00 em uma instituição financeira que opera com juros compostos de 3,55% a.t. pelo período de 1 ano. Qual o valor dos juros dessa operação?

75. Saul contraiu uma dívida de \$2.000,00 para ser quitada após 2 anos e meio. Ao final do prazo contratado, Saul quitou a dívida com um único pagamento de R\$ 3.400,00. Qual a taxa de juro composta mensal dessa operação?

76. Quantos dias são necessários para que um capital de \$ 35.000,00, aplicado a uma taxa de 10% a.m., produza juros de \$ 11.585,00?

77. Um determinado título de capitalização, com valor de face de \$ 6.000,00, remunera o aplicador com juros de 3% ao mês. O prazo de aplicação é de 18 meses. Qual será o valor de resgate desse título ao final do prazo contratado?

78. Qual a taxa de juro composto mensal que faz um capital dobrar de valor em 6 meses?

79. Uma pessoa tem uma dívida no valor de \$900.000,00 a ser saldada daqui a 6 meses. Quanto deverá aplicar hoje, à taxa de 7% a.m. para que, ao final de 6 meses, disponha da importância necessária para saldar o seu compromisso, considerando o regime de juros compostos?

80. Um capital de \$5.000,00 produz juros de \$800,00 em um período de 4 meses. Qual a taxa mensal de juros compostos?

81. Uma pessoa compra um lote de ações na Bovespa por \$1.250,00. Depois de 1 mês, resolve vender suas ações por \$1.500,00. Qual foi a rentabilidade, em termos percentuais, auferida por essas ações?

82. Em quanto tempo um capital pode produzir juros a 70% de seu valor se aplicado a 5.72% ao mês?

83. Bruno pede emprestado a um colega a importância de \$1.250,00 para consertar o seu

Anotações

carro. Tal amigo o empresta, porém cobra uma taxa de juro composto de 1,5% ao mês. Ao final dos 6 meses, quanto Bruno deverá pagar ao seu amigo para liquidar a dívida?

Taxas Equivalentes

Este conceito, em juros compostos, é semelhante ao que fora estudado nos juros simples: duas taxas são equivalentes quando, aplicadas a juros compostos sobre um mesmo capital, pelo mesmo período de tempo, produzem o mesmo montante.

A fórmula matemática que soluciona esta questão é a que segue abaixo:

$$(1 + i_1)^{n1} = (1 + i_2)^{n2}$$

Exemplo 3-4

Vamos aplicar essa fórmula no seguinte exemplo prático: Qual a taxa semestral equivalente à taxa mensal de 5% a.m. no regime de juros compostos?

Adotaremos como intervalo de tempo um semestre (6 meses ou 180 dias) e chamaremos de i_1 a taxa procurada (um semestre), em que:

i_1 (taxa semestral) = ? i_2 = 5% a.m.

$n_1 = 1$ $n_2 = 6$

$$(1 + i_1)^1 = (1 + 0,05)^6$$

$$i_1 = (1,05)^6 - 1 \rightarrow i_1 = 0,34009$$

$$i_1 = 34,01 a.s.$$

Anotações

Apesar dessa fórmula ser superável pelo uso da calculadora financeira, em especial, o programa de conversão de taxas, conhecer o processo de conversão é importante para o Gestor. Abaixo, estão dispostas, de forma estruturada, as relações de conversão.

Períodos	Fórmula
De a.m. para a.a.	$i_a = [(1 + i_m)^{12} – 1] . 100$
De a.d. para a.m.	$i_m = [(1 + i_d)^{30} – 1] . 100$
De a.d. para a.a.	$i_a = [(1 + i_d)^{360} – 1] . 100$
De a.a. para a.m.	$i_m = [(1 + i_a)^{1/12} – 1] . 100$
De a.m. para a.d.	$i_d = [(1 + i_m)^{1/30} – 1] . 100$
De a.a. para a.d.	$i_d = [(1 + i_a)^{1/360} – 1] . 100$

O que, de forma generalista, poderíamos tratar pela seguinte fórmula:

$$\mathbf{I_q = [(1 + i_t)^{q/t} – 1] . 100}$$

Em que:

- iq = Taxa procurada (taxa que eu quero)
- it = Taxa fornecida (taxa que eu tenho)
- q = Prazo final (prazo que eu quero)
- t = Prazo inicial (prazo que eu tenho)

Conversão de Taxas na Calculadora Financeira HP12C

O processo para conversão de taxas pode ser facilitado e acelerado ainda mais na calculadora

Anotações

financeira HP12C. Isto porque, por meio de seu modo de programação, ela permite a gravação de um programa pelo qual, com a inserção de apenas três informações básicas, ela calcula e retorna automaticamente a taxa equivalente no período desejado.

Exemplo 3-5

Em juros compostos, o que é preferível: aplicar um capital por um ano à taxa de 26% a.a. ou à taxa de 2,1% a.m.?

Após reconhecer que estamos diante de taxas diferentes, e que essas taxas também têm períodos de capitalização diferentes, para que possamos compará-las e responder à questão, é necessário que coloquem uma delas no período de capitalização da outra. Como são juros compostos, não podemos aplicar os conceitos de taxas proporcionais (fazendo a divisão ou multiplicação, como é possível em juros simples), mas sim realizar a conversão em períodos equivalentes.

Fazendo uso do programa para HP12C (leia mais logo abaixo e assista ao vídeo instrucional), os passos são os seguintes:

Solução

26 

360 

30 

Resultado na Tela da HP12C 1,94459

Anotações

Resposta

A taxa equivalente a 26% a.a. é 1,94% a.m, assim, considerando a questão, deverei optar pelo investimento à taxa de 2,1% a.m., pois esta é superior à taxa de 26% a.a.

Saiba mais sobre o **Assunto**

O programa de conversão de taxas está disponível no APÊNDICE B – CALCULADORA FINANCEIRA HP12C. O processo de programação disponível nesse apêndice poderá ser acompanhado passo a passo no vídeo abaixo.

<http://www.youtube.com/watch?v=BeVtrRLUZlc>.

Exercícios

84. Em juros compostos, qual a taxa anual equivalente às seguintes taxas:

a. 1,8% a.m.

b. 2,5% a.b.

c. 4,5% a.t.

d. 18% a.s.

85. Em juros compostos, qual é taxa mensal equivalente às seguintes taxas:

a. 75% a.a.

b. 50% a.s.

c. 21% a.t.

Anotações

d. 6,5% a.b.

e. 0,12% a.d.

86. O que é melhor: aplicar um capital a juros compostos por seis meses à taxa de 4,5% a.t. ou à taxa de 6% a.q. (ao quadrimestre)?

PERÍODOS NÃO INTEIROS

Fonte: SHUTTERSTOCK.COM

Os prazos fracionários são fato comum em cálculos de juros compostos, pois muitas vezes o prazo da aplicação não corresponde a um número inteiro de períodos a que se refere a taxa de juros, mas sim a apenas uma parte desse período. Nessas ocasiões, geralmente são aceitas duas formas de cálculo: pela **convenção linear** e pela **convenção exponencial**.

Convenção Exponencial

Neste sistema os juros compostos são aplicados sobre a parte inteira do prazo (taxas equivalentes), enquanto que sobre a parte fracionária se aplicam os conceitos de juros simples (taxas proporcionais).

Convenção Linear

Aqui os juros compostos são aplicados tanto sobre a parte inteira como sobre a parte fracionária do prazo. No Brasil, é este o formato mais aceito.

Anotações

Exemplo 3-6

Para um capital de $25.000 que foi aplicado durante 77 dias a juros de 5% a.m., calcular o montante utilizando as convenções linear e exponencial.

Solução:

Temos:

PV = 25.000 i = 5% n = 77 dias (2 m 17 d) M = ?

Convenção Linear

$$M = 25.000 \times (1 + 0,05)^2 \,.\, (1 + 0,05 \,.\, \frac{17}{30}) = \$\ 28.343,44$$

Na calculadora HP12C

[F] [FIN]	Apaga a memória financeira.
25000 [CHS] [PV]	Insere o principal com sinal negativo.
5 [i]	Insere a taxa de juros mensal.
77 [ENTER] 30 [÷] [n]	Calcula e insere o prazo em meses.
[FV] → 28.343,44	Calcula o montante.

Convenção Exponencial

$$M = 25.000 \times (1 + 0,05)^{77/30} = \$\ 28.335,17$$

A configuração padrão da calculadora financeira HP12C é a linear, como visto no cálculo anterior. Para fazê-la resolver questões utilizando a convenção exponencial é necessário acionar esta função, possível por meio das teclas [STO] [EEX]. Ao digitar essas teclas,

Anotações

aparecerá no visor da calculadora um *flag*, um indicativo de que a convenção exponencial está acionada. Verifique e veja se há em sua calculadora uma letra “C” no visor. Para retornar à convenção linear, basta digitar novamente [STO] [EEX] e o *flag* C desaparecerá, indicando que a calculadora retornará ao seu padrão, ou seja, convenção linear.

Na calculadora HP12C

[F] [FIN]	Apaga a memória financeira.
[STO] [EEX]	Configura Convenção Exponencial.
25000 [CHS] [PV]	Insere o principal com sinal negativo.
5 [i]	Insere a taxa de juros mensal.
77 [ENTER] 30 [÷] [n]	Calcula e insere o prazo em meses.
[FV] → 28.335,17	Calcula o montante.

Exercícios

87. Mário fez uma aplicação de $12.000,00 por 18 meses à taxa de 22% a.a. Qual o montante pela convenção exponencial? E pela convenção linear?

88. Em um empréstimo de $100.000,00 a juros compostos, a taxa foi de 2% a.m. e o prazo de 90 dias. No entanto, havia uma cláusula contratual estabelecendo a convenção linear caso o pagamento fosse feito com atraso. Se o pagamento foi feito com um atraso de 17 dias, qual o valor do montante? E se fosse considerada a convenção exponencial, qual seria o valor do pagamento?

Anotações

TAXA EFETIVA E TAXA NOMINAL

Fonte: SHUTTERSTOCK.COM

Sem dúvida, um dos assuntos geradores de dúvidas em Matemática Financeira são os conceitos de taxa nominal, taxa efetiva e taxa equivalente. Até na esfera judicial tais assuntos geram dúvidas nos cálculos de peritos referentes a empréstimos, financiamentos, consórcios etc.

Buscando esclarecer esses conceitos, vamos abordar agora a taxa nominal, e para tanto, vamos utilizar exemplos conforme formos avançando no conceito. Já entendendo que toda taxa está vinculada a um período, facilmente reconhecemos a que está exposta logo abaixo:

6% a.a. = Seis por cento ao ano, <u>capitalizados anualmente</u>

Ou seja, um valor – por exemplo, $100 – aplicado a essa taxa produziria juros de $24 exatamente após um ano. Até aqui nenhum segredo. Essa relação direta entre período da taxa e sua capitalização é o uso comum: capitalização no mesmo período indicado na taxa. Grifamos propositalmente o termo “capitalizados anualmente”, pois é exatamente na capitalização que surge a diferença entre Taxa Efetiva e Taxa Nominal.

O que ocorreria se tivéssemos agora em mãos uma taxa como essa:

6% a.a.c.c.m = Seis por cento ao ano, com <u>capitalização mensal</u>

Confusão à vista? Respire fundo e nos acompanhe: o que está aí exposto é uma forma de capitalização, em que há uma taxa de juros, cuja capitalização – APESAR DE INDICAR AO ANO – ocorrerá MENSALMENTE. Por isso é apresentada desta maneira: doze por cento ao ano, com <u>capitalização mensal</u>.

Quando ocorre a capitalização em um período diferente da capitalização apresentada na taxa, estamos diante de uma Taxa Nominal, em outras palavras, a taxa nominal ocorre quando o período de formação e incorporação dos juros ao Capital não coincide com aquele período a que a taxa está referida.

A melhor forma de identificar uma Taxa Nominal é ver que a taxa de juros apresentada está indicada em um período e a capitalização ocorre em outro.

E como solucionar questões desse tipo? A resposta é bem simples: você precisará converter a taxa nominal em efetiva. E esse procedimento não ocupará mais do que três minutos de seu tempo para compreender por completo.

A rigor, o que se deve fazer é observar o tempo indicado na taxa (anos) e comparar ao tempo apresentado na capitalização (meses). Assim entendemos que, dentro do tempo apresentado na taxa, serão possíveis doze capitalizações, já que em um ano existem doze meses.

Saiba mais
sobre o **Assunto**

Reveja este conteúdo e a diferenciação entre Taxa Nominal, Taxa Efetiva e Taxa Equivalente no vídeo abaixo.

<http://www.youtube.com/watch?v=d-GDIMIM3eo>.

Exemplo 3-7

Um dos exemplos mais clássicos que podemos adotar para exemplificar a utilização de taxas nominais é a tradicional Caderneta de Poupança. Ela oferece atualmente ao aplicador (poupador) uma rentabilidade de 6% ao ano, capitalizados mensalmente, mais a TR. Ou seja,

Anotações

a poupança tem um rendimento que é definido por uma taxa nominal, pois, mesmo com a TR igual a zero, a poupança não renderá 6% ao ano. Vamos ver por quê.

1) A expressão 6% ao ano, capitalizados mensalmente, significa uma rentabilidade mensal de:

$$\frac{6\%}{12\ meses} = 0{,}5\% a.m.$$

Fazemos assim porque vamos transformar a taxa nominal em efetiva, e para isso utilizamos o conceito de proporcionalidade, ou seja – a divisão da taxa pelo período indicado. Lembre-se desse conceito relendo o tópico que trata a respeito de TAXA PROPORCIONAL.

2) A taxa obtida, 0,5% a.m., é efetiva. Agora, utilizando-se do programa de conversão de taxas efetivas para Calculadora Financeira HP12C, ache qual é a taxa anual efetiva. Você deverá obter 6,17% a.a. Perceba então que a taxa anteriormente indicada como 6,0% a.a. na realidade remunerará 6,17%. Esse é um dos poucos exemplos em que o consumidor sai beneficiado em operações com taxas nominais.

Exemplo 3-8

Mudando um pouco o prisma, e se estivéssemos diante de um caso em que a taxa apresentada fosse mensal e capitalizada trimestralmente, como seria o processo de solução? O procedimento seria o mesmo, com as devidas adaptações. Entendendo que agora tenho uma taxa em período menor ao da capitalização, deverei multiplicar a taxa pelo quociente de períodos cabíveis.

Exemplificando, se a aplicação rende 0,5% a.m. capitalizados trimestralmente, qual é a taxa de juros efetiva?

Solução:

Passo 1) A expressão 0,5% ao mês, capitalizados trimestralmente, significa uma rentabilidade

Anotações

trimestral de:

$$0{,}5\% \,.\, 3 = 1{,}5\% \text{ a.t.}$$

Passo 2) A taxa obtida, 1,5% a.t., é efetiva. Agora, utilizando-se do programa de conversão de taxas efetivas para Calculadora Financeira HP12C, ache qual é a taxa mensal efetiva. Você deverá obter 0,497% a.m., o que implica em dizer que a sua remuneração mensal será inferior àquela esperada, nominalmente apresentada como 0,5%.

Em suma

TAXA NOMINAL: quando sua unidade de tempo difere da unidade do período de capitalização.

TAXA EFETIVA: quando sua unidade de tempo coincide com a unidade do período de capitalização.

A TAXA NOMINAL não é utilizada nos cálculos e sim a TAXA EFETIVA. Por convenção, a passagem da TAXA NOMINAL para TAXA EFETIVA será feita de forma proporcional.

Exercícios

89. Determinar o valor dos juros produzidos por um capital de $15.000,00, aplicado às taxa de 48% a.a. com capitalização mensal durante 2 anos.

90. Caso você aplique $3.000,00 às taxa de 6,78% a.m., com capitalização diária por 7 meses, quanto resgatará ao final do período?

91. O Banco Alfa opera com uma taxa de 15% a.t. com capitalização mensal. Se você efetuar um empréstimo de $ 5.000,00 nesse banco, quanto desembolsará ao final de 2 anos para liquidar a dívida?

92. Dada a taxa de juros 120% a.a. com capitalização mensal, quais são as taxas efetivas mensal e anual?

Anotações

Leitura Complementar

A matemática financeira como auxílio à reflexão sobre a compra de bens de consumo.

Diversas abordagens teóricas e práticas têm sido sugeridas para o estudo de matemática financeira, principalmente no que diz respeito a juros compostos; muitas com o objetivo de tornar este conteúdo significativo para os alunos. Este texto apresenta uma proposta de ensino que relaciona o conteúdo de juros compostos com a compra à vista e a prazo, mediante análise de um folheto promocional.

<http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/RE/RE_13.pdf>.

EQUIVALÊNCIA DE CAPITAIS

Ao estudarmos as operações de descontos simples, é frequente a necessidade de se antecipar ou ainda postergar o vencimento de títulos em operações financeiras. Fato comum é a substituição de um título por outro ou ainda vários outros. Comum também é a substituição de vários títulos e vencimentos diferentes por apenas um ou ainda outros tantos.

Todas essas operações estão relacionadas à comparação de valores diferentes e que têm ainda prazos diferentes de exigibilidade, tanto para pagamentos quanto para recebimentos. Essas comparações são, em última análise, uma operação na qual se faz a equivalência de capitais.

Lembre-se de que dois fluxos de caixa serão definidos como equivalentes, quando os seus valores presentes, calculados para a mesma taxa de juros, forem iguais, ou seja:

$$\text{Fluxo de caixa 1} \approx \text{Fluxo de caixa 2 quando } PV_{FC1} = PV_{FC2}$$

Anotações

Definições

Assim, comparando fluxos de caixa (como para decidir entre duas alternativas de financiamento), é necessário em primeiro lugar que se referencie todos os seus termos (períodos e valores) a uma única data, que é denominada data focal.

Data focal é, portanto, a data que se considera como base de comparação dos valores referidos a datas diferentes, também é conhecida como data de avaliação ou data de referência.

Capitais Equivalentes

Exemplo 3-9

Alguém vendeu um veículo nas seguintes condições: primeira parcela de $10.000,00 vencível em 30 dias, outra parcela de $ 10.000,00 vencível em 60 dias, e uma terceira parcela, de $15.000,00, vencível em 90 dias, todas elas pagas em cheque. Se essa pessoa negociar esses cheques para transformá-los em dinheiro na mesma data da venda do carro, quanto deverá receber por elas?

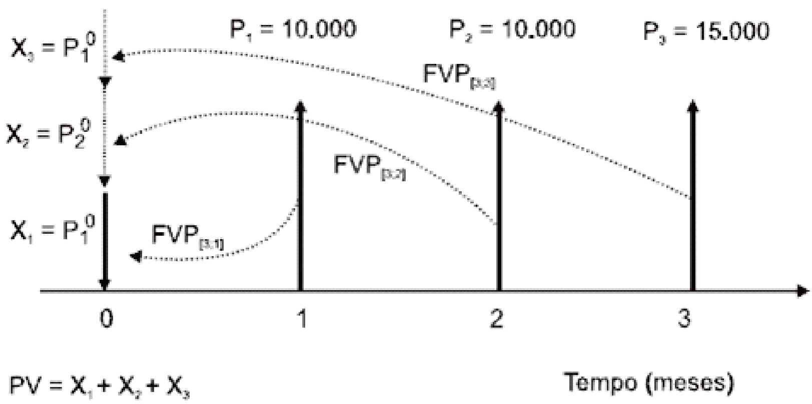


Figura 7 – Valor presente de um fluxo de caixa

Fonte: o autor

Anotações

Todo o enunciado pode ser visualizado na figura anterior, que expõe os valores das parcelas e ainda o seu desconto para a data da operação de compra (data focal zero). Respondendo a essa questão, precisaremos descontar cada parcela para a data presente (ou data focal atual) com a utilização do Valor Presente para uma determinada taxa de juros, digamos 2% a.m.

Utilizando a calculadora HP12C, teremos:

[F] [CLX]	Limpa os registradores financeiros.
10000 [PMT]	Informa o valor das parcelas.
3 [n]	Informa o período de capitalização.
2 [i]	Informa a taxa de juros da operação.
PV → -28.838,83	Valor Presente do Fluxo de Caixa.

Veja que, utilizando a fórmula básica do Montante, o processo é o mesmo já explanado, e com vistas à produtividade e praticidade criada pela calculadora financeira, iremos nos ater primordialmente no seu uso em detrimento das demais formas de resolução.

Valor atual de um conjunto de capitais

Suponhamos que uma pessoa tenha carteira de aplicações e títulos de renda fixa com datas de vencimento diferentes. Essa carteira de valores nominais é um conjunto de capitais. O conjunto pode ser caracterizado pelo valor nominal do título e por sua data de vencimento.

Uma questão normal é a de saber qual o valor da carteira, ou seja, do conjunto de capitais em uma determinada data. Para isto, é necessário fixar a taxa de juros i e a data focal, que vamos admitir, neste caso, como sendo a data zero.

Nessas condições, o valor da carteira pode ser obtido descontando os títulos para a data zero

Anotações

e somando os valores obtidos:

$$V = \frac{C_1}{(1+i)^1} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \frac{C_3}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

O total obtido V é o valor atual do conjunto de capitais na data zero. É o valor atual dessa carteira, que é quanto ela vale. Ou seja, dado um custo de oportunidade de capital (a taxa de juros vigente no mercado) e uma data de comparação, podemos dizer que o valor atual naquela data "mede" o valor da carteira.

Exemplo 3-10

Admitamos o seguinte conjunto de capitais e uma taxa de juros compostos de 3% a.m.

Capital ($)	Mês de Vencimento
1.000,00	6
2.000,00	12
5.000,00	15

Pergunta-se:

a) Qual o valor atual deste conjunto na data focal zero:

$$V = \frac{1.000}{(1+0{,}03)^6} + \frac{2.000}{(1+0{,}03)^{12}} + \frac{5.000}{(1+0{,}03)^{15}}$$

V = 837,48 + 1.402,76 + 3.209,31 = 5.449,55

b) Qual o valor na data focal 10?

$$V = 1000(1+0{,}03)^4 + \frac{2.000}{(1+0{,}03)^2} + \frac{5.000}{(1+0{,}03)^5}$$

V = 1.125,51 + 1.885,19 + 4.313,04 = 7.323,74

Conjuntos equivalentes de capitais

Ao se tratar sobre equivalência de conjuntos de capitais, o conceito é exatamente igual ao exposto anteriormente, com a consideração adicional de que estaríamos analisando não apenas um, mas agora dois ou mais capitais. Assim, sejam informados a taxa de juros *i* e dois conjuntos de valores nominais e seus respectivos prazos, ambos contados a partir de uma data focal ou data de origem.

$$\frac{C_1}{(1+i)^{m_1}}+\frac{C_2}{(1+i)^{m_2}}+\cdots+\frac{C_n}{(1+i)^{m_n}}=\frac{C'_1}{(1+i)^{m'_1}}+\frac{C'_2}{(1+i)^{m'_2}}+\cdots+\frac{C'_n}{(1+i)^{m'_n}}$$

Tais conjuntos serão equivalentes quando, fixada uma data focal e uma taxa de juros, seus valores atuais forem iguais.

Exemplo 3-11

Verificar se os conjuntos de valores nominais, referidos à data zero, são equivalentes à taxa de juros de 10% a.a.

1º Conjunto		**2º Conjunto**	
Capital ($)	Data de vencimento	Capital ($)	Data de vencimento
1.100,00	1º ano	2.200,00	1º ano
2.420,00	2º ano	1.210,00	2º ano
1.996,50	3º ano	665,50	3º ano
732,00	4º ano	2.196,15	4º ano

1º Conjunto

$$V=\frac{1.100}{(1+0{,}10)^1}+\frac{2.420}{(1+0{,}10)^2}+\frac{1.995{,}50}{(1+0{,}10)^3}+\frac{732}{(1+0{,}10)^4}$$

V = 1.000,00 + 2.000,00 + 1.499,25 + 449,97 = **4.949,22**

2º Conjunto

$$V = \frac{2.200}{(1+0{,}10)^1} + \frac{1.210}{(1+0{,}10)^2} + \frac{665{,}50}{(1+0{,}10)^3} + \frac{2.196{,}15}{(1+0{,}10)^4}$$

V = 2.000,00 + 1.000,00 + 500,00 + 1.500,00 = **5.000,00**

Resposta: Os conjuntos de capitais não são equivalentes.

Exercícios

93. Um bem custa $15.000,00 à vista. Caso a aquisição desse bem seja feita a prazo, para pagamento em 6 prestações mensais e iguais, a uma taxa de 1,5% a.m., qual será o valor das parcelas?

94. Quanto deverei depositar mensalmente para que, ao final de 3 anos, disponha de $50.000,00, considerando que a instituição financeira pague juros de 0,5% a.m.?

95. Lílian comprou um carro para ser pago em 60 prestações de $550,00, com taxa de 1,0% a.m., qual o valor à vista do carro?

96. Qual o valor das parcelas de um bem que custa $25.000,00 à vista e que será vendido em 12 pagamentos iguais e mensais, cuja taxa de juros é de 1,5% a.m.?

97. Se efetuo um empréstimo de $3.500,00, à taxa de juros de 2% a.m., para ser liquidado em 8 pagamentos mensais e iguais, qual será o valor das prestações?

98. Ivan pretende levantar um empréstimo de $ 15.000,00. Se a taxa de juros de mercado for 3,5% a.m. e o mesmo deseja pagá-lo em 24 parcelas mensais e iguais, qual será o valor das prestações?

99. Danilo decidiu fazer uma viagem daqui a 1 ano e meio e, para tanto, deseja dispor de $10.000,00 na data da viagem. Para tanto, pretende efetuar depósitos mensais e iguais numa instituição financeira que paga juros de 1% a.m. Qual será o valor dos depósitos para que, por ocasião do 18º depósito o mesmo disponha da importância desejada?

Anotações

100. Um carro é vendido em 36 parcelas mensais e iguais de $ 599,00. Sabendo que a taxa utilizada é de 1,5% a.m., qual é valor do carro à vista?

101. Fernando depositará mensalmente $ 450,00, durante 6 meses, em um banco que paga juros de 3% a.m. Qual o montante que poderá ser sacado por Fernando por ocasião do último depósito?

102. Quanto terei que depositar, mensalmente, em uma instituição que paga juros de 2,5% a.m. para que, ao final de 8 meses, eu possua $ 10.000,00?

103. Ana comprou uma casa de $ 80.000,00 financiada em 36 prestações mensais e iguais. Calcule o valor das prestações, considerando uma taxa de 1,5% a.m?

104. Comprei um carro financiado em 24 prestações mensais de $ 800,00. Qual o seu valor à vista, sabendo que foi usada uma taxa de 2% a.m?

105. Roberto precisou fazer uma cirurgia que custava $ 3.000,00 à vista. Para pagá-la, fez um empréstimo desse valor, a uma taxa de 0,5% a.m., para quitá-lo em 12 parcelas mensais e iguais. Qual o valor das parcelas?

106. Um computador custa, atualmente, $ 3.500,00. Paulo decide comprá-lo e financia o objeto desejado em 10 prestações iguais e mensais, sendo que a 1ª parcela deverá ser paga daqui a 1 mês. Sabendo que a taxa de juro é de 5,5% a.m., quanto Paulo terá que desembolsar mensalmente?

107. Getúlio se propôs a fazer uma poupança para viajar após sua formatura. Para tanto, efetuou, por 18 meses, depósitos mensais e iguais de $ 200,00 em uma caderneta de poupança que paga juros de 0,5% a.m. Qual a importância disponível por ocasião do último depósito?

108. Quanto uma pessoa deve depositar mensalmente durante 15 meses num fundo de investimentos que rende 1,8% a.m., para que no instante do último depósito tenha um montante de $ 60.000,00?

109. Marta efetuou 12 depósitos bimestrais e iguais no valor de $ 500,00 em uma instituição que paga juros de 3% a.b. Quanto ela terá no momento do último depósito?

110. Qual é a prestação mensal de um carro cujo preço à vista é $ 50.000,00, se foi financiado

Anotações

em 24 prestações mensais e iguais, à taxa de 3,5% a.m.?

111. Um financiamento de \$ 100.000,00 foi concedido a uma empresa para ser pago em 4 prestações semestrais iguais, à juros de 20% a.s. Qual é o valor das prestações?

112. Qual é o preço à vista de um carro que está sendo vendido por 12 prestações mensais e iguais de \$ 5.000,00, considerando que a taxa contratada foi de 8% a.t?

Sugestão de Vídeo

Educador Financeiro explica o que é juros e taxa SELIC.

<http://www.youtube.com/watch?v=SKOae3HGRD0>.

RENDAS CERTAS OU ANUIDADES

Fonte: SHUTTERSTOCK.COM

Muitas formas existem para pagamento de um bem. A liquidação total no ato da compra, não havendo diferença temporal entre a transferência de todo dinheiro necessário para o pagamento e o recebimento da mercadoria, sendo incabíveis os juros, é o comumente chamado de pagamento à vista. De forma diversa, há aquela forma de pagamento em que se percebe um espaço temporal entre o momento do recebimento da mercadoria e seu

Anotações

pagamento, incorrendo assim a existência de juros exatamente pela existência desse espaço de tempo, uma vez que o valor do dinheiro não é o mesmo no tempo. É o que chamamos de pagamento no futuro.

Outra forma ainda possível é o pagamento parcelado e, em si mesmo, já se percebe uma enorme variedade de possibilidades e tipos como ser efetuado em várias parcelas sequencialmente, ou ainda com período de carência para o começo dos pagamentos, ou até mesmo pagamentos em períodos não sequenciais etc., sempre fruto do acordo da necessidade e capacidade do devedor e do credor. Fato comum a todas as Rendas é que sempre haverá a incidência de juros proporcionais ao tempo e/ou ao número das parcelas.

Definições

Verificamos os problemas financeiros que envolvem capital (C ou PV) quando é aplicado ou emprestado à taxa determinada de juros (i), tanto no seu regime de capitalização simples como no composto. Transcorrido o tempo determinado (n), produz determinado montante (M ou FV), devendo assim o empréstimo ou investimento ser liquidado em um único pagamento ou recebimento.

Estaremos agora estudando casos financeiros que envolvam empréstimo ou aplicação de um capital (C ou PV), mas que serão liquidados em diversas (n) prestações ou parcelas iguais, em períodos constantes e sucessivos, com determinada taxa de juros compostos.

O valor dessas prestações (PMT, *Payment* - Pagamento), que são iguais e consecutivas e que caracterizam uma série uniforme, chamaremos de PMT. Objetivando os aspectos didáticos deste material, consideraremos por ora somente séries uniformes com as seguintes características:

- Séries uniformes finitas, ou seja, com número específico e finito de pagamentos (PMT).
- Os vencimentos terão periodicidade constante.

Anotações

- Por definição, o sistema de cálculo dessas parcelas será PRICE ou Sistema de Amortização Francês.

- Os vencimentos dos pagamentos ou recebimentos podem ocorrer no início [BEG] (termos antecipados) ou no final [END] (termos postecipados) de cada período.

Classificação das anuidades

As anuidades podem ser classificadas em categorias, e Mathias (2011) expõe de uma forma didática este conteúdo.

Quanto ao Prazo

a) rendas temporárias: quando o número dos termos que compõem a renda é finito. Exemplo: o conjunto de 12 prestações iguais de uma compra feita a prazo; e

b) rendas perpétuas: quando o número dos termos que compõem a renda é infinito. Exemplo: uma pessoa muito rica deixa como herança ao seu filho o rendimento mensal perpétuo de um capital aplicado em uma instituição financeira (IF).

Quanto à variação dos seus elementos

Sob este ponto de vista, as rendas podem ser classificadas em:

a) rendas certas: quando todos os seus elementos – número de termos, vencimentos dos termos e valores dos termos – estão previamente fixados; e

b) rendas aleatórias: quando pelo menos um dos seus elementos não está determinado. Exemplo de anuidade aleatória é o conjunto de pagamentos dos prêmios de um seguro de vida; o número de pagamentos (número de termos da renda) não é conhecido por não se saber antecipadamente quanto tempo o segurado vai viver.

Quanto ao Valor dos termos

a) Constante: quando os valores dos termos que as compõem são constantes. Exemplo: prestações iguais em uma compra a crédito; e

Anotações

b) Variável: quando os valores dos termos que as compõem são variáveis. Exemplo: depósitos em conta de poupança com o que sobra do salário mensalmente.

Quanto à Forma de Pagamento ou de Recebimento

a) Imediatas: quando os termos são exigíveis a partir do primeiro período.

   a. Postecipadas ou vencidas: se os termos são exigíveis no fim dos períodos.

   b. Antecipadas: se os termos são exigíveis no início dos períodos.

b) Diferidas: se os termos forem exigíveis a partir de uma data que não seja o primeiro período.

   a. Postecipadas ou vencidas: se os termos são exigíveis no fim dos períodos.

   b. Antecipadas: se os termos são exigíveis no início dos períodos.

Quanto à Periodicidade

a) Periódicas: quando o intervalo entre dois termos consecutivos é constante (pagamentos mensais, semestrais ou anuais, por exemplo);

b) Não periódicas: quando o intervalo entre dois termos consecutivos é variável.

Quadro-resumo

Quadro 1 – Quadro Resumo da Classificação das Anuidades

Rendas
- Certas / Aleatórias
- Temporárias / Perpétuas
- Periódicas / Não periódicas
- Constantes / Variáveis
- Imediatas / Diferidas
- Postecipadas / Antecipadas

Fonte: o autor

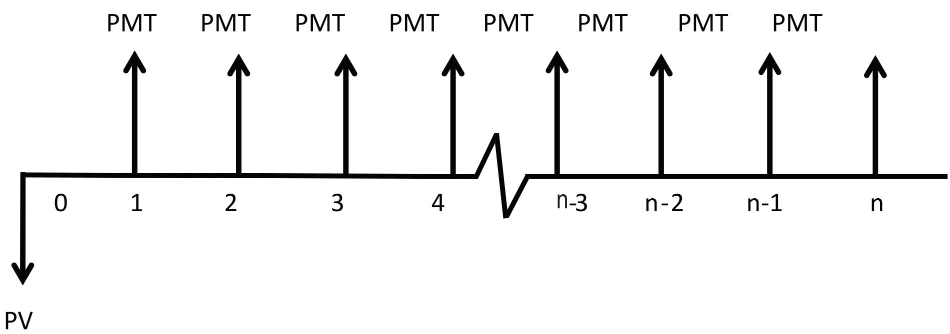
Anotações

Modelo Básico de Anuidade

Ainda segundo Mathias (2011), um modelo básico de Anuidade tem as seguintes características:

- Renda
- Certa
- Temporária
- Periódica
- Constante
- Imediata
- Postecipada

Além, é claro, de a taxa de juros *i* ser referida ao mesmo período dos termos apresentados. Assim, propõe-se ainda um exemplo para melhor compreensão do modelo básico de anuidade.



A utilização da calculadora financeira, por meio dos seus registradores financeiros, se dá da mesma maneira, utilizando o valor das prestações ou anuidades iguais mediante a tecla PMT, e solicitando o valor presente pelo registrador PV, ou vice-versa.

Anotações

Exemplo 3-12

Um conjunto de sala de estar custa R$ 5.000,00 à vista, mas pode ser financiado sem entrada, em 10 prestações mensais iguais, à taxa de 3% ao mês. Calcule a prestação a ser paga pelo comprador.

Utilizando a calculadora HP12C, teremos:

[F] [CLX]	Limpa os registradores financeiros.
5000 [PV]	Informa o Valor Presente.
10 [n]	Informa o período de capitalização.
3 [i]	Informa a taxa de juros da operação.
PMT → -586,15	Retorna o Valor da Prestação (ou anuidade).

Assim, sabemos agora que esse bem será pago em 10 parcelas iguais de $ 586,15.

Valor Atual do modelo básico

Este procedimento se replica também no cálculo do Valor Atual, pois neste caso, após informar o valor das anuidades, a taxa e o período de capitalização, solicitar-se-á o PV.

Anotações

Exemplo 3-13

Calcule o valor presente de uma anuidade antecipada de 12 termos mensais de R$ 250,00 à taxa de 3% ao mês.

Utilizando a calculadora HP12C, teremos:

[F] [CLX]	Limpa os registradores financeiros.
250 [PMT]	Informa o valor da prestação.
12 [n]	Informa o período de capitalização.
3 [i]	Informa a taxa de juros da operação.
PV → -2.488,50	Retornar o Valor Presente.

Essa operação tem um valor presente de $2.488,50.

Montante do modelo básico

O valor do Montante (ou Valor Futuro – FV) aqui é obtido pelo mesmo procedimento. Observe que neste caso teríamos o valor das anuidades, do período de capitalização [n] e ainda a taxa de aplicação. Isso tudo pode ser verificado no exemplo a seguir:

Anotações

Exemplo 3-14

Uma pessoa deposita em uma financeira, no início de cada mês, durante 5 meses, a quantia de R$ 100,00. Calcule o valor futuro ou montante da renda, sabendo que esta financeira paga juros de 2% ao mês, capitalizados mensalmente.

Utilizando a calculadora HP12C, teremos:

[F] [CLX]	Limpa os registradores financeiros.
100 [PMT]	Informa o valor da prestação.
5 [n]	Informa o período de capitalização.
2 [i]	Informa a taxa de juros da operação.
FV → -520,40	Retornar o Valor Futuro.

O que verificamos é que, depositando mensalmente o valor de $ 100, durante cinco meses, à taxa de juros compostos de 2% a.m., ao final da aplicação, será gerado um montante de $520,40.

Rendas Antecipadas ou Postecipadas

É interessante ainda destacar um ponto pertinente da análise de rendas ou anuidades. É muito comum estarmos ante operações financeiras que exigem uma entrada.

No caso de se tratar de parcelas iguais, por exemplo, ao adquirir um produto cujo contrato reza o pagamento em 24 parcelas, sendo uma de entrada (comumente conhecida 1+23), o valor do empréstimo será menor, pois o ato da entrada reduz o valor total financiado.

Anotações

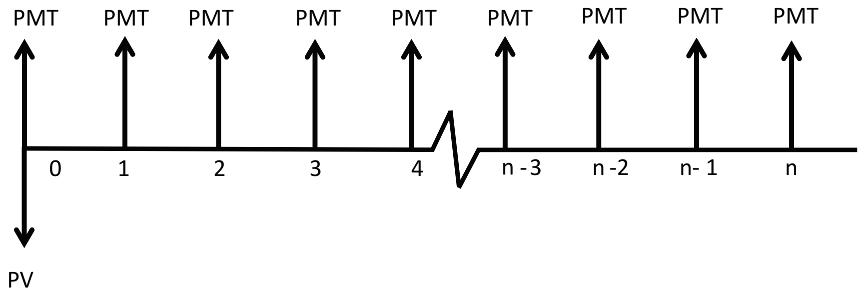


Figura 8 – PMT

Fonte: o autor

Por meio da calculadora financeira, esse processo é facilitado, já que podemos processar nossos cálculos com a indicação que a primeira das parcelas será à vista. Para tanto, precisamos acionar essa função mediante as teclas [G] [BEG]. Essa função [BEG] está localizada na mesma tecla do número [7] e indica que agora as prestações serão calculadas com entrada (*begin,* em inglês). Para voltar ao padrão da calculadora (postecipada ou sem entrada), clique em [G] [END].

Exemplo 3-15

Um conjunto de sala de estar custa R$ 5.000,00 à vista, mas pode ser financiado em 10 prestações mensais iguais com uma entrada de igual valor (ou seja, 1+9), à taxa de 3% ao mês. Calcule a prestação a ser paga pelo comprador.

Utilizando a calculadora HP12C, teremos:

[F] [CLX]	Limpa os registradores financeiros.
5000 [PV]	Informa o Valor Presente.
10 [n]	Informa o período de capitalização.
3 [i]	Informa a taxa de juros da operação.
[G] [BEG]	Configura as anuidades com Entrada.
PMT → -569,08	Retorna o Valor da Prestação (ou anuidade).

Assim, sabemos agora que esse bem será pago com uma entrada mais nove parcelas iguais de $ 569,08.

Note que, comparando ao Exemplo 3-12, o valor da anuidade ou parcela é menor, pois com a entrada, o valor financiado também é menor e assim incorrerão menores valores de juros aqui refletidos.

Exemplo 3-16

Uma mesa está sendo vendida em 6 prestações mensais iguais de $35,00. A primeira prestação será paga no ato da compra. A taxa de juros cobrada é de 4% ao mês. O valor à vista é de $200,00. Qual opção é a melhor?

Visor com o **BEGIN**

F	FIN	35	PMT	6	N	4	i	PV	→	-190,81

Portanto, comprar a prazo é melhor, pois $190,81 é menor que $200,00.

RENDAS VARIÁVEIS OU FLUXO DE CAIXA VARIÁVEL

O que vimos até agora tratou sempre sobre o valor presente, futuro ou de anuidades, quando aplicados em períodos a taxas de juros compostos. Entretanto, o mundo dos negócios nem sempre traz-nos questões tão simples ou diretas assim. Por vezes, estamos diante de uma análise que exige um desenvolvimento mais elaborado no tocante à matemática financeira. As fórmulas e tabelas financeiras têm seu lugar e importância na história, e a utilização das calculadoras financeiras comprovadamente trouxe dinamismo e agilidade nesse mesmo sentido.

Agora, considere o fluxo de caixa apresentado a seguir:

Anotações

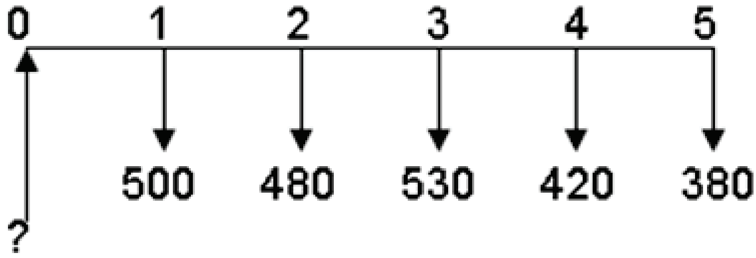


Figura 9 – Fluxo de caixa

Fonte: o autor

Caso esta operação seja analisada à taxa de 10% a.m. e desejássemos conhecer o valor à vista (ou valor presente – PV), outra solução é resolver cada valor em seu período e somá-los todos ao final, conforme foi demonstrado em Equivalência de Capitais, no Exemplo 3-10,.

$$V = \frac{500}{(1+0{,}1)1^1} + \frac{480}{(1+0{,}1)^2} + \frac{530}{(1+0{,}1)^3} + \frac{420}{(1+0{,}1)^4} + \frac{380}{(1+0{,}1)^5}$$

Sem segredos nesse formato, cabe agora revelar uma outra função absolutamente útil na calculadora financeira: o cálculo em fluxos de caixa variáveis.

Atente que praticamente todas as teclas da sua calculadora é de múltipla função, cumprindo mais do que um único papel. Isso é assim porque se cada tecla tivesse apenas uma função, a calculadora seria muito maior e sua portabilidade estaria comprometida. As funções adicionais são acionadas por meio de teclas específicas, apresentadas a seguir.

Anotações

Figura 10 – Teclas de Funções Especiais na Calculadora Financeira HP12C

Fonte: o autor

Assim, se desejarmos acionar função como para calcular a Taxa Interna de Retorno (ou *Internal Rate of Return* – IRR, em inglês) , devemos pressionar os botões:

Figura 11 – Teclas para o cálculo da Taxa Interna de Retorno

Fonte: o autor

Semelhantemente, para que utilizemos as memórias da calculadora para o cálculo de fluxo de caixa variável, precisaremos utilizar as seguintes teclas:

Figura 12 – Registros de Fluxo de Caixa Variável

Fonte: o autor

As teclas, apesar de serem as mesmas utilizadas para o registro de Valor Presente (PV), prestações ou anuidades (PMT) e Valor Futuro (FV), desempenharão outra função pelo uso conjunto da tecla [G], conforme procedimento.

Anotações

Funções Básicas

CFo – *Cash Flow* inicial (valor no momento zero)

CFj – *Cash Flow* jésimo (valor no momento 1, 2, 3, 4, 5, 6, … , j)

Nj – número de fluxos de caixa iguais e consecutivos

NPV – *Net Present Value* ou Valor Presente Líquido.

IRR – *Internal Rate of Return* ou Taxa Interna de Retorno

Figura 13 – Funções Básicas

Fonte: o autor

A IRR – Taxa Interna de Retorno é a taxa que equaliza o valor atual de 1 ou mais pagamentos (saídas de caixa), isto é, valor atual de 1 ou mais recebimentos (entradas de caixa). Já o NPV – Valor Presente Líquido – consiste em calcular o valor presente de uma série de pagamentos a uma taxa conhecida, e deduzir deste o valor do fluxo inicial que pode ser um empréstimo, financiamento ou investimento.

Anotações

Exemplo 3-17

No exemplo dado há pouco, poderemos calcular o Valor Presente Líquido (ou NPV) daquele fluxo de caixa, já que também nos foi informada a taxa de juros para descontar os fluxos no tempo decorrido.

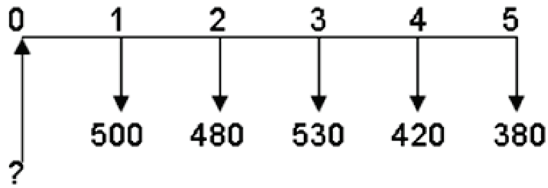


Figura 14 – Exercício 3-17

Fonte: o autor

Na calculadora HP12C teremos:

[F] [REG]	Limpa os registradores financeiros
0 [G] [CFo]	Informa valor presente zero
500 [G] [CFj]	Informa o valor do primeiro período
480 [G] [CFj]	Informa o valor do segundo período
530 [G] [CFj]	Informa o valor do terceiro período
420 [G] [CFj]	Informa o valor do quarto período
380 [G] [CFj]	Informa o valor do quinto período
10 [i]	Informa a taxa de juros da operação
[F] [NPV]	-1.772,25 → Valor Presente Líquido do Fluxo de Caixa

Anotações

Atente ao fato de que a calculadora entende a ordem de períodos exatamente pela ordem de inserção dos valores, ou seja, a sequência dos valores inseridos precisa estar exatamente igual ao caso em análise.

Exemplo 3-18

Uma mercadoria pode ser adquirida a taxa de 5% a.m., como segue:

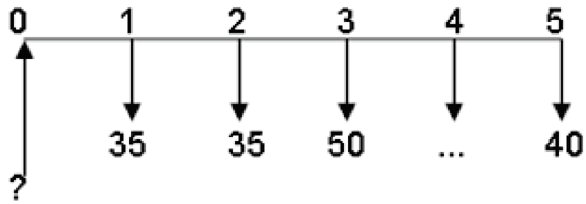


Figura 15 – Exercício 3-18

Fonte: o autor

Como já comentamos há pouco, a calculadora assimila e calcula o valor das variações de caixa conforme estes ocorrem, mas o fluxo acima possui uma peculiaridade: no quarto período não foi realizado pagamento. Como proceder em uma situação como esta?

É necessário que se informe o transcurso do tempo, ou seja, que se passou um período e que nenhum pagamento fora realizado naquele momento. É necessário que se informe assim um pagamento igual a zero, de maneira que a calculadora entenda a passagem do tempo sem que se tenha realizado um pagamento naquele momento. Vejamos a seguir:

Anotações

Na calculadora HP12C teremos:

[F] [REG]	Limpa os registradores financeiros
0 [G] [CFo]	Informa valor presente zero
35 [G] [CFj]	Informa o valor do primeiro período
35 [G] [CFj]	Informa o valor do segundo período
50 [G] [CFj]	Informa o valor do terceiro período
0 [G] [CFj]	Informa o valor do quarto período
40 [G] [CFj]	Informa o valor do quinto período
5 [i]	Informa a taxa de juros da operação
[F] [NPV]	-139,61 → Valor Presente Liquido do Fluxo de Caixa

Exemplo 3-19

Calcular a taxa de retorno do investimento representado pelo fluxo de caixa abaixo:

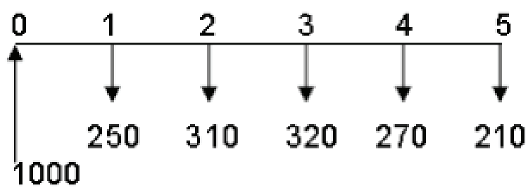


Figura 16 – Exercício 3-19

Fonte: o autor

Anotações

O que temos nesse caso é a informação de um Valor Presente (ou Valor Atual), investido em uma operação e, a partir deste, uma série de valores que retornaram ao longo do tempo. Deseja-se saber assim qual terá sido a Taxa de Retorno (ou IRR) desse fluxo de caixa. O detalhe ao qual cabe destaque é que, considerando as setas apresentadas no fluxo, existem valores de entrada e de saída, o que também deverá ser representado na própria calculadora financeira, de maneira que a mesma saiba exatamente o que entra e o que sai, ou seja, que valores foram investidos e que valores foram recuperados do investimento.

Uma sugestão nossa é reduzir ao máximo o número de teclas digitadas. Com isso, queremos dizer que se é necessário mudar o sinal (CHS – *Change Signal*) de algum dos fluxos de caixa, que isto ocorra com o menor número possível de lançamentos.

Na calculadora HP12C teremos:

[F] [REG]	Limpa os registradores financeiros
1000 [CHS] [G] [CFo]	Informa o Valor Presente
250 [G] [CFj]	Informa o valor do primeiro período
310 [G] [CFj]	Informa o valor do segundo período
320 [G] [CFj]	Informa o valor do terceiro período
270 [G] [CFj]	Informa o valor do quarto período
210 [G] [CFj]	Informa o valor do quinto período
[F] [IRR]	11,5 → Taxa Interna de Retorno da operação

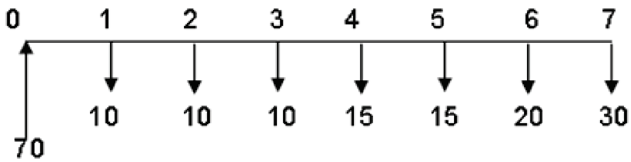
Exemplo 3-20

Um equipamento no valor de $70 mil é integralmente financiado, em 7 parcelas mensais, sendo

Anotações

as 3 primeiras de $10 mil, as 2 seguintes de $15 mil, a próxima de $20 mil e a última de $30 mil. Determinar a taxa interna de retorno dessa operação.

A representação deste fluxo seria a seguinte:



Neste exemplo, podemos ver que existe a repetição de parcelas de igual valor e em sequência no fluxo de caixa. Poderemos fazer uso aqui da função [Nj], que repete os referidos fluxos e reduz sensivelmente a chance de erros de lançamento, fato comum quando se faz a entrada sequencial de valores iguais em um lançamento.

O procedimento é basicamente o seguinte: após o lançamento do valor do fluxo por meio da tecla [G] [CFj], informa-se quantas vezes este valor se repetirá no fluxo. No nosso exemplo acima, serão três vezes para o valor de $ 10 e duas vezes para o valor de $ 15.

Na calculadora HP12C teremos:

[F] [REG]	Limpa os registradores financeiros
70 [CHS] [G] [CFo]	Informa o Valor Presente
10 [G] [CFj]	Informa o valor do primeiro período
3 [G] [Nj]	Informa o valor do segundo período
15 [G] [CFj]	Informa o valor do terceiro período
2 [G] [Nj]	Informa o valor do quarto período

Anotações

20 [G] [CFj]	Informa o valor do quinto período
30 [G] [CFj]	Informa o valor do quinto período
[F] [IRR]	10,40 à Taxa Interna de Retorno da operação

Exemplo 3-21

Um automóvel é financiado em 18 meses de $325,00 e mais 3 prestações semestrais de reforço (ou balão) de $775,00, $875,00, e $975,00. Calcular o valor financiado, sendo que a taxa de juros é de 2,9% a.m.

Representando os dados acima em um fluxo de caixa, teremos:

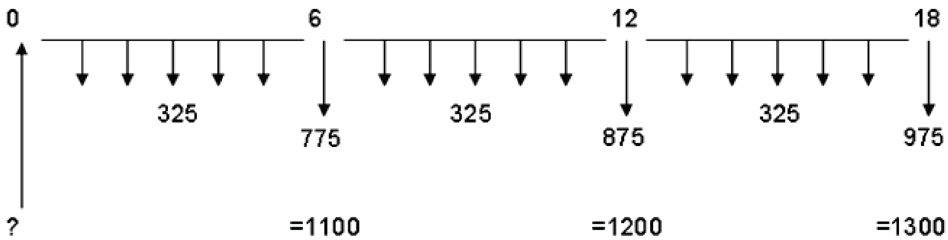


Figura 17 – Exercício 3-21

Fonte: o autor

Esse tipo de problema é também muito comum em investimentos de imóveis, quando a compra ocorre ainda na planta essas chamadas de capital são necessárias para aceleração do empreendimento.

Fato aqui relevante é que após estruturar as parcelas mensais, será preciso também considerar as parcelas semestrais de reforço no cálculo. Para isso, nesses momentos, é necessário que se some o valor das parcelas mensais juntamente com os balões semestrais e que se lance um único valor naquele período.

Anotações

Caso se assuma outro procedimento, como lançar as parcelas mensais e depois os balões, o valor presente não estará correto porque já entendemos e provamos que o dinheiro tem valor diferente no tempo e, por exemplo, o valor de $ 775 pago no 6º mês não vale o mesmo que um valor de $ 775 pago no 19º mês, exigindo que se lance este e os demais valores exatamente nos períodos em que vierem a ocorrer.

Na calculadora HP12C teremos:

[F] [REG]	Limpa os registradores financeiros
0 [G] [CFo]	Informa o Valor Presente zero
325 [G] [CFj]	Informa o valor do primeiro período
5 [G] [Nj]	Informa o número de repetições deste valor no Fluxo
1100 [G] [CFj]	Informa o valor do sexto período
325 [G] [CFj]	Informa o valor do sétimo período
5 [G] [Nj]	Informa o número de repetições desse valor no Fluxo
1200 [G] [CFj]	Informa o valor do décimo segundo período
325 [G] [CFj]	Informa o valor do décimo terceiro período
5 [G] [Nj]	Informa o número de repetições desse valor no Fluxo
1300 [G] [CFj]	Informa o valor do décimo oitavo período
2,9 [i]	Informa a taxa de juros da operação
[F] [NPV]	à 6.364,48 Retorna o Valor Presente Líquido

Anotações

Reflita

1. Se Nj não é usado, a calculadora assume Nj = 1.
2. Caso não haja valor inicial, CF0 = 0.
3. Usar as teclas CHS para direcionar as entradas e as saídas.
4. O fluxo de caixa precisa ser composto de períodos de capitalização iguais.
5. A calculadora suporta no máximo 20 fluxos, além do inicial CF0.
6. O limite de Nj é 99 para cada CF.
7. O investimento inicial é armazenado na memória zero; os fluxos seguintes são armazenados na ordem das memórias, ou seja, CF1 na memória 1, CF2 na memória 2 e assim por diante até CF19 na memória 9; o fluxo CF20 fica na FV.
8. Para corrigir valores no fluxo de caixa, é só alterar a memória correspondente, usando a tecla STO.
9. Para fluxo de caixa extenso, às vezes é necessário limpar as linhas de programação para liberar memória.
10. O IRR é armazenado em i.
11. O nº de valores do fluxo é armazenado em n (menos o inicial).
12. Para saber se o IRR calculado está correto, o NPV deverá ser igual a zero.
13. Para revisar o fluxo introduzido, use RCL g CFj repetidamente (ordem inversa) ou RCL e o nº da memória (RCL 0, RCL 1, RCL j).

Exercícios

113. O preço à vista de uma casa é $70.000,00. No entanto, o banco exige 20% de entrada. O restante será financiado em 60 parcelas iguais e mensais com 4 meses de carência, a uma taxa de 2,5% a.m. Qual será o valor das parcelas?

114. Uma pessoa vai receber 10 parcelas mensais e iguais de $ 250,00 com uma carência de 4 meses para recebimento da primeira parcela. Qual é o valor atual dessa série de pagamentos, se a taxa considerada for de 2% a.m?

Anotações

115. Um fogão foi dividido em 5 parcelas mensais e iguais de $ 125,00, sendo a primeira parcela paga no ato da compra como uma entrada. Se a taxa que a loja “Só Fogões” opera é de 1,5% a.m., qual é o preço do fogão à vista?

116. João efetuou uma compra cujo pagamento deveria ser efetuado em 4 parcelas trimestrais de $ 2.500,00, a taxa de juros seria de 2% a.m., vencendo a 1ª daqui a 3 meses. Caso João queira pagar essa compra em 12 parcelas mensais e iguais, vencendo o 1º pagamento em 1 mês, qual será o valor das parcelas?

117. Carlos comprou um aparelho de som que foi pago da seguinte maneira: 3 parcelas mensais e iguais de $ 200,00, vencendo a 1ª daqui a um mês e duas parcelas de $ 500,00 a serem pagas no 5º e no 6º mês. Considerando que a taxa de juros foi de 3%, calcule o valor do aparelho à vista.

118. Um carro é vendido da seguinte forma: uma entrada de $ 3.500,00, 4 parcelas mensais iguais de $ 2.500,00, vencendo a 1ª daqui a 1 mês e outras 2 parcelas com vencimento no sexto mês no valor de $ 3000. Se a taxa de juros for de 2% a.m., qual o valor do carro à vista.

119. Calcule o valor presente do seguinte fluxo de caixa, realizados a fim de cada mês: 1º mês $ 20.000,00 e do 2º ao 5º mês $ 40.000,00, considerando uma taxa de juros de 3% a.m.

120. O preço à vista de um bem é $ 80.000,00. Pretendo comprá-lo a prazo dando uma entrada de $ 24.000,00, e o restante financiar em 36 prestações com o primeiro pagamento para daqui a 6 meses. Considerando uma taxa de 3,5% a.m., calcule o valor das prestações.

121. Um veículo foi comprado para ser pago em 3 prestações mensais e iguais, vencendo a primeira somente no final do terceiro mês após a compra. Sabendo que o veículo à vista é $ 17.850,00 e que a taxa de juros utilizada pela loja é 7% a.m., qual o é o valor das prestações?

122. Ao dar entrada de $ 60.000,00 em uma picape, Lucas se responsabilizou em pagar mensalmente parcelas de $ 1.380,00 por 60 meses, com a primeira parcela vencendo ao final de 2 meses após a compra. Qual o valor à vista da picape, considerando que a operação foi efetuada à taxa de 2% a.m.?

Anotações

123. Simpson efetuou um empréstimo em uma instituição financeira para pagar em 10 prestações de $ 1.700,00, com uma carência de 5 meses para pagamento da primeira parcela. Sendo a taxa utilizada de 5% a.m., qual o valor do empréstimo?

124. Eduardo comprou uma motocicleta que custa $ 10.000,00. A aquisição foi efetuada em 18 pagamentos mensais e iguais, com uma carência de 4 meses para começar a pagar. O valor da taxa acertada foi de 2,8% a.m. Calcule o valor das mensalidades?

125. Rivaldo estava andando no shopping e se interessou por um aparelho eletrônico. Porém, ele possui uma atividade que lhe remunera durante 3 meses e fica 2 meses sem renda. Assim, ficou acordado entre ele e o vendedor a seguinte forma de pagamento: 6 pagamentos iguais de $ 75,00, sendo os 3 primeiros pagamentos para o 3º, 4º e 5º mês, e as outras 3 para o 8º, 9º e 10º mês, a partir de hoje. A taxa de juro utilizada foi de 2,5% a.m. Qual era o valor à vista do aparelho?

126. Danilo foi a um feirão de carros usados e se interessou por um que custava $ 9.500,00 à vista. Sem possuir o dinheiro para adquiri-lo nessa forma de pagamento e após longa conversa com o vendedor, ficou acordado o seguinte: daqui a 2 meses ele pagaria $3.000,00, e 3 meses após esse pagamento, ele pagaria mais 5 pagamentos iguais e subsequentes. Sabendo que foi adotada uma taxa de 2% a.m., qual será o valor das parcelas?

127. Igor decidiu comprar um carro 0 km que custa $ 24.990,00 à vista. Ele possui $ 12.000,00 para dar de entrada e se comprometeu a pagar 24 parcelas iguais e mensais com uma carência de 6 meses. Sabendo que a taxa de juros ajustada foi de 2% a.m., qual será o valor das parcelas?

128. Maria adquiriu um aparelho eletrônico para pagar em oito prestações, sendo que as três primeiras seriam no valor de $ 120,00, as três seguintes no valor de $ 100,00 e as restantes no valor de $ 80,00. Considerando uma taxa de 1,5% a.m., calcule o valor à vista desse aparelho.

129. Se uma TV está sendo vendida em 12 prestações mensais, sendo as seis primeiras no valor de $ 150,00 e as restantes no valor de $ 200,00. Considerando uma taxa de 1,0% a.m., calcule o valor à vista dessa TV.

Anotações

130. Se eu fizer um depósito hoje de $ 1.000,00 em uma instituição financeira e, depois de 5 meses, depositar $ 250,00 por mês durante 1 ano, qual o valor que eu terei por ocasião do último depósito, sabendo que a taxa de juro adotada pela instituição financeira é de 1% a.m.?

131. Em uma renegociação de dívidas, ficou acertado que seriam pagas 10 prestações mensais e iguais de $ 300,00, com uma carência de 6 meses para o pagamento da primeira parcela. Qual o valor atual dessa dívida, considerando que a operação foi efetuada a uma taxa de juros de 2,5% a.m.?

132. O preço à vista de um computador é $ 2.500,00. A vendedora exige uma entrada de $200,00 e financia o saldo em 12 prestações mensais e iguais, a juros de 2,5% a.m., com 2 meses de carência para o pagamento da primeira parcela. Qual o valor dessas prestações?

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O uso de juros compostos, em todas suas formas e com os mais variados recursos, certamente é o ponto focal de nosso estudo. Compreender a natureza exponencial dos juros e seu comportamento ao longo do tempo é condição *sine qua non* no estudo das finanças. A administração financeira estriba-se com ambos os pés sobre a matemática financeira e esta última é, de forma criteriosa, o recurso mais precioso na gestão de negócios, afinal diz respeito a dois elementos raros e finitos: tempo e dinheiro.

O tempo não é infinito, parafraseando as palavras de Santo Agostinho, o que temos para fazer só podemos fazê-lo no presente, pois o passado já foi e o futuro é uma miragem, e sobre esta miragem se projeta o dinheiro e daí a importância do antecipado estudo dos seus efeitos no tempo.

UNIDADE V

SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO

Professor Dr. Daniel Eduardo dos Santos

Objetivos de Aprendizagem

- Calcular parcelas, juros, capital e montante pelo Sistema de Amortização Constante.
- Compreender o Sistema Francês (*Price*) e ainda levantar o valor de juros e amortização a cada parcela.
- Desenvolver um plano de amortização pelo Sistema Americano.

Plano de Estudo

A seguir, apresentam-se os tópicos que você estudará nesta unidade:

- **Sistema de Amortização Constante**
- **Sistema Francês (*Price*)**
- **Sistema Americano**

INTRODUÇÃO

A amortização é um processo financeiro pelo qual uma dívida ou obrigação é paga progressivamente por meio de parcelas, de modo que ao término do prazo estipulado o débito seja liquidado (SAMANEZ, 2010).

As práticas habituais classificam os empréstimos como de curto, de médio e de longo prazo. Os sistemas de amortização foram criados basicamente para operações de financiamentos e empréstimos de longo prazo, requerendo desembolsos periódicos do capital (principal) além dos encargos financeiros.

Em um empréstimo de longo prazo, as questões mais importantes estão vinculadas à explicitação do sistema de reembolso (amortização) adotado e ainda ao cálculo da taxa de juros cobrada efetivamente.

Várias são as maneiras para amortização de uma dívida, e as condições de cada operação devem estar estabelecidas em contrato firmado entre o credor (mutuante) e o devedor (mutuário).

Nosso assunto aqui – amortização de empréstimos e financiamentos – trata da forma pela qual o principal e encargos financeiros são ressarcidos ao credor do capital.

Anotações

DEFINIÇÕES

Fonte: SHUTTERSTOCK.COM

Encargos financeiros: são os juros da operação e se caracterizam como custo para o devedor e retorno para o credor.

Amortização: trata exclusivamente do pagamento do principal (capital emprestado), normalmente, é realizada por meio de parcelas periódicas (mensais, trimestrais etc.).

Saldo devedor: representa o valor do principal da dívida, em momento determinado, após a subtração do valor pago pelo credor e na forma de amortização.

Prestação: refere-se ao valor da amortização somado aos encargos financeiros devidos em determinado período de tempo. Dessa forma, entendemos que:

Prestação = Amortização + Encargos (Juros)

Essa separação permite discriminar o que representa a devolução do principal (amortização) daquilo que representa o serviço da dívida (os juros), e é importante para necessidades jurídico-contábeis e ainda na análise de investimentos, em que os juros, por serem dedutíveis para efeitos tributáveis, têm um efeito fiscal.

Carência: muitas operações de empréstimos e financiamentos consideram um diferimento, um tempo sem realização de pagamentos, postergando o pagamento da prestação ou da amortização.

Anotações

SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO

Sistema de Amortização Constante

O Sistema de Amortização Constante, também chamado Sistema Hamburguês, foi introduzido no Brasil a partir de 1971 pelo SFH - Sistema Financeiro de Habitação.

Nesse sistema, segundo Crespo (2001), o mutuário paga a dívida em prestações periódicas e imediatas, que englobam juros e amortizações. Sua diferença é que a amortização é constante em todos os períodos.

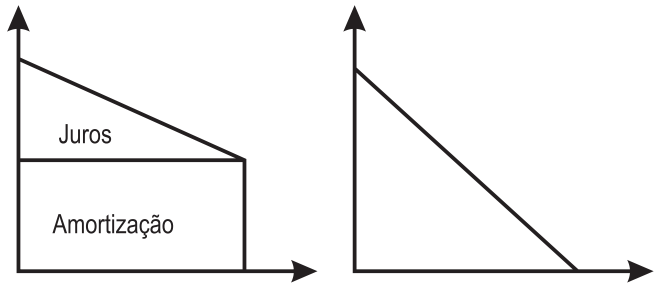


Figura 18 – Representação da Prestação e do Saldo Devedor no SAC

Fonte: o autor

Como os juros são cobrados sobre o saldo devedor e a amortização é constante, as prestações são decrescentes.

Exemplo 4-1

Veja tabela representativa a seguir, referente a empréstimo de $120.000,00 para pagamento em 8 parcelas à taxa de 3% a.m.

Anotações

Tabela 4 – Exemplo 4-1

Data	Saldo Devedor	Prestação	Amortização	Juros
0	120.000,00			
1	105.000,00	18.600,00	15.000,00	3.600,00
2	90.000,00	18.150,00	15.000,00	3.150,00
3	75.000,00	17.700,00	15.000,00	2.700,00
4	60.000,00	17.250,00	15.000,00	2.250,00
5	45.000,00	16.800,00	15.000,00	1.800,00
6	30.000,00	16.350,00	15.000,00	1.350,00
7	15.000,00	15.900,00	15.000,00	900,00
8	0,00	15.450,00	15.000,00	450,00

Fonte: o autor

O que temos é, após contrair a dívida, no período 1 foram capitalizados $3.600,00 relativos aos juros de 3% sobre o capital de $120.000,00. A amortização, constante por definição neste sistema, é resultado da divisão do valor do capital emprestado, dividido pela quantidade de parcelas. Assim, $120.000,00/8 = $15.000,00. Finalmente, a prestação do período é a soma da amortização e dos juros capitalizados, totalizando $18.600,00. No período seguinte, meu saldo devedor está menor, afinal $15.000,00 foram pagos, restando agora $105.000,00 – valor sobre o qual serão calculados meus juros no período, reiniciando o ciclo.

Saiba mais
sobre o **Assunto**

Sistema de Amortização no mercado imobiliário - José Dutra Vieira Sobrinho

O palestrante enfatizará os vários sistemas de amortização utilizados no mercado imobiliário, incluindo o SAC, a Tabela Price e o SACRE, como devem ser usados, suas restrições e vantagens, além dos principais aspectos jurídicos que os envolvem.

<http://www.youtube.com/watch?v=9vmbXlpmjEg>.

Sistema Francês (*Price*)

O sistema francês de amortização é conhecido também como Sistema Price, pois foi inventado por Richard Price, matemático e pensador inglês que viveu entre 1723 e 1791. Esse sistema leva o nome de sistema francês de amortização por ter sido adotado na França a partir do século XIX.

Caracteriza-se por pagamentos do principal em prestações iguais, periódicas e sucessivas, sendo ainda o mais utilizado pelas instituições financeiras e pelo comércio em geral (SAMANEZ, 2010).

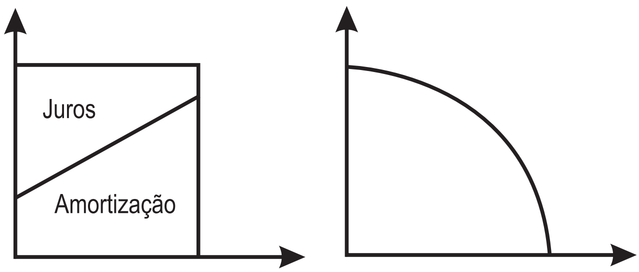


Figura 19 – Representação da Prestação e do Saldo Devedor no Sistema Price

Fonte: o autor

Como os juros incidem sobre o saldo devedor que, por sua vez, decresce à medida que as prestações são pagas, eles são decrescentes e, consequentemente, as amortizações do principal são crescentes, partindo delas, podemos preencher as demais colunas da tabela, conforme a seguir:

Anotações

Tabela 5 – Price

Data	Saldo Devedor	Prestação	Amortização	Juros
0	120.000,00			
1	106.505,23	17.094,77	13.494,77	3.600,00
2	92.605,62	17.094,77	13.899,61	3.195,16
3	78.289,02	17.094,77	14.316,60	2.778,17
4	63.542,92	17.094,77	14.746,10	2.348,67
5	48.354,43	17.094,77	15.188,48	1.906,29
6	32.710,30	17.094,77	15.644,14	1.450,63
7	16.596,84	17.094,77	16.113,46	981,31
8	-0,03	17.094,77	16.596,86	497,91

Fonte: o autor

A calculadora financeira HP12C, por definição, faz seus cálculos relacionados ao PMT (*Payment*) ou anuidades sempre utilizando o Sistema Price. Portanto, sempre que se realizar um cálculo fazendo uso dos registradores financeiros e envolvendo parcelas, lembraremos que a sistemática de cálculo é o das prestações constantes.

É possível, na HP12C, conhecer qual é o valor de juros e amortização período a período, por exemplo. Vejamos os passos a seguir.

Exemplo 4-2

Em uma operação de venda de um produto de $2.000,00, calcule os juros e a amortização em uma operação de venda financiada em 4 parcelas iguais, sem entrada, à taxa de 5% a.m.

1º passo é conhecer o valor da prestação:

[F] [REG]	Limpa os registradores financeiros
2000 [PV]	Informa o valor presente do produto

Anotações

4 [n]	Informa o número de parcelas da operação
5 [i]	Informa a taxa de juros remuneratória
PMT	→ -564,02

Ainda com esse número na tela, acessaremos agora as memórias de cálculo da HP12C, e veremos como é a composição das prestações.

2º passo – Verificando os valores de Juros e Amortização:

1 [F] [AMORT] → -100,00	Acessa o valor de Juros da 1ª parcela
[X<>Y] à 464,02	Acessa o valor da amortização da 1ª parcela

Veja que, se somar esses valores, comporemos o total da parcela obtida na tecla PMT.

[RCL] [PV] → 1.535,98	Saldo Devedor após pagar a 1ª parcela.

Para que possamos ver o valor de juros e amortização da próxima parcela, repetimos o processo.

1 [F] [AMORT] → -76,80	Acessa o valor de Juros da 2ª parcela
[X<>Y] → 487,22	Acessa o valor da amortização da 2ª parcela
[RCL] [PV] → 1.048,75	Saldo Devedor após pagar a 2ª parcela.

Caso se deseje conhecer os valores de juros e amortizações acumulados em mais de uma parcela, basta digitar a quantidade que se pretende saber e seguir os passos apresentados. Dessa forma, lembrando que a operação de financiamento acima foi realizada em 4 parcelas, restando assim ainda outras duas, poderemos ver os valores **acumulados** dessas parcelas, teclando:

Anotações

2 [F] [AMORT] → -79,26	Acessa o valor de Juros pagos na 3ª e 4ª parcelas
[X<>Y] à 1.048,75	Acessa o valor da amortização da 2ª parcela
[RCL] [PV] à 0,02	Saldo residual

Caso se trate de financiamento com carência, o processo de cálculo é realizado em dois passos: primeiro se atualiza o Valor Presente (tempo zero) pelo prazo da carência conforme taxa de juros estipulada, encontrando-se assim o Valor Futuro ou Montante (FV). Esse valor agora será utilizado como Valor Presente (PV) de um novo cálculo, em que será feito o parcelamento do valor calculado.

Sugestão de Vídeo

Linhas de financiamento, consórcio

O processo de compra da casa própria vai além da escolha do imóvel. Passa também pela decisão da forma de financiamento a ser utilizada. E como ela pode fazer toda a diferença no orçamento familiar, a Educação Financeira dessa semana mostra as diferenças entre as principais linhas de financiamento disponíveis no mercado.

<http://www.tveducacaofinanceira.com.br/episodios.asp?IDVideo=TVEF2_Episodio26>.

Exercícios

133. O preço à vista de uma casa é $100.000,00. Se essa casa for adquirida para ser liquidada pelo SAC, em 5 prestações anuais, a juros é de 10% a.a., qual será o valor da terceira prestação?

134. Qual é o valor das prestações, no sistema Francês, de um empréstimo de $18.000,00, sendo amortizado em 5 prestações anuais, com taxa de 9% a.a.

Anotações

135. Um empréstimo no valor de $2.000.000,00 é concedido à taxa de juros compostos de 10% a.a., para ser reembolsado em 5 anos por meio de prestações anuais, sendo a primeira vencível ao final do primeiro ano, pelo sistema SAC. Qual o valor da última prestação?

136. Montar uma planilha de um financiamento efetuado pelo SAC relativo aos dados indicados a seguir: PV = $64.000,00; n = 8 pagamentos anuais; e i = 12% a.a.

137. Um empréstimo de $30.000,00 será amortizado pelo Sistema Francês em 8 parcelas anuais, a uma taxa real de juro de 5% a.m. Qual o valor do saldo devedor no 3º mês?

138. Qual será o valor da 4ª prestação de um financiamento de $20.000,00, com juros de 10% a.a., em 4 prestações anuais, segundo o sistema SAC?

139. Montar as planilhas do Sistema Francês do financiamento abaixo:

140. PV = $ 70.000,00

141. n = 7 pagamentos anuais

142. i = 7% ao ano.

143. Um empréstimo no valor de $10.000 será amortizado pela Tabela Price, em 12 prestações mensais, a uma taxa de 15% a.a. Indique o valor da 4ª amortização.

144. Monte a planilha de um financiamento de $430.000,00, efetuado pelo SAC, a ser amortizados em 4 parcelas anuais, a juros de 12% a.a.

145. Construa a planilha do financiamento efetuado pelo Sistema Francês, de acordo com os dados apresentados a seguir: PV = $ 40.000,00; n = 5 pagamentos anuais; i = 15% a.a.

Anotações

INFLAÇÃO

Fonte: SHUTTERSTOCK.COM

Inflação é o aumento generalizado dos preços. A inflação desvaloriza o dinheiro no tempo, já que diminui o seu poder de compra, por isso torna-se necessário fazer uma correção monetária a fim de recuperar o poder de compra de um determinado valor.

Deve-se, portanto, ficar atento à ilusão monetária ou ao aparente rendimento de investimentos e aplicações. Determinar a taxa real de juros e o custo ou o rendimento real de um financiamento ou de uma aplicação é essencial para garantir uma análise incólume dos fatos.

Quando se realiza uma operação financeira a uma determinada taxa, espera-se uma remuneração do capital utilizado na operação a essa mesma taxa. Entretanto, com a desvalorização das unidades monetárias, essa remuneração fica distorcida. Um índice de inflação busca medir indiretamente a desvalorização da unidade monetária, quando da aquisição de um determinado grupo de bens e serviços em um dado período.

Assim, é necessário homogeneizar, no processo de cálculo da taxa real, os valores das séries financeiras para retirar os efeitos corrosivos da inflação sobre os valores aplicados ou recebidos em cada data (SAMANEZ, 2010).

Anotações

No processo de homogeneização dos valores monetários, são utilizados índices de preços para deflacionar ou inflacionar as séries de valores.

Saiba mais sobre o Assunto

Como lidar com os juros nas compras, investimentos e empréstimos

Um reflexo inevitável da tendência de alta da inflação é o aumento das taxas de juros. Este vídeo aborda a relação entre as duas taxas e quais os efeitos dessas altas na economia do país, além de explicar sobre juros nas diversas modalidades de crédito.

<http://www.tveducacaofinanceira.com.br/episodios.asp?IDVideo=TVEF3_Episodio08>.

Definições

Índices de preços: permitem formar deflatores, ou seja, operadores multiplicados pelos valores nominais das diversas épocas produzem valores correspondentes ao nível de preços da data de referência.

Deflacionar um fluxo monetário significa reduzir todos os valores da série a uma base comum de referência situada no início da série.

Inflacionar um fluxo monetário significa colocar todos os valores da série em uma base comum de referência situada no fim da série, isto é, inflacionar significa transformar os valores de cada época em valores compatíveis com a capacidade de compra verificada em uma data posterior.

Em contextos inflacionários, são muito usadas as expressões "em preços correntes" e "em preços constantes". Assim, quando o fluxo de valores monetários está em:

Anotações

Preços correntes: cada termo da série se encontra expresso em poder aquisitivo da data respectiva do termo.

Preços constantes: todos os termos da série estão expressos em poder aquisitivo de uma única data.

Índices de Preços

Um índice de preços procura medir a mudança que ocorre nos níveis de preços de um período para outro. A Fundação Getúlio Vargas (FGV), no Rio de Janeiro, realiza a maioria dos cálculos de índices de preços no Brasil; e publica mensalmente na revista Conjuntura Econômica os índices nacionais e regionais.

Existem, entretanto, outras instituições que elaboram índices de preços como Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), a Fundação Instituto de Pesquisa Econômica (Fipe), o Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (Dieese), em São Paulo, e ainda o Instituto de Pesquisas Econômicas, Administrativas e Contábeis (Ipead-UFMG), em Belo Horizonte entre outros.

O Índice Geral de Preços – Disponibilidade Interna da FGV (IGP –DI) – é o índice mais geral disponível, sendo indicado para inflacionar ou deflacionar valores monetários cujas causas foram devidas a muitos fatores — mede a inflação do país.

Para comparações específicas e obtenção de taxas reais de crescimento e reajustes de valores, diversos setores como os de construção civil e produtos agropecuários entre outros, utilizam índices de preços específicos do próprio setor.

Inflacionar ou deflacionar valores monetários

Para determinada data de referência, esse processo deve ser interpretado como uma comparação entre a evolução dos valores monetários e o comportamento dos preços dos

Anotações

produtos agrupados no índice escolhido.

Se um investimento teve uma taxa de rendimento real de 15%, tomando-se como referência determinado índice de preços, isso significa que esse rendimento superou em 15% a evolução do índice escolhido — a evolução média dos preços dos bens e serviços que compõem o índice.

Taxa de juros aparente e taxa de juros real

Aqui, usa-se a expressão “taxa aparente” para diferenciá-la da taxa nominal — taxa com mais de uma capitalização por período referencial (ver na Unidade III).

Taxa real — rendimento ou o custo de uma operação (aplicação ou captação), calculado depois de eliminados os efeitos inflacionários.

Taxa aparente — embute determinada expectativa inflacionária e é chamada nominal nas transações financeiras e comerciais — é a que vigora nas operações correntes. Essas taxas relacionam-se da seguinte forma:

$$(1+i)=(1+i_r).(1+I)$$

Em que:

i = taxa aparente;

i_r = taxa real;

I = taxa de inflação

Apesar de estar sob controle, a inflação é mal comum a todos os países que se veem inseridos no mercado mundial. O uso da inflação como ferramenta de crescimento de um país é algo mais comum do que se imagina ou deseja, e por isso entender como ela influencia os índices e ainda como estes últimos influenciam os resultados de empresas nacionais e estrangeiras é

Anotações

gabaritar o gestor a navegar por mares por vezes revoltos.

Essa turbulência pode afetar a visão e impedir uma organização de alcançar seu porto seguro, em razão de que a não percepção do efeito corrosivo da inflação sobre a economia, os mercados, preços e sobre o resultado da própria empresa poderá afastá-la, ou mesmo impedi-la em definitivo, de chegar ao seu destino. Por essa razão, em níveis mínimos, entendemos que o cálculo da inflação, seus efeitos sobre os juros reais e ainda sobre os negócios deve ser objeto de estudos e análises.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As amortizações exigem uma unidade à parte dada sua importância contextual no ambiente de negócios. É fato raro a empresa que cresce sem o uso de recursos de terceiros. A compra a prazo de um fornecedor já caracteriza o uso de financiamento externo, e, de forma mais clara, o uso recursos de agentes de fomento, financiamento ou mesmo bancos comerciais.

Assim, compreender o impacto desses financiamentos, conhecer qual o real valor dos juros pagos, compreender os efeitos da inflação e assimilar ou realizar uma gestão que suplante tais necessidades de capital são apenas alguns dos meios que, com a matemática financeira e seu ferramental ora exposto, estão à disposição do gestor. Aprender a desconstituir uma parcela e identificar sua composição, feita de amortização e juros, permite um olhar crítico sobre os custos reais absorvidos e sobre qual será o esforço para que se livre da dependência financeira ou mesmo potencialize ao máximo o uso desses recursos.

Exercícios

[1] Calcule o valor mais próximo do valor atual no início do primeiro período do seguinte fluxo de pagamentos vencíveis ao fim de cada período: do período 1 a 6, cada pagamento é de $3.000,00, do período 7 a 12, cada pagamento é de $2.000,00, e do período 13 a 18, cada pagamento é de $1.000,00. Considere juros compostos e que a taxa de desconto racional é de 4% ao período.

a) $33.448,00.

b) $31.168,00.

c) $29.124,00.

d) $27.286,00.

e) $25.628,00.

[2] Um financiamento será pago em quinze prestações mensais consecutivas, com início ao término de um de seis meses. As primeiras cinco prestações serão de $12.000,00, as cinco seguintes de $14.000,00, e as cinco últimas de $17.000,00. Se esse esquema de pagamento for trocado por outro em que o mutuário pague quinze prestações mensais iguais, também com início após um período de seis meses, o valor unitário dessas prestações, considerando-se uma taxa de juros efetiva composta de 3% ao mês, será igual a:

a) $12.718,97.

b) $13.182,56.

c) $14.089,11.

d) $15.308,29.

e) $17.856,78.

[3] Um terreno está sendo vendido à vista por $5.000.000,00, ou nas seguintes condições: I - Entrada igual a 20% do preço à vista e mais quatro prestações semestrais iguais e consecutivas de $1.401.062,00; II - Um comprador propõe um plano alternativo: cinco prestações semestrais, iguais e consecutivas, sendo a primeira paga como entrada. Mantida a taxa de juros compostos implícitas na proposta inicial, o valor das prestações do plano alternativo deverá ser de (desprezar os centavos no resultado final):

a) $1.491.578,00.

b) $1.193.262,00.

c) $1.401.061,00.

d) $1.037.619,00.

e) $1.297.024,00.

[4] Depositando $20.000,00 no início de cada ano durante 10 anos, à taxa de juros compostos de 10% ao ano, obtém-se, na data do último depósito, um montante igual ao gerado por uma aplicação de valor único feita no início do primeiro ano, durante doze meses. Desprezando-se os centavos, o valor da aplicação de valor único é de:

a) $217.272,00.

b) $231.816,00.

c) $254.998,00.

d) $271.590,00.

e) $289.770,00.

[5] Uma pessoa adquiriu um veículo financiado com uma entrada de $5.000,00 e 12 prestações mensais e sucessivas de $1.506,93 cada uma, calculadas a juros compostos de 3% ao mês. No momento da oitava prestação, a pessoa resolveu quitar toda a dívida. O valor financiado do veículo e o total pago para a quitação da dívida em questão foram, respectivamente:

a) $15.000,00 e $7.534,652.

b) $15.000,00 e $7.108,34.

c) $18.083,18 e $7.108,34.

d) $18.083,18 e $7.534,65.

e) $23.083,18 e $7.534,65.

[6] Um indivíduo comprou um automóvel usado para pagamento em sete prestações mensais iguais de $20.000,00, além da entrada. No momento em que pagou a 1ª prestação, propôs ao vendedor liquidar as outras parcelas por ocasião do vencimento da 5ª prestação sob as seguintes condições: I) juros compostos de 10% ao mês sobre os valores então vencidos; II) desconto racional composto de 5% ao mês sobre os valores a vencer. O pagamento proposto, desprezados os centavos, é igual a:

a) $128.404,00.

b) $129.002,00.

c) $129.305,00.

d) $129.800,00.

e) $130.008,00.

[7] Considere um empréstimo de $120.000,00 quitado com dez pagamentos periódicos mensais a uma taxa de 5% a.m. Considere o sistema price e calcule o que se pede: os juros da 4ª parcela.

a) $5.022,09.

b) $4.496,17.

c) $3.943,95.

d) $3.364,12.

e) $2.755,30.

[8] A SC Parcerias captou $210.000,00 junto ao Banco Delta SA com juros de 1% ao mês para pagamento pelo Sistema de Amortizações Constantes em 24 parcelas mensais. Assim, o valor da segunda prestação corresponde a:

a) $8.750,00.

b) $10.850,50.

c) $10.762,50.

d) $10.675,00.

e) $10.500,00.

[9] Considere um empréstimo de $120.000,00 quitado com dez pagamentos periódicos mensais a uma taxa de 5% a.m. Considere o sistema price e calcule o que se pede: o saldo devedor imediatamente após a 6ª parcela.

a) $78.879,04.

b) $67.282,44.

c) $55.106,02.

d) $42.320,77.

e) $28.896,26.

[10] Uma dívida no valor de $5.417,20 vai ser amortizada pelo Sistema SAC, sem entrada, com pagamento em 6 prestações mensais consecutivas, a primeira delas vencendo ao completar 30 dias da data do empréstimo, com taxa de 3% ao mês. A cota de juro na segunda prestação seria, aproximadamente, igual a:

a) $155,20.

b) $150,60.

c) $145,80.

d) $140,30.

e) $135,43.

[11] Considere um empréstimo de $120.000,00 quitado com dez pagamentos periódicos mensais a uma taxa de 5% a.m. Considere o sistema de amortizações constantes e calcule o que se pede: o valor da 2ª parcela.

a) $17.400,00.

b) $16.800,00.

c) $16.200,00.

d) $15.600,00.

e) $15.000,00.

[12] Considere um empréstimo de $120.000,00 quitado com dez pagamentos periódicos mensais, a uma taxa de 5% a.m. Considere o sistema de amortizações constantes e calcule o que se pede: os juros da 6ª parcela.

a) $3.000,00.

b) $2.400,00.

c) $1.800,00.

d) $1.200,00.

e) $600,00.

[13] Um empréstimo de $200.000,00 deve ser pago em dez prestações anuais pelo método francês de amortização a uma taxa de 12% a.a. O valor do saldo devedor, após o pagamento da quinta prestação, será de:

a) $127.597,61.

b) $145.530,76.

c) $161.542,50.

d) $23.015,80.

e) $100.000,00.

[14] O Banco do Botequim realiza empréstimos pelo prazo de 30 dias no valor de $1.000,00. O banco desconta do valor a ser recebido pelo cliente 20% a título de juros. Calcule a TIR auferida pela instituição financeira.

a) 0,1.

b) 0,15.

c) 0,2.

d) 0,25.

e) 0,3.

[16] Uma loja anuncia tudo em cinco vezes, sem entrada e "sem juros adicionais" ou à vista com um desconto especial igual a 20%. Supondo um custo financeiro igual a 10% a.a. e um preço igual a $100,00, calcule o VPL da operação de venda à vista para o lojista.

a) -6,18.

b) -4,18.

c) -2,18.

d) 2,18.

e) 4,18.

[17] Um grupo industrial do sul pensa em investir $90.000,00 para receber fluxos de caixa anuais de $10.000,00 nos próximos três anos, $20.000,00 nos anos 4 a 6 e $30.000,00 nos anos de 7 a 10. Sabendo que o custo de capital da empresa é igual a 3% a.a., calcule o seu VPL. Despreze os centavos.

a) $ 113.448,00.

b) $ 133.448,00.

c) $ 153.448,00.

d) $ 173.448,00.

e) $ 193.448,00.

[18] Uma loja anuncia tudo em cinco vezes, sem entrada e "sem juros adicionais" ou à vista com um desconto especial igual a X%. O custo financeiro mensal da operação é igual a 3%. Assinale a alternativa mais próxima do valor justo de X.

a) 12.

b) 14.

c) 16.

d) 18.

e) 20.

[19] Considerando a série abaixo de pagamentos no fim de cada ano, iniciando no ano 1 e terminando no ano 10, obtenha o número que mais se aproxima do valor atual total desses pagamentos no início do ano 1, a uma taxa de desconto racional de 10% ao ano, juros

compostos. FCs anuais: {400, 400, 400, 400, 200, 200, 200, 200, 200 e 1.200}

a) $2.208,97.

b) $2.227,91.

c) $2.248,43.

d) $2.273,33.

e) $2.300,25.

[20] Calcule a TIR: Investimento: -$80.000,00, Fluxos de caixa anuais (anos 1 a 6): $17.305,23.

a) 4% a. a.

b) 6% a. a.

c) 7% a. a.

d) 8% a. a.

e) 10% a. a.

CONCLUSÃO

Apresentar, de formar objetiva e clara, os conceitos de matemática é sempre uma tarefa fácil, mas nunca simples. Mesmo entendendo as dificuldades e vicissitudes a que nós, brasileiros, estamos sujeitos em nossa formação no ensino fundamental e médio, precisamos com urgência tomar posição no sentido de não apenas recuperar, mas ainda empenhar nossos esforços *exponencialmente* para que alcancemos a altura necessária para um país de nosso porte.

Entender matemática financeira é o objetivo ao qual nos propusemos nesta obra, e isto em linguagem facilitada, sustentada por fórmulas, gráficos, diagramas e tudo mais que útil fosse para produzir, por meio destas informações, o conhecimento em sua mente.

Outros recursos, como vídeos disponíveis na internet, reportagens e recursos produzidos por nós mesmos foram incorporados às boas práticas pedagógicas da atualidade. Todos esses esforços são recompensados quando a esses ingredientes você participa colocando um outro que é apenas seu: dedicação. Seu esforço particular, atenção às aulas, acompanhamento de fóruns e aulas sob demanda implicam em um custo de oportunidade: todos nós temos mais o que fazer com nosso tempo, e quando escolhemos fazer algo, assim agimos porque entendemos que ali nosso esforço será melhor recompensado.

Estar estudando matemática financeira por meio de nosso método lhe marcará de duas maneiras: a primeira porque compreenderá a dimensão, importância e formas de cálculo, por meio de várias ferramentas disponíveis. A outra é que, invariavelmente, você já está se ambientando a um mundo onde o que se faz é o que realmente importa, e não onde se faz.

Estudar em casa, tirar suas dúvidas por e-mail, fóruns, redes sociais ou vídeos na internet, compartilhar seus sucessos, vencer desafios, tudo isso é parte de algo mais importante que a disciplina em si, e que gera em você sementes de algo mais preciso: conhecimento. Você aprendeu como calcular juros, taxas de juros, valor de montante, descontos e taxas, além de perceber a diferença entre os regimes de capitalização simples e composto. Parcelas iguais ou fluxos variados de caixa agora deverão ter a mesma complexidade, e atualizar valores para um momento no tempo não será mais segredo, assim como saber exatamente quanto se estará pagando em determinada parcela equivalente a juros ou amortização de uma dívida.

Tudo isso, em um conceito macroeconômico, à luz de um país em desenvolvimento econômico e que necessita gerenciar adequadamente seus índices de inflação, lhe servirá de base para conhecer e tomar decisões sobre negócios, oportunidades, contratos, financiamento e tudo mais que seja pertinentes ao nosso meio.

Não existe tal coisa como uma obra absoluta, pois a perfeição só é alcançada pela aplicação do conhecimento em nosso dia a dia. E quando isso fazemos, compreendemos que temos muito mais a aperfeiçoar, a melhorar, a evoluir.

Desejamos que esta obra gere em você esse incômodo, essa inquietude, voltada a saber quais são os termos reais dos negócios analisados, além de permitir ter paz ao saber. O conhecimento é uma benção, pois lhe permitirá aquietar-se sobre sua decisão, pois, dentro das suas possibilidades, esta lhe trará melhores resultados.

Sinta-se à vontade para colaborar com este material, pois sua construção inicia-se agora. Grande abraço e bons estudos!

Prof. Dr. Daniel Eduardo dos Santos

REFERÊNCIAS

ALENCAR, Martsung F. C. R. 2006. **Noções básicas sobre juros e o combate histórico à usura**. *Jus Navigandi.* [Online] Teresina, 28 de março de 2006. [Citado em: 31 de março de 2012.] <http://jus.com.br/revista/texto/8158>.

CALDAS, Pedro Frederico. As instituições financeiras e a taxa de juros. 101, jan/mar de 1996, **Revista de Direito Mercantil.**

HAZZAN, Samuel; POMPEU, José Nicolau. **Matemática Financeira**. São Paulo: Saraiva, 2007.

MATHIAS, Washington Franco. **Matemática Financeira**. São Paulo: Atlas, 2011.

RODRIGUES, Silvio. **Direito Civil**: parte geral das obrigações. 30. ed. São Paulo: Saraiva, 2002.

ROSSETTI, José Paschoal. **Introdução à Economia**. 20. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

VIVANTE, Cesare. s/d. **Trattado di diritto commerciale**. 3. ed. Milão: s.n., s/d. vol. III.

APÊNDICE A – TABELAS FINANCEIRAS

Aqui você tem as tabelas financeiras que poderão lhe auxiliar quando não houver disponível uma calculadora financeira ou científica, ou ainda uma planilha eletrônica.

As Tabelas Financeiras possibilitam uma forma alternativa de se obter os resultados solicitados pela Matemática Financeira. Alguns podem considerar mais fácil o cálculo por meio da Tabela Financeira e outros não, mas o que importa é que, pelo método convencional (fórmulas normais) ou pelo uso de Tabela Financeiras, o resultado é o mesmo, apenas o canal é diferente.

Utilizando-se das fórmulas abaixo, as tabelas foram estruturadas para um número de períodos, que varia de 1 a 40, com taxas que vão de 0,5% a 20%.

Na primeira coluna, constam os períodos.

Na segunda coluna, o Fator de Acumulação de Capital para pagamento único:

$$VF = VP.(1+i)^n$$

Na terceira coluna, o Fator de Valor Atual, ou Valor presente de uma anuidade:

$$VP = PMT.\frac{[(1+i)^n - 1]}{[(1+i)^n.i]}$$

Na quarta e última coluna, o Fator de acumulação de capital, ou valor futuro de uma anuidade ordinária:

$$VF = PMT.\frac{[(1+i)^n - 1]}{i}$$

CESUMAR
CENTRO UNIVERSITÁRIO DE MARINGÁ

	i = 0,5%					i = 1,0%		
n	$(1+i)^n$	$a_{[i\%;n]}$	$S_{[i\%;n]}$		n	$(1+i)^n$	$a_{[i\%;n]}$	$S_{[i\%;n]}$
1	1,005000	0,995025	1,000000		1	1,010000	0,990099	1,000000
2	1,010025	1,985099	2,005000		2	1,020100	1,970395	2,010000
3	1,015075	2,970248	3,015025		3	1,030301	2,940985	3,030100
4	1,020151	3,950496	4,030100		4	1,040604	3,901966	4,060401
5	1,025251	4,925866	5,050251		5	1,051010	4,853431	5,101005
6	1,030378	5,896384	6,075502		6	1,061520	5,795476	6,152015
7	1,035529	6,862074	7,105879		7	1,072135	6,728195	7,213535
8	1,040707	7,822959	8,141409		8	1,082857	7,651678	8,285671
9	1,045911	8,779064	9,182116		9	1,093685	8,566018	9,368527
10	1,051140	9,730412	10,228026		10	1,104622	9,471305	10,462213
11	1,056396	10,677027	11,279167		11	1,115668	10,367628	11,566835
12	1,061678	11,618932	12,335562		12	1,126825	11,255077	12,682503
13	1,066986	12,556151	13,397240		13	1,138093	12,133740	13,809328
14	1,072321	13,488708	14,464226		14	1,149474	13,003703	14,947421
15	1,077683	14,416625	15,536548		15	1,160969	13,865053	16,096896
16	1,083071	15,339925	16,614230		16	1,172579	14,717874	17,257864
17	1,088487	16,258632	17,697301		17	1,184304	15,562251	18,430443
18	1,093929	17,172768	18,785788		18	1,196147	16,398269	19,614748
19	1,099399	18,082356	19,879717		19	1,208109	17,226008	20,810895
20	1,104896	18,987419	20,979115		20	1,220190	18,045553	22,019004
21	1,110420	19,887979	22,084011		21	1,232392	18,856983	23,239194
22	1,115972	20,784059	23,194431		22	1,244716	19,660379	24,471586
23	1,121552	21,675681	24,310403		23	1,257163	20,455821	25,716302
24	1,127160	22,562866	25,431955		24	1,269735	21,243387	26,973465
25	1,132796	23,445638	26,559115		25	1,282432	22,023156	28,243200
26	1,138460	24,324018	27,691911		26	1,295256	22,795204	29,525631
27	1,144152	25,198028	28,830370		27	1,308209	23,559608	30,820888
28	1,149873	26,067689	29,974522		28	1,321291	24,316443	32,129097
29	1,155622	26,933024	31,124395		29	1,334504	25,065785	33,450388
30	1,161400	27,794054	32,280017		30	1,347849	25,807708	34,784892
31	1,167207	28,650800	33,441417		31	1,361327	26,542285	36,132740
32	1,173043	29,503284	34,608624		32	1,374941	27,269589	37,494068
33	1,178908	30,351526	35,781667		33	1,388690	27,989693	38,869009
34	1,184803	31,195548	36,960575		34	1,402577	28,702666	40,257699
35	1,190727	32,035371	38,145378		35	1,416603	29,408580	41,660276
36	1,196681	32,871016	39,336105		36	1,430769	30,107505	43,076878
37	1,202664	33,702504	40,532785		37	1,445076	30,799510	44,507647
38	1,208677	34,529854	41,735449		38	1,459527	31,484663	45,952724
39	1,214721	35,353089	42,944127		39	1,474123	32,163033	47,412251
40	1,220794	36,172228	44,158847		40	1,488864	32,834686	48,886373

I = 1,5%

n	$(1+i)^n$	$a_{[i\%;n]}$	$S_{[i\%;n]}$
1	1,015000	0,985222	1,000000
2	1,030225	1,955883	2,015000
3	1,045678	2,912200	3,045225
4	1,061364	3,854385	4,090903
5	1,077284	4,782645	5,152267
6	1,093443	5,697187	6,229551
7	1,109845	6,598214	7,322994
8	1,126493	7,485925	8,432839
9	1,143390	8,360517	9,559332
10	1,160541	9,222185	10,702722
11	1,177949	10,071118	11,863262
12	1,195618	10,907505	13,041211
13	1,213552	11,731532	14,236830
14	1,231756	12,543382	15,450382
15	1,250232	13,343233	16,682138
16	1,268986	14,131264	17,932370
17	1,288020	14,907649	19,201355
18	1,307341	15,672561	20,489376
19	1,326951	16,426168	21,796716
20	1,346855	17,168639	23,123667
21	1,367058	17,900137	24,470522
22	1,387564	18,620824	25,837580
23	1,408377	19,330861	27,225144
24	1,429503	20,030405	28,633521
25	1,450945	20,719611	30,063024
26	1,472710	21,398632	31,513969
27	1,494800	22,067617	32,986678
28	1,517222	22,726717	34,481479
29	1,539981	23,376076	35,998701
30	1,563080	24,015838	37,538681
31	1,586526	24,646146	39,101762
32	1,610324	25,267139	40,688288
33	1,634479	25,878954	42,298612
34	1,658996	26,481728	43,933092
35	1,683881	27,075595	45,592088
36	1,709140	27,660684	47,275969
37	1,734777	28,237127	48,985109
38	1,760798	28,805052	50,719885
39	1,787210	29,364583	52,480684
40	1,814018	29,915845	54,267894

I = 2,0%

n	$(1+i)^n$	$a_{[i\%;n]}$	$S_{[i\%;n]}$
1	1,020000	0,980392	1,000000
2	1,040400	1,941561	2,020000
3	1,061208	2,883883	3,060400
4	1,082432	3,807729	4,121608
5	1,104081	4,713460	5,204040
6	1,126162	5,601431	6,308121
7	1,148686	6,471991	7,434283
8	1,171659	7,325481	8,582969
9	1,195093	8,162237	9,754628
10	1,218994	8,982585	10,949721
11	1,243374	9,786848	12,168715
12	1,268242	10,575341	13,412090
13	1,293607	11,348374	14,680332
14	1,319479	12,106249	15,973938
15	1,345868	12,849264	17,293417
16	1,372786	13,577709	18,639285
17	1,400241	14,291872	20,012071
18	1,428246	14,992031	21,412312
19	1,456811	15,678462	22,840559
20	1,485947	16,351433	24,297370
21	1,515666	17,011209	25,783317
22	1,545980	17,658048	27,298984
23	1,576899	18,292204	28,844963
24	1,608437	18,913926	30,421862
25	1,640606	19,523456	32,030300
26	1,673418	20,121036	33,670906
27	1,706886	20,706898	35,344324
28	1,741024	21,281272	37,051210
29	1,775845	21,844385	38,792235
30	1,811362	22,396456	40,568079
31	1,847589	22,937702	42,379441
32	1,884541	23,468335	44,227030
33	1,922231	23,988564	46,111570
34	1,960676	24,498592	48,033802
35	1,999890	24,998619	49,994478
36	2,039887	25,488842	51,994367
37	2,080685	25,969453	54,034255
38	2,122299	26,440641	56,114940
39	2,164745	26,902589	58,237238
40	2,208040	27,355479	60,401983

	i = 2,5%				i = 3,0%		
n	$(1+i)^n$	$a_{[i\%;n]}$	$S_{[i\%;n]}$	n	$(1+i)^n$	$a_{[i\%;n]}$	$S_{[i\%;n]}$
1	1,025000	0,975610	1,000000	1	1,030000	0,970874	1,000000
2	1,050625	1,927424	2,025000	2	1,060900	1,913470	2,030000
3	1,076891	2,856024	3,075625	3	1,092727	2,828611	3,090900
4	1,103813	3,761974	4,152516	4	1,125509	3,717098	4,183627
5	1,131408	4,645828	5,256329	5	1,159274	4,579707	5,309136
6	1,159693	5,508125	6,387737	6	1,194052	5,417191	6,468410
7	1,188686	6,349391	7,547430	7	1,229874	6,230283	7,662462
8	1,218403	7,170137	8,736116	8	1,266770	7,019692	8,892336
9	1,248863	7,970866	9,954519	9	1,304773	7,786109	10,159106
10	1,280085	8,752064	11,203382	10	1,343916	8,530203	11,463879
11	1,312087	9,514209	12,483466	11	1,384234	9,252624	12,807796
12	1,344889	10,257765	13,795553	12	1,425761	9,954004	14,192030
13	1,378511	10,983185	15,140442	13	1,468534	10,634955	15,617790
14	1,412974	11,690912	16,518953	14	1,512590	11,296073	17,086324
15	1,448298	12,381378	17,931927	15	1,557967	11,937935	18,598914
16	1,484506	13,055003	19,380225	16	1,604706	12,561102	20,156881
17	1,521618	13,712198	20,864730	17	1,652848	13,166118	21,761588
18	1,559659	14,353364	22,386349	18	1,702433	13,753513	23,414435
19	1,598650	14,978891	23,946007	19	1,753506	14,323799	25,116868
20	1,638616	15,589162	25,544658	20	1,806111	14,877475	26,870374
21	1,679582	16,184549	27,183274	21	1,860295	15,415024	28,676486
22	1,721571	16,765413	28,862856	22	1,916103	15,936917	30,536780
23	1,764611	17,332110	30,584427	23	1,973587	16,443608	32,452884
24	1,808726	17,884986	32,349038	24	2,032794	16,935542	34,426470
25	1,853944	18,424376	34,157764	25	2,093778	17,413148	36,459264
26	1,900293	18,950611	36,011708	26	2,156591	17,876842	38,553042
27	1,947800	19,464011	37,912001	27	2,221289	18,327031	40,709634
28	1,996495	19,964889	39,859801	28	2,287928	18,764108	42,930923
29	2,046407	20,453550	41,856296	29	2,356566	19,188455	45,218850
30	2,097568	20,930293	43,902703	30	2,427262	19,600441	47,575416
31	2,150007	21,395407	46,000271	31	2,500080	20,000428	50,002678
32	2,203757	21,849178	48,150278	32	2,575083	20,388766	52,502759
33	2,258851	22,291881	50,354034	33	2,652335	20,765792	55,077841
34	2,315322	22,723786	52,612885	34	2,731905	21,131837	57,730177
35	2,373205	23,145157	54,928207	35	2,813862	21,487220	60,462082
36	2,432535	23,556251	57,301413	36	2,898278	21,832252	63,275944
37	2,493349	23,957318	59,733948	37	2,985227	22,167235	66,174223
38	2,555682	24,348603	62,227297	38	3,074783	22,492462	69,159449
39	2,619574	24,730344	64,782979	39	3,167027	22,808215	72,234233
40	2,685064	25,102775	67,402554	40	3,262038	23,114772	75,401260

i = 3,5%

n	$(1+i)^n$	$a_{[i\%;n]}$	$S_{[i\%;n]}$
1	1,035000	0,966184	1,000000
2	1,071225	1,899694	2,035000
3	1,108718	2,801637	3,106225
4	1,147523	3,673079	4,214943
5	1,187686	4,515052	5,362466
6	1,229255	5,328553	6,550152
7	1,272279	6,114544	7,779408
8	1,316809	6,873956	9,051687
9	1,362897	7,607687	10,368496
10	1,410599	8,316605	11,731393
11	1,459970	9,001551	13,141992
12	1,511069	9,663334	14,601962
13	1,563956	10,302738	16,113030
14	1,618695	10,920520	17,676986
15	1,675349	11,517411	19,295681
16	1,733986	12,094117	20,971030
17	1,794676	12,651321	22,705016
18	1,857489	13,189682	24,499691
19	1,922501	13,709837	26,357180
20	1,989789	14,212403	28,279682
21	2,059431	14,697974	30,269471
22	2,131512	15,167125	32,328902
23	2,206114	15,620410	34,460414
24	2,283328	16,058368	36,666528
25	2,363245	16,481515	38,949857
26	2,445959	16,890352	41,313102
27	2,531567	17,285365	43,759060
28	2,620172	17,667019	46,290627
29	2,711878	18,035767	48,910799
30	2,806794	18,392045	51,622677
31	2,905031	18,736276	54,429471
32	3,006708	19,068865	57,334502
33	3,111942	19,390208	60,341210
34	3,220860	19,700684	63,453152
35	3,333590	20,000661	66,674013
36	3,450266	20,290494	70,007603
37	3,571025	20,570525	73,457869
38	3,696011	20,841087	77,028895
39	3,825372	21,102500	80,724906
40	3,959260	21,355072	84,550278

i = 4,0%

n	$(1+i)^n$	$a_{[i\%;n]}$	$S_{[i\%;n]}$
1	1,040000	0,961538	1,000000
2	1,081600	1,886095	2,040000
3	1,124864	2,775091	3,121600
4	1,169859	3,629895	4,246464
5	1,216653	4,451822	5,416323
6	1,265319	5,242137	6,632975
7	1,315932	6,002055	7,898294
8	1,368569	6,732745	9,214226
9	1,423312	7,435332	10,582795
10	1,480244	8,110896	12,006107
11	1,539454	8,760477	13,486351
12	1,601032	9,385074	15,025805
13	1,665074	9,985648	16,626838
14	1,731676	10,563123	18,291911
15	1,800944	11,118387	20,023588
16	1,872981	11,652296	21,824531
17	1,947900	12,165669	23,697512
18	2,025817	12,659297	25,645413
19	2,106849	13,133939	27,671229
20	2,191123	13,590326	29,778079
21	2,278768	14,029160	31,969202
22	2,369919	14,451115	34,247970
23	2,464716	14,856842	36,617889
24	2,563304	15,246963	39,082604
25	2,665836	15,622080	41,645908
26	2,772470	15,982769	44,311745
27	2,883369	16,329586	47,084214
28	2,998703	16,663063	49,967583
29	3,118651	16,983715	52,966286
30	3,243398	17,292033	56,084938
31	3,373133	17,588494	59,328335
32	3,508059	17,873551	62,701469
33	3,648381	18,147646	66,209527
34	3,794316	18,411198	69,857909
35	3,946089	18,664613	73,652225
36	4,103933	18,908282	77,598314
37	4,268090	19,142579	81,702246
38	4,438813	19,367864	85,970336
39	4,616366	19,584485	90,409150
40	4,801021	19,792774	95,025516

i = 4,5%

n	$(1+i)^n$	$a_{[i\%;n]}$	$S_{[i\%;n]}$
1	1,045000	0,956938	1,000000
2	1,092025	1,872668	2,045000
3	1,141166	2,748964	3,137025
4	1,192519	3,587526	4,278191
5	1,246182	4,389977	5,470710
6	1,302260	5,157872	6,716892
7	1,360862	5,892701	8,019152
8	1,422101	6,595886	9,380014
9	1,486095	7,268790	10,802114
10	1,552969	7,912718	12,288209
11	1,622853	8,528917	13,841179
12	1,695881	9,118581	15,464032
13	1,772196	9,682852	17,159913
14	1,851945	10,222825	18,932109
15	1,935282	10,739546	20,784054
16	2,022370	11,234015	22,719337
17	2,113377	11,707191	24,741707
18	2,208479	12,159992	26,855084
19	2,307860	12,593294	29,063562
20	2,411714	13,007936	31,371423
21	2,520241	13,404724	33,783137
22	2,633652	13,784425	36,303378
23	2,752166	14,147775	38,937030
24	2,876014	14,495478	41,689196
25	3,005434	14,828209	44,565210
26	3,140679	15,146611	47,570645
27	3,282010	15,451303	50,711324
28	3,429700	15,742874	53,993333
29	3,584036	16,021889	57,423033
30	3,745318	16,288889	61,007070
31	3,913857	16,544391	64,752388
32	4,089981	16,788891	68,666245
33	4,274030	17,022862	72,756226
34	4,466362	17,246758	77,030256
35	4,667348	17,461012	81,496618
36	4,877378	17,666041	86,163966
37	5,096860	17,862240	91,041344
38	5,326219	18,049990	96,138205
39	5,565899	18,229656	101,464424
40	5,816365	18,401584	107,030323

i = 5,0%

n	$(1+i)^n$	$a_{[i\%;n]}$	$S_{[i\%;n]}$
1	1,050000	0,952381	1,000000
2	1,102500	1,859410	2,050000
3	1,157625	2,723248	3,152500
4	1,215506	3,545951	4,310125
5	1,276282	4,329477	5,525631
6	1,340096	5,075692	6,801913
7	1,407100	5,786373	8,142008
8	1,477455	6,463213	9,549109
9	1,551328	7,107822	11,026564
10	1,628895	7,721735	12,577893
11	1,710339	8,306414	14,206787
12	1,795856	8,863252	15,917127
13	1,885649	9,393573	17,712983
14	1,979932	9,898641	19,598632
15	2,078928	10,379658	21,578564
16	2,182875	10,837770	23,657492
17	2,292018	11,274066	25,840366
18	2,406619	11,689587	28,132385
19	2,526950	12,085321	30,539004
20	2,653298	12,462210	33,065954
21	2,785963	12,821153	35,719252
22	2,925261	13,163003	38,505214
23	3,071524	13,488574	41,430475
24	3,225100	13,798642	44,501999
25	3,386355	14,093945	47,727099
26	3,555673	14,375185	51,113454
27	3,733456	14,643034	54,669126
28	3,920129	14,898127	58,402583
29	4,116136	15,141074	62,322712
30	4,321942	15,372451	66,438848
31	4,538039	15,592811	70,760790
32	4,764941	15,802677	75,298829
33	5,003189	16,002549	80,063771
34	5,253348	16,192904	85,066959
35	5,516015	16,374194	90,320307
36	5,791816	16,546852	95,836323
37	6,081407	16,711287	101,628139
38	6,385477	16,867893	107,709546
39	6,704751	17,017041	114,095023
40	7,039989	17,159086	120,799774

	i = 5,5%		
n	$(1+i)^n$	$a_{[i\%;n]}$	$S_{[i\%;n]}$
1	1,055000	0,947867	1,000000
2	1,113025	1,846320	2,055000
3	1,174241	2,697933	3,168025
4	1,238825	3,505150	4,342266
5	1,306960	4,270284	5,581091
6	1,378843	4,995530	6,888051
7	1,454679	5,682967	8,266894
8	1,534687	6,334566	9,721573
9	1,619094	6,952195	11,256260
10	1,708144	7,537626	12,875354
11	1,802092	8,092536	14,583498
12	1,901207	8,618518	16,385591
13	2,005774	9,117079	18,286798
14	2,116091	9,589648	20,292572
15	2,232476	10,037581	22,408663
16	2,355263	10,462162	24,641140
17	2,484802	10,864609	26,996403
18	2,621466	11,246074	29,481205
19	2,765647	11,607654	32,102671
20	2,917757	11,950382	34,868318
21	3,078234	12,275244	37,786076
22	3,247537	12,583170	40,864310
23	3,426152	12,875042	44,111847
24	3,614590	13,151699	47,537998
25	3,813392	13,413933	51,152588
26	4,023129	13,662495	54,965981
27	4,244401	13,898100	58,989109
28	4,477843	14,121422	63,233510
29	4,724124	14,333101	67,711354
30	4,983951	14,533745	72,435478
31	5,258069	14,723929	77,419429
32	5,547262	14,904198	82,677498
33	5,852362	15,075069	88,224760
34	6,174242	15,237033	94,077122
35	6,513825	15,390552	100,251364
36	6,872085	15,536068	106,765189
37	7,250050	15,673999	113,637274
38	7,648803	15,804738	120,887324
39	8,069487	15,928662	128,536127
40	8,513309	16,046125	136,605614

	i = 6,0%		
n	$(1+i)^n$	$a_{[i\%;n]}$	$S_{[i\%;n]}$
1	1,060000	0,943396	1,000000
2	1,123600	1,833393	2,060000
3	1,191016	2,673012	3,183600
4	1,262477	3,465106	4,374616
5	1,338226	4,212364	5,637093
6	1,418519	4,917324	6,975319
7	1,503630	5,582381	8,393838
8	1,593848	6,209794	9,897468
9	1,689479	6,801692	11,491316
10	1,790848	7,360087	13,180795
11	1,898299	7,886875	14,971643
12	2,012196	8,383844	16,869941
13	2,132928	8,852683	18,882138
14	2,260904	9,294984	21,015066
15	2,396558	9,712249	23,275970
16	2,540352	10,105895	25,672528
17	2,692773	10,477260	28,212880
18	2,854339	10,827603	30,905653
19	3,025600	11,158116	33,759992
20	3,207135	11,469921	36,785591
21	3,399564	11,764077	39,992727
22	3,603537	12,041582	43,392290
23	3,819750	12,303379	46,995828
24	4,048935	12,550358	50,815577
25	4,291871	12,783356	54,864512
26	4,549383	13,003166	59,156383
27	4,822346	13,210534	63,705766
28	5,111687	13,406164	68,528112
29	5,418388	13,590721	73,639798
30	5,743491	13,764831	79,058186
31	6,088101	13,929086	84,801677
32	6,453387	14,084043	90,889778
33	6,840590	14,230230	97,343165
34	7,251025	14,368141	104,183755
35	7,686087	14,498246	111,434780
36	8,147252	14,620987	119,120867
37	8,636087	14,736780	127,268119
38	9,154252	14,846019	135,904206
39	9,703507	14,949075	145,058458
40	10,285718	15,046297	154,761966

i = 6,5%

n	$(1+i)^n$	$a_{[i\%;n]}$	$S_{[i\%;n]}$
1	1,065000	0,938967	1,000000
2	1,134225	1,820626	2,065000
3	1,207950	2,648476	3,199225
4	1,286466	3,425799	4,407175
5	1,370087	4,155679	5,693641
6	1,459142	4,841014	7,063728
7	1,553987	5,484520	8,522870
8	1,654996	6,088751	10,076856
9	1,762570	6,656104	11,731852
10	1,877137	7,188830	13,494423
11	1,999151	7,689042	15,371560
12	2,129096	8,158725	17,370711
13	2,267487	8,599742	19,499808
14	2,414874	9,013842	21,767295
15	2,571841	9,402669	24,182169
16	2,739011	9,767764	26,754010
17	2,917046	10,110577	29,493021
18	3,106654	10,432466	32,410067
19	3,308587	10,734710	35,516722
20	3,523645	11,018507	38,825309
21	3,752682	11,284983	42,348954
22	3,996606	11,535196	46,101636
23	4,256386	11,770137	50,098242
24	4,533051	11,990739	54,354628
25	4,827699	12,197877	58,887679
26	5,141500	12,392373	63,715378
27	5,475697	12,574998	68,856877
28	5,831617	12,746477	74,332574
29	6,210672	12,907490	80,164192
30	6,614366	13,058676	86,374864
31	7,044300	13,200635	92,989230
32	7,502179	13,333929	100,033530
33	7,989821	13,459088	107,535710
34	8,509159	13,576609	115,525531
35	9,062255	13,686957	124,034690
36	9,651301	13,790570	133,096945
37	10,278636	13,887859	142,748247
38	10,946747	13,979210	153,026883
39	11,658286	14,064986	163,973630
40	12,416075	14,145527	175,631916

i = 7,0%

n	$(1+i)^n$	$a_{[i\%;n]}$	$S_{[i\%;n]}$
1	1,070000	0,934579	1,000000
2	1,144900	1,808018	2,070000
3	1,225043	2,624316	3,214900
4	1,310796	3,387211	4,439943
5	1,402552	4,100197	5,750739
6	1,500730	4,766540	7,153291
7	1,605781	5,389289	8,654021
8	1,718186	5,971299	10,259803
9	1,838459	6,515232	11,977989
10	1,967151	7,023582	13,816448
11	2,104852	7,498674	15,783599
12	2,252192	7,942686	17,888451
13	2,409845	8,357651	20,140643
14	2,578534	8,745468	22,550488
15	2,759032	9,107914	25,129022
16	2,952164	9,446649	27,888054
17	3,158815	9,763223	30,840217
18	3,379932	10,059087	33,999033
19	3,616528	10,335595	37,378965
20	3,869684	10,594014	40,995492
21	4,140562	10,835527	44,865177
22	4,430402	11,061240	49,005739
23	4,740530	11,272187	53,436141
24	5,072367	11,469334	58,176671
25	5,427433	11,653583	63,249038
26	5,807353	11,825779	68,676470
27	6,213868	11,986709	74,483823
28	6,648838	12,137111	80,697691
29	7,114257	12,277674	87,346529
30	7,612255	12,409041	94,460786
31	8,145113	12,531814	102,073041
32	8,715271	12,646555	110,218154
33	9,325340	12,753790	118,933425
34	9,978114	12,854009	128,258765
35	10,676581	12,947672	138,236878
36	11,423942	13,035208	148,913460
37	12,223618	13,117017	160,337402
38	13,079271	13,193473	172,561020
39	13,994820	13,264928	185,640292
40	14,974458	13,331709	199,635112

	i = 7,5%		
n	$(1+i)^n$	$a_{[i\%;n]}$	$S_{[i\%;n]}$
1	1,075000	0,930233	1,000000
2	1,155625	1,795565	2,075000
3	1,242297	2,600526	3,230625
4	1,335469	3,349326	4,472922
5	1,435629	4,045885	5,808391
6	1,543302	4,693846	7,244020
7	1,659049	5,296601	8,787322
8	1,783478	5,857304	10,446371
9	1,917239	6,378887	12,229849
10	2,061032	6,864081	14,147087
11	2,215609	7,315424	16,208119
12	2,381780	7,735278	18,423728
13	2,560413	8,125840	20,805508
14	2,752444	8,489154	23,365921
15	2,958877	8,827120	26,118365
16	3,180793	9,141507	29,077242
17	3,419353	9,433960	32,258035
18	3,675804	9,706009	35,677388
19	3,951489	9,959078	39,353192
20	4,247851	10,194491	43,304681
21	4,566440	10,413480	47,552532
22	4,908923	10,617191	52,118972
23	5,277092	10,806689	57,027895
24	5,672874	10,982967	62,304987
25	6,098340	11,146946	67,977862
26	6,555715	11,299485	74,076201
27	7,047394	11,441381	80,631916
28	7,575948	11,573378	87,679310
29	8,144144	11,696165	95,255258
30	8,754955	11,810386	103,399403
31	9,411577	11,916638	112,154358
32	10,117445	12,015478	121,565935
33	10,876253	12,107421	131,683380
34	11,691972	12,192950	142,559633
35	12,568870	12,272511	154,251606
36	13,511536	12,346522	166,820476
37	14,524901	12,415370	180,332012
38	15,614268	12,479414	194,856913
39	16,785339	12,538989	210,471181
40	18,044239	12,594409	227,256520

	i = 8,0%		
n	$(1+i)^n$	$a_{[i\%;n]}$	$S_{[i\%;n]}$
1	1,080000	0,925926	1,000000
2	1,166400	1,783265	2,080000
3	1,259712	2,577097	3,246400
4	1,360489	3,312127	4,506112
5	1,469328	3,992710	5,866601
6	1,586874	4,622880	7,335929
7	1,713824	5,206370	8,922803
8	1,850930	5,746639	10,636628
9	1,999005	6,246888	12,487558
10	2,158925	6,710081	14,486562
11	2,331639	7,138964	16,645487
12	2,518170	7,536078	18,977126
13	2,719624	7,903776	21,495297
14	2,937194	8,244237	24,214920
15	3,172169	8,559479	27,152114
16	3,425943	8,851369	30,324283
17	3,700018	9,121638	33,750226
18	3,996019	9,371887	37,450244
19	4,315701	9,603599	41,446263
20	4,660957	9,818147	45,761964
21	5,033834	10,016803	50,422921
22	5,436540	10,200744	55,456755
23	5,871464	10,371059	60,893296
24	6,341181	10,528758	66,764759
25	6,848475	10,674776	73,105940
26	7,396353	10,809978	79,954415
27	7,988061	10,935165	87,350768
28	8,627106	11,051078	95,338830
29	9,317275	11,158406	103,965936
30	10,062657	11,257783	113,283211
31	10,867669	11,349799	123,345868
32	11,737083	11,434999	134,213537
33	12,676050	11,513888	145,950620
34	13,690134	11,586934	158,626670
35	14,785344	11,654568	172,316804
36	15,968172	11,717193	187,102148
37	17,245626	11,775179	203,070320
38	18,625276	11,828869	220,315945
39	20,115298	11,878582	238,941221
40	21,724521	11,924613	259,056519

	i = 8,5%					i = 9,0%		
n	$(1+i)^n$	$a_{[i\%;n]}$	$S_{[i\%;n]}$		n	$(1+i)^n$	$a_{[i\%;n]}$	$S_{[i\%;n]}$
1	1,085000	0,921659	1,000000		1	1,090000	0,917431	1,000000
2	1,177225	1,771114	2,085000		2	1,188100	1,759111	2,090000
3	1,277289	2,554022	3,262225		3	1,295029	2,531295	3,278100
4	1,385859	3,275597	4,539514		4	1,411582	3,239720	4,573129
5	1,503657	3,940642	5,925373		5	1,538624	3,889651	5,984711
6	1,631468	4,553587	7,429030		6	1,677100	4,485919	7,523335
7	1,770142	5,118514	9,060497		7	1,828039	5,032953	9,200435
8	1,920604	5,639183	10,830639		8	1,992563	5,534819	11,028474
9	2,083856	6,119063	12,751244		9	2,171893	5,995247	13,021036
10	2,260983	6,561348	14,835099		10	2,367364	6,417658	15,192930
11	2,453167	6,968984	17,096083		11	2,580426	6,805191	17,560293
12	2,661686	7,344686	19,549250		12	2,812665	7,160725	20,140720
13	2,887930	7,690955	22,210936		13	3,065805	7,486904	22,953385
14	3,133404	8,010097	25,098866		14	3,341727	7,786150	26,019189
15	3,399743	8,304237	28,232269		15	3,642482	8,060688	29,360916
16	3,688721	8,575333	31,632012		16	3,970306	8,312558	33,003399
17	4,002262	8,825192	35,320733		17	4,327633	8,543631	36,973705
18	4,342455	9,055476	39,322995		18	4,717120	8,755625	41,301338
19	4,711563	9,267720	43,665450		19	5,141661	8,950115	46,018458
20	5,112046	9,463337	48,377013		20	5,604411	9,128546	51,160120
21	5,546570	9,643628	53,489059		21	6,108808	9,292244	56,764530
22	6,018028	9,809796	59,035629		22	6,658600	9,442425	62,873338
23	6,529561	9,962945	65,053658		23	7,257874	9,580207	69,531939
24	7,084574	10,104097	71,583219		24	7,911083	9,706612	76,789813
25	7,686762	10,234191	78,667792		25	8,623081	9,822580	84,700896
26	8,340137	10,354093	86,354555		26	9,399158	9,928972	93,323977
27	9,049049	10,464602	94,694692		27	10,245082	10,026580	102,723135
28	9,818218	10,566453	103,743741		28	11,167140	10,116128	112,968217
29	10,652766	10,660326	113,561959		29	12,172182	10,198283	124,135356
30	11,558252	10,746844	124,214725		30	13,267678	10,273654	136,307539
31	12,540703	10,826584	135,772977		31	14,461770	10,342802	149,575217
32	13,606663	10,900078	148,313680		32	15,763329	10,406240	164,036987
33	14,763229	10,967813	161,920343		33	17,182028	10,464441	179,800315
34	16,018104	11,030243	176,683572		34	18,728411	10,517835	196,982344
35	17,379642	11,087781	192,701675		35	20,413968	10,566821	215,710755
36	18,856912	11,140812	210,081318		36	22,251225	10,611763	236,124723
37	20,459750	11,189689	228,938230		37	24,253835	10,652993	258,375948
38	22,198828	11,234736	249,397979		38	26,436680	10,690820	282,629783
39	24,085729	11,276255	271,596808		39	28,815982	10,725523	309,066463
40	26,133016	11,314520	295,682536		40	31,409420	10,757360	337,882445

	i = 9,5%		
n	$(1+i)^n$	$a_{[i\%;n]}$	$S_{[i\%;n]}$
1	1,095000	0,913242	1,000000
2	1,199025	1,747253	2,095000
3	1,312932	2,508907	3,294025
4	1,437661	3,204481	4,606957
5	1,574239	3,839709	6,044618
6	1,723791	4,419825	7,618857
7	1,887552	4,949612	9,342648
8	2,066869	5,433436	11,230200
9	2,263222	5,875284	13,297069
10	2,478228	6,278798	15,560291
11	2,713659	6,647304	18,038518
12	2,971457	6,983839	20,752178
13	3,253745	7,291178	23,723634
14	3,562851	7,571852	26,977380
15	3,901322	7,828175	30,540231
16	4,271948	8,062260	34,441553
17	4,677783	8,276037	38,713500
18	5,122172	8,471266	43,391283
19	5,608778	8,649558	48,513454
20	6,141612	8,812382	54,122233
21	6,725065	8,961080	60,263845
22	7,363946	9,096876	66,988910
23	8,063521	9,220892	74,352856
24	8,829556	9,334148	82,416378
25	9,668364	9,437578	91,245934
26	10,586858	9,532034	100,914297
27	11,592610	9,618296	111,501156
28	12,693908	9,697074	123,093766
29	13,899829	9,769018	135,787673
30	15,220313	9,834719	149,687502
31	16,666242	9,894721	164,907815
32	18,249535	9,949517	181,574057
33	19,983241	9,999559	199,823593
34	21,881649	10,045259	219,806834
35	23,960406	10,086995	241,688483
36	26,236644	10,125109	265,648889
37	28,729126	10,159917	291,885534
38	31,458393	10,191705	320,614659
39	34,446940	10,220735	352,073052
40	37,719399	10,247247	386,519992

	i = 10,0%		
n	$(1+i)^n$	$a_{[i\%;n]}$	$S_{[i\%;n]}$
1	1,100000	0,909091	1,000000
2	1,210000	1,735537	2,100000
3	1,331000	2,486852	3,310000
4	1,464100	3,169865	4,641000
5	1,610510	3,790787	6,105100
6	1,771561	4,355261	7,715610
7	1,948717	4,868419	9,487171
8	2,143589	5,334926	11,435888
9	2,357948	5,759024	13,579477
10	2,593742	6,144567	15,937425
11	2,853117	6,495061	18,531167
12	3,138428	6,813692	21,384284
13	3,452271	7,103356	24,522712
14	3,797498	7,366687	27,974983
15	4,177248	7,606080	31,772482
16	4,594973	7,823709	35,949730
17	5,054470	8,021553	40,544703
18	5,559917	8,201412	45,599173
19	6,115909	8,364920	51,159090
20	6,727500	8,513564	57,274999
21	7,400250	8,648694	64,002499
22	8,140275	8,771540	71,402749
23	8,954302	8,883218	79,543024
24	9,849733	8,984744	88,497327
25	10,834706	9,077040	98,347059
26	11,918177	9,160945	109,181765
27	13,109994	9,237223	121,099942
28	14,420994	9,306567	134,209936
29	15,863093	9,369606	148,630930
30	17,449402	9,426914	164,494023
31	19,194342	9,479013	181,943425
32	21,113777	9,526376	201,137767
33	23,225154	9,569432	222,251544
34	25,547670	9,608575	245,476699
35	28,102437	9,644159	271,024368
36	30,912681	9,676508	299,126805
37	34,003949	9,705917	330,039486
38	37,404343	9,732651	364,043434
39	41,144778	9,756956	401,447778
40	45,259256	9,779051	442,592556

i = 11%

n	$(1+i)^n$	$a_{[i\%;n]}$	$S_{[i\%;n]}$
1	1,110000	0,900901	1,000000
2	1,232100	1,712523	2,110000
3	1,367631	2,443715	3,342100
4	1,518070	3,102446	4,709731
5	1,685058	3,695897	6,227801
6	1,870415	4,230538	7,912860
7	2,076160	4,712196	9,783274
8	2,304538	5,146123	11,859434
9	2,558037	5,537048	14,163972
10	2,839421	5,889232	16,722009
11	3,151757	6,206515	19,561430
12	3,498451	6,492356	22,713187
13	3,883280	6,749870	26,211638
14	4,310441	6,981865	30,094918
15	4,784589	7,190870	34,405359
16	5,310894	7,379162	39,189948
17	5,895093	7,548794	44,500843
18	6,543553	7,701617	50,395936
19	7,263344	7,839294	56,939488
20	8,062312	7,963328	64,202832
21	8,949166	8,075070	72,265144
22	9,933574	8,175739	81,214309
23	11,026267	8,266432	91,147884
24	12,239157	8,348137	102,174151
25	13,585464	8,421745	114,413307
26	15,079865	8,488058	127,998771
27	16,738650	8,547800	143,078636
28	18,579901	8,601622	159,817286
29	20,623691	8,650110	178,397187
30	22,892297	8,693793	199,020878
31	25,410449	8,733146	221,913174
32	28,205599	8,768600	247,323624
33	31,308214	8,800541	275,529222
34	34,752118	8,829316	306,837437
35	38,574851	8,855240	341,589555
36	42,818085	8,878594	380,164406
37	47,528074	8,899635	422,982490
38	52,756162	8,918590	470,510564
39	58,559340	8,935666	523,266726
40	65,000867	8,951051	581,826066

i = 12%

n	$(1+i)^n$	$a_{[i\%;n]}$	$S_{[i\%;n]}$
1	1,120000	0,892857	1,000000
2	1,254400	1,690051	2,120000
3	1,404928	2,401831	3,374400
4	1,573519	3,037349	4,779328
5	1,762342	3,604776	6,352847
6	1,973823	4,111407	8,115189
7	2,210681	4,563757	10,089012
8	2,475963	4,967640	12,299693
9	2,773079	5,328250	14,775656
10	3,105848	5,650223	17,548735
11	3,478550	5,937699	20,654583
12	3,895976	6,194374	24,133133
13	4,363493	6,423548	28,029109
14	4,887112	6,628168	32,392602
15	5,473566	6,810864	37,279715
16	6,130394	6,973986	42,753280
17	6,866041	7,119630	48,883674
18	7,689966	7,249670	55,749715
19	8,612762	7,365777	63,439681
20	9,646293	7,469444	72,052442
21	10,803848	7,562003	81,698736
22	12,100310	7,644646	92,502584
23	13,552347	7,718434	104,602894
24	15,178629	7,784316	118,155241
25	17,000064	7,843139	133,333870
26	19,040072	7,895660	150,333934
27	21,324881	7,942554	169,374007
28	23,883866	7,984423	190,698887
29	26,749930	8,021806	214,582754
30	29,959922	8,055184	241,332684
31	33,555113	8,084986	271,292606
32	37,581726	8,111594	304,847719
33	42,091533	8,135352	342,429446
34	47,142517	8,156564	384,520979
35	52,799620	8,175504	431,663496
36	59,135574	8,192414	484,463116
37	66,231843	8,207513	543,598690
38	74,179664	8,220993	609,830533
39	83,081224	8,233030	684,010197
40	93,050970	8,243777	767,091420

	i = 13%				i = 14%		
n	$(1+i)^n$	$a_{[i\%;n]}$	$S_{[i\%;n]}$	n	$(1+i)^n$	$a_{[i\%;n]}$	$S_{[i\%;n]}$
1	1,130000	0,884956	1,000000	1	1,140000	0,877193	1,000000
2	1,276900	1,668102	2,130000	2	1,299600	1,646661	2,140000
3	1,442897	2,361153	3,406900	3	1,481544	2,321632	3,439600
4	1,630474	2,974471	4,849797	4	1,688960	2,913712	4,921144
5	1,842435	3,517231	6,480271	5	1,925415	3,433081	6,610104
6	2,081952	3,997550	8,322706	6	2,194973	3,888668	8,535519
7	2,352605	4,422610	10,404658	7	2,502269	4,288305	10,730491
8	2,658444	4,798770	12,757263	8	2,852586	4,638864	13,232760
9	3,004042	5,131655	15,415707	9	3,251949	4,946372	16,085347
10	3,394567	5,426243	18,419749	10	3,707221	5,216116	19,337295
11	3,835861	5,686941	21,814317	11	4,226232	5,452733	23,044516
12	4,334523	5,917647	25,650178	12	4,817905	5,660292	27,270749
13	4,898011	6,121812	29,984701	13	5,492411	5,842362	32,088654
14	5,534753	6,302488	34,882712	14	6,261349	6,002072	37,581065
15	6,254270	6,462379	40,417464	15	7,137938	6,142168	43,842414
16	7,067326	6,603875	46,671735	16	8,137249	6,265060	50,980352
17	7,986078	6,729093	53,739060	17	9,276464	6,372859	59,117601
18	9,024268	6,839905	61,725138	18	10,575169	6,467420	68,394066
19	10,197423	6,937969	70,749406	19	12,055693	6,550369	78,969235
20	11,523088	7,024752	80,946829	20	13,743490	6,623131	91,024928
21	13,021089	7,101550	92,469917	21	15,667578	6,686957	104,768418
22	14,713831	7,169513	105,491006	22	17,861039	6,742944	120,435996
23	16,626629	7,229658	120,204837	23	20,361585	6,792056	138,297035
24	18,788091	7,282883	136,831465	24	23,212207	6,835137	158,658620
25	21,230542	7,329985	155,619556	25	26,461916	6,872927	181,870827
26	23,990513	7,371668	176,850098	26	30,166584	6,906077	208,332743
27	27,109279	7,408556	200,840611	27	34,389906	6,935155	238,499327
28	30,633486	7,441200	227,949890	28	39,204493	6,960662	272,889233
29	34,615839	7,470088	258,583376	29	44,693122	6,983037	312,093725
30	39,115898	7,495653	293,199215	30	50,950159	7,002664	356,786847
31	44,200965	7,518277	332,315113	31	58,083181	7,019881	407,737006
32	49,947090	7,538299	376,516078	32	66,214826	7,034983	465,820186
33	56,440212	7,556016	426,463168	33	75,484902	7,048231	532,035012
34	63,777439	7,571696	482,903380	34	86,052788	7,059852	607,519914
35	72,068506	7,585572	546,680819	35	98,100178	7,070045	693,572702
36	81,437412	7,597851	618,749325	36	111,834203	7,078987	791,672881
37	92,024276	7,608718	700,186738	37	127,490992	7,086831	903,507084
38	103,987432	7,618334	792,211014	38	145,339731	7,093711	1030,998076
39	117,505798	7,626844	896,198445	39	165,687293	7,099747	1176,337806
40	132,781552	7,634376	1013,704243	40	188,883514	7,105041	1342,025099

i = 15%

n	$(1+i)^n$	$a_{[i\%;n]}$	$S_{[i\%;n]}$
1	1,150000	0,869565	1,000000
2	1,322500	1,625709	2,150000
3	1,520875	2,283225	3,472500
4	1,749006	2,854978	4,993375
5	2,011357	3,352155	6,742381
6	2,313061	3,784483	8,753738
7	2,660020	4,160420	11,066799
8	3,059023	4,487322	13,726819
9	3,517876	4,771584	16,785842
10	4,045558	5,018769	20,303718
11	4,652391	5,233712	24,349276
12	5,350250	5,420619	29,001667
13	6,152788	5,583147	34,351917
14	7,075706	5,724476	40,504705
15	8,137062	5,847370	47,580411
16	9,357621	5,954235	55,717472
17	10,761264	6,047161	65,075093
18	12,375454	6,127966	75,836357
19	14,231772	6,198231	88,211811
20	16,366537	6,259331	102,443583
21	18,821518	6,312462	118,810120
22	21,644746	6,358663	137,631638
23	24,891458	6,398837	159,276384
24	28,625176	6,433771	184,167841
25	32,918953	6,464149	212,793017
26	37,856796	6,490564	245,711970
27	43,535315	6,513534	283,568766
28	50,065612	6,533508	327,104080
29	57,575454	6,550877	377,169693
30	66,211772	6,565980	434,745146
31	76,143538	6,579113	500,956918
32	87,565068	6,590533	577,100456
33	100,699829	6,600463	664,665524
34	115,804803	6,609099	765,365353
35	133,175523	6,616607	881,170156
36	153,151852	6,623137	1014,345680
37	176,124630	6,628815	1167,497532
38	202,543324	6,633752	1343,622161
39	232,924823	6,638045	1546,165485
40	267,863546	6,641778	1779,090308

i = 16%

n	$(1+i)^n$	$a_{[i\%;n]}$	$S_{[i\%;n]}$
1	1,160000	0,862069	1,000000
2	1,345600	1,605232	2,160000
3	1,560896	2,245890	3,505600
4	1,810639	2,798181	5,066496
5	2,100342	3,274294	6,877135
6	2,436396	3,684736	8,977477
7	2,826220	4,038565	11,413873
8	3,278415	4,343591	14,240093
9	3,802961	4,606544	17,518508
10	4,411435	4,833227	21,321469
11	5,117265	5,028644	25,732904
12	5,936027	5,197107	30,850169
13	6,885791	5,342334	36,786196
14	7,987518	5,467529	43,671987
15	9,265521	5,575456	51,659505
16	10,748004	5,668497	60,925026
17	12,467685	5,748704	71,673030
18	14,462514	5,817848	84,140715
19	16,776517	5,877455	98,603230
20	19,460759	5,928841	115,379747
21	22,574481	5,973139	134,840506
22	26,186398	6,011326	157,414987
23	30,376222	6,044247	183,601385
24	35,236417	6,072627	213,977607
25	40,874244	6,097092	249,214024
26	47,414123	6,118183	290,088267
27	55,000382	6,136364	337,502390
28	63,800444	6,152038	392,502773
29	74,008515	6,165550	456,303216
30	85,849877	6,177198	530,311731
31	99,585857	6,187240	616,161608
32	115,519594	6,195897	715,747465
33	134,002729	6,203359	831,267059
34	155,443166	6,209792	965,269789
35	180,314073	6,215338	1120,712955
36	209,164324	6,220119	1301,027028
37	242,630616	6,224241	1510,191352
38	281,451515	6,227794	1752,821968
39	326,483757	6,230857	2034,273483
40	378,721158	6,233497	2360,757241

i = 17%

n	$(1+i)^n$	$a_{[i\%;n]}$	$S_{[i\%;n]}$
1	1,170000	0,854701	1,000000
2	1,368900	1,585214	2,170000
3	1,601613	2,209585	3,538900
4	1,873887	2,743235	5,140513
5	2,192448	3,199346	7,014400
6	2,565164	3,589185	9,206848
7	3,001242	3,922380	11,772012
8	3,511453	4,207163	14,773255
9	4,108400	4,450566	18,284708
10	4,806828	4,658604	22,393108
11	5,623989	4,836413	27,199937
12	6,580067	4,988387	32,823926
13	7,698679	5,118280	39,403993
14	9,007454	5,229299	47,102672
15	10,538721	5,324187	56,110126
16	12,330304	5,405288	66,648848
17	14,426456	5,474605	78,979152
18	16,878953	5,533851	93,405608
19	19,748375	5,584488	110,284561
20	23,105599	5,627767	130,032936
21	27,033551	5,664758	153,138535
22	31,629255	5,696375	180,172086
23	37,006228	5,723397	211,801341
24	43,297287	5,746493	248,807569
25	50,657826	5,766234	292,104856
26	59,269656	5,783106	342,762681
27	69,345497	5,797526	402,032337
28	81,134232	5,809851	471,377835
29	94,927051	5,820386	552,512066
30	111,064650	5,829390	647,439118
31	129,945641	5,837085	758,503768
32	152,036399	5,843663	888,449408
33	177,882587	5,849284	1040,485808
34	208,122627	5,854089	1218,368395
35	243,503474	5,858196	1426,491022
36	284,899064	5,861706	1669,994496
37	333,331905	5,864706	1954,893560
38	389,998329	5,867270	2288,225465
39	456,298045	5,869461	2678,223794
40	533,868713	5,871335	3134,521839

i = 18%

n	$(1+i)^n$	$a_{[i\%;n]}$	$S_{[i\%;n]}$
1	1,180000	0,847458	1,000000
2	1,392400	1,565642	2,180000
3	1,643032	2,174273	3,572400
4	1,938778	2,690062	5,215432
5	2,287758	3,127171	7,154210
6	2,699554	3,497603	9,441968
7	3,185474	3,811528	12,141522
8	3,758859	4,077566	15,326996
9	4,435454	4,303022	19,085855
10	5,233836	4,494086	23,521309
11	6,175926	4,656005	28,755144
12	7,287593	4,793225	34,931070
13	8,599359	4,909513	42,218663
14	10,147244	5,008062	50,818022
15	11,973748	5,091578	60,965266
16	14,129023	5,162354	72,939014
17	16,672247	5,222334	87,068036
18	19,673251	5,273164	103,740283
19	23,214436	5,316241	123,413534
20	27,393035	5,352746	146,627970
21	32,323781	5,383683	174,021005
22	38,142061	5,409901	206,344785
23	45,007632	5,432120	244,486847
24	53,109006	5,450949	289,494479
25	62,668627	5,466906	342,603486
26	73,948980	5,480429	405,272113
27	87,259797	5,491889	479,221093
28	102,966560	5,501601	566,480890
29	121,500541	5,509831	669,447450
30	143,370638	5,516806	790,947991
31	169,177353	5,522717	934,318630
32	199,629277	5,527726	1103,495983
33	235,562547	5,531971	1303,125260
34	277,963805	5,535569	1538,687807
35	327,997290	5,538618	1816,651612
36	387,036802	5,541201	2144,648902
37	456,703427	5,543391	2531,685705
38	538,910044	5,545247	2988,389132
39	635,913852	5,546819	3527,299175
40	750,378345	5,548152	4163,213027

i = 19%

n	$(1+i)^n$	$a_{[i\%;n]}$	$S_{[i\%;n]}$
1	1,190000	0,840336	1,000000
2	1,416100	1,546501	2,190000
3	1,685159	2,139917	3,606100
4	2,005339	2,638586	5,291259
5	2,386354	3,057635	7,296598
6	2,839761	3,409777	9,682952
7	3,379315	3,705695	12,522713
8	4,021385	3,954366	15,902028
9	4,785449	4,163332	19,923413
10	5,694684	4,338935	24,708862
11	6,776674	4,486500	30,403546
12	8,064242	4,610504	37,180220
13	9,596448	4,714709	45,244461
14	11,419773	4,802277	54,840909
15	13,589530	4,875863	66,260682
16	16,171540	4,937700	79,850211
17	19,244133	4,989664	96,021751
18	22,900518	5,033331	115,265884
19	27,251616	5,070026	138,166402
20	32,429423	5,100862	165,418018
21	38,591014	5,126775	197,847442
22	45,923307	5,148550	236,438456
23	54,648735	5,166849	282,361762
24	65,031994	5,182226	337,010497
25	77,388073	5,195148	402,042491
26	92,091807	5,206007	479,430565
27	109,589251	5,215132	571,522372
28	130,411208	5,222800	681,111623
29	155,189338	5,229243	811,522831
30	184,675312	5,234658	966,712169
31	219,763621	5,239209	1151,387481
32	261,518710	5,243033	1371,151103
33	311,207264	5,246246	1632,669812
34	370,336645	5,248946	1943,877077
35	440,700607	5,251215	2314,213721
36	524,433722	5,253122	2754,914328
37	624,076130	5,254724	3279,348051
38	742,650594	5,256071	3903,424180
39	883,754207	5,257202	4646,074775
40	1051,667507	5,258153	5529,828982

i = 20%

n	$(1+i)^n$	$a_{[i\%;n]}$	$S_{[i\%;n]}$
1	1,200000	0,833333	1,000000
2	1,440000	1,527778	2,200000
3	1,728000	2,106481	3,640000
4	2,073600	2,588735	5,368000
5	2,488320	2,990612	7,441600
6	2,985984	3,325510	9,929920
7	3,583181	3,604592	12,915904
8	4,299817	3,837160	16,499085
9	5,159780	4,030967	20,798902
10	6,191736	4,192472	25,958682
11	7,430084	4,327060	32,150419
12	8,916100	4,439217	39,580502
13	10,699321	4,532681	48,496603
14	12,839185	4,610567	59,195923
15	15,407022	4,675473	72,035108
16	18,488426	4,729561	87,442129
17	22,186111	4,774634	105,930555
18	26,623333	4,812195	128,116666
19	31,948000	4,843496	154,740000
20	38,337600	4,869580	186,688000
21	46,005120	4,891316	225,025600
22	55,206144	4,909430	271,030719
23	66,247373	4,924525	326,236863
24	79,496847	4,937104	392,484236
25	95,396217	4,947587	471,981083
26	114,475460	4,956323	567,377300
27	137,370552	4,963602	681,852760
28	164,844662	4,969668	819,223312
29	197,813595	4,974724	984,067974
30	237,376314	4,978936	1181,881569
31	284,851577	4,982447	1419,257883
32	341,821892	4,985372	1704,109459
33	410,186270	4,987810	2045,931351
34	492,223524	4,989842	2456,117621
35	590,668229	4,991535	2948,341146
36	708,801875	4,992946	3539,009375
37	850,562250	4,994122	4247,811250
38	1020,674700	4,995101	5098,373500
39	1224,809640	4,995918	6119,048200
40	1469,771568	4,996598	7343,857840

APÊNDICE B – CALCULADORA FINANCEIRA HP12C

Neste apêndice B, serão abordadas as principais funções da calculadora HP12C, ou seja, estaremos mostrando os conceitos básicos relevantes ao desenvolvimento da matemática financeira.

TECLA [ON]

Tem a função de ligar e desligar a calculadora, porém, se a calculadora permanecer ligada sem uso, será desligada automaticamente entre 7 e 8 minutos aproximadamente.

TECLA [.]

Essa tecla permite que a calculadora opere em dois padrões de moeda: o brasileiro e padrão ***dólar.*** Vamos considerar o seguinte exemplo:

R$ 1.425,56 (padrão brasileiro)

US$ 1,425.56 (padrão dólar)

Essa conversão será feita da seguinte forma:

a) mantenha a calculadora desligada;

b) pressione a tecla [.] e segure;

c) pressione a tecla [ON] e solte.

Se a calculadora estiver no padrão brasileiro, passará para o padrão do dólar e vice-versa.

TESTES DE FUNCIONAMENTO

A calculadora HP12C possui três testes de verificação quanto ao seu funcionamento, uma espécie de controle de qualidade, que permite ao usuário uma maior confiabilidade do produto.

Teste nº 1 (usando as tecla [ON] e [x]).

Procedimentos:

1. mantenha calculadora desligada;

2. pressione a tecla [ON] e segure;

3. pressione a tecla [x] e segure;

4. solte a tecla [ON];

5. solte a tecla [x].

Ao final do procedimento, aparecerá no visor a palavra “***running***” piscando, significando que a calculadora está executando o TESTE Nº 1. E, em alguns segundos, aparecerá no visor o seguinte:

```
- 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8
USER f g BEGIN GRAD D.MY C PRGM
```

Se aparecer a mensagem “ERRO 9”, significa que a calculadora precisa de reparos, mas, se o resultado for exatamente o resultado do TESTE Nº 1, a calculadora estará pronta para o uso.

Teste nº 2 (usando as tecla [ON] e [+]).

Procedimento:

1. mantenha a calculadora desligada;

2. pressione a tecla [ON] e segure;

3. pressione a tecla [+] e segure;

4. solte a tecla [ON];

5. solte a tecla [+];

6. pressione e solte qualquer tecla, exceto a tecla [ON].

Na verdade o TESTE Nº 2 é muito semelhante ao TESTE Nº 1, diverge na duração de execução, que é indeterminado, portanto, para completar o teste é necessário cumprir o procedimento nº “6”, logo após aparecerá o seguinte:

- 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8
USER f g BEGIN GRAD D.MY C PRGM

Se você pressionar a tecla [ON] o teste será interrompido.

Teste nº 3 (usando as teclas [ON] e [:])

Procedimento:

1. mantenha a calculadora desligada;
2. pressione a tecla [ON] e segure;
3. pressione a tecla [:] e segure;
4. solte a tecla [ON];
5. solte a tecla [:].
6. Pressione todas as teclas da esquerda para direita, de cima para baixo, ou seja, a 1ª tecla a ser pressionada será a tecla [n] e a última será a tecla [+]. Lembre-se, deve-se pressionar todas as teclas inclusive a tecla [ON], e a tecla [enter] será pressionada duas vezes, tanto na linha 3 como na linha 4.

Após o procedimento concluído, aparecerá no visor o nº "12", assim como nos testes anteriores, a calculadora estará pronta para o uso. Mas se procedimento não for realizado corretamente, aparecerá a expressão "ERRO 9". Nesse caso, a calculadora necessita de conserto.

TECLADO

O teclado da calculadora HP12C é multiuso, ou seja, uma mesma tecla poderá ser utilizada de três maneiras.

A Tecla [f]

A tecla [f] (amarelo) possui duas funções básicas:

1ª função: pressionado a tecla ou prefixo [f], poderemos acessar todas as funções em amarelo da calculadora;

2ª função: pressionado a tecla ou prefixo [f] seguida de um número, será apresentada a quantidade casas decimais a ser mostrada no visor.

Veja o exemplo:

Digite o número 2,428571435 e siga os procedimentos:

Procedimento (teclas)	Visor
[f] e [9]	2,428571435
[f] e [8]	2,42857144
[f] e [7]	2,4285714
[f] e [6]	2,428571
[f] e [5]	2,42857
[f] e [4]	2,4286
[f] e [3]	2,429
[f] e [2]	2,43
[f] e [1]	2,4
[f] e [0]	2,
[f] e [9]	2,428571435

Tecla [g]

Por meio da tecla ou prefixo [g], é possível acessar todas as funções em AZUL.

Teclado branco

Todas as teclas possuem em sua superfície informações em branco, na verdade tudo o que é mostrado em branco nas teclas não necessita de função auxiliar, como vimos para funções em amarelo e azul.

LIMPEZA DE REGISTRO

Apresentaremos as principais formas de executar a limpeza dos registros ou informações que são armazenadas no teclado ou memórias da calculadora.

Limpeza do visor

A utilização dessa função é muito simples, basta pressionar a tecla **[CLx]** e o visor será limpo.

Limpeza dos registros estatísticos (“ 0 ” a “ 6 ”)

Com a sequência de teclas **[f] [∑]**, estaremos processando a limpeza dos registros estatísticos, ou seja, estaremos limpando os registros armazenados nas teclas **[1], [2], [3], [4], [5] e [6].**

Limpeza dos registros financeiros

Registros Financeiros:

a) [n] prazo;

b) [i] taxa;

c) [PV] *Present Value* ou Valor Presente;

d) [PMT] *Periodic Payment* ou Prestação;

e) [FV] *Future Value* ou Valor Futuro.

A limpeza dos registros é feita por meio da sequência de teclas **[f] [FIN]**.

Limpeza de todos os registros

Com sequência de teclas **[f] [REG]**, é possível apagar todos os registros, ou seja, de “0” a “9”, “.0” a “.9” e os registros financeiros, ficando apenas os programas sem serem apagados.

TECLA [CHS] ou *CHANGE SIGNAL*

Essa tecla serve basicamente para trocar o sinal de um número, ou seja, trocar o sinal ***negativo*** para o ***positivo*** e vice-versa.

TECLA [STO] ou (*STORE*)

Essa serve para guardamos valores nas memórias. A HP possui 20 memórias diretas; “0” a “9” = 10 e “.0” a “.9” = 10.

Para introduzir um número na memória, é muito simples.

Vamos considerar que o número 145 deve ser guardado na memória, e que decidimos guardar na memória “5”. Como fazer?

Procedimento:

1. digite o número 145;
2. digite **[STO];**
3. digite **[5].**

TECLA [RCL] ou (*RECALL*)

Essa tecla serve para recuperar os números guardados nas memórias. Vamos verificar sua aplicação com base nos dados do item 1.7.

Procedimento:

1. digitar **[RCL];**
2. digitar **[5].**

TECLA [Y^X]

Essa tecla pode ser utilizada tanto para efetuarmos operações de potenciação como de radiciação.

Potenciação

a) $1,05^6$

1,05	[ENTER]
6	[y^x]

b) 2^3

2	[ENTER]
3	[y^x]

c) $1,045^{270/360}$

1,045	[ENTER]
270	[ENTER]
360	[:] [y^x]

Percebe-se o efetivo uso das propriedades da potência nos cálculos acima. Veja, a seguir, as oito propriedades das potências mais comuns:

1)	$b^m \,.\, b^n = b^{m+n}$	Produto de potências de mesma base.
2)	$b^{-m} = \dfrac{1}{b^m}$	Expoente negativo.
3)	$\dfrac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$	Quociente de potências de mesma base.
4)	$(b^m)^n = b^{m\cdot n}$	Potência de potência.
5)	$a^m \,.\, b^m = (ab)^m$	Produto de potências com expoentes iguais.
6)	$\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$	Quociente de potências com expoentes iguais.
7)	$\sqrt[i]{a^e} = a^{e/i}$	Raiz e expoente fracionário.
8)	Se $a^m = a^n$ então m = n	Equivalência de base.
9)	$-a^2 = a^2$	Expoente par.
10)	$-a^3 = -a^3$	Expoente ímpar.

Radiação

a) $\sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}}$

9	[ENTER]
1	[ENTER]

b) $\sqrt{27}^{\,3} = 27^{\frac{3}{5}}$

27	[ENTER]
3	[ENTER]

c) $\sqrt{(1 \quad 0,6)}^{\,360} = 1,6^{\frac{360}{30}}$

1,6	[ENTER]
360	[ENTER]
30	[:] [y^x]

281,474977...

Note que o cálculo de raízes é realizado com o uso das propriedades da potência, em que a raiz *y* de um número é o mesmo que esse número exponenciado a 1 dividido por *y*.

TECLA [1/x]

Essa tecla é normalmente utilizada para demonstrar o inverso de um número.

a) 1/8

8	[ENTER]
[1/x]	

0,125

b) $1,05^{\frac{1}{12}}$

1,05	[ENTER]
12	[1/x] [y^x]

1,0004074

Fatorial [f] [3]

Essa função é muito usada para cálculos de análise combinatória.

5 ! = 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120

Solução:

5 [ENTER]

[G] [n!] à 120

Parte inteira de um número [g] [%]

Utilizada para que, tendo-se um resultado no visor da calculadora, sejam desprezados os valores decimais, utilizando-se para cálculo apenas a parte inteira.

Por exemplo, utilize a parte inteira da raíz cúbica de 4.000.

Solução:

4000 [ENTER]

1 [ENTER]

3 [÷] [y^x] → 15,87

[g] [INTG] → 15.00

Parte fracionária de um número [G] [Δ%]

Utilizada para que, tendo-se um resultado no visor da calculadora, sejam desprezados os valores inteiros, utilizando-se para cálculo apenas a parte decimal.

Por exemplo, utilize os valores decimais da raíz cúbica de 4.000.

Solução:

4000 [ENTER]

1 [ENTER]

3 [÷] [y^x] → 15,87

[G] [FRAC] → 15.00

TECLA [%T] e [x><y]

A tecla [%T] é usada para calcular o percentual de um total, e a tecla [x><y] recupera o valor base de cálculo.

a) Uma pessoa possui os seguintes gastos mensais:

- Moradia R$ 450,00
- Educação R$ 500,00
- Combustível R$ 150,00

- Alimentação R$ 200,00
- Lazer R$ 250,00

Total R$ 1.550,00

Determinar quanto representa percentualmente cada valor em relação ao total dos gastos.

Solução:

	1.550	[ENTER]	
450	[%T]	29,03%	
[x><y]	500	[%T]	32,26%
[x><y]	150	[%T]	9,68%
[x><y]	200	[%T]	12,90%
[x><y]	250	[%T]	16,13%
			100,00%

TECLA [Δ%]

Essa tecla nos ajuda a calculamos a diferença percentual entre dois números.

a) Considere que um produto possui um preço de R$ 132,75 em jan./XX, em fev./XX, o preço desse produto passou para R$ 155,71. Qual foi o percentual de aumento desse produto?

Dados:

Preço jan./XX: R$ 132,75

Preço fev./XX: R$ 155,71

Solução:

132,75 [ENTER]

155,71 [Δ%]

17,30%

b) No mês de março/XX, o preço do produto passou para R$ 141,00. Qual foi o percentual de desconto?

Dados:

Preço fev./XX: R$ 155,71

Preço mar./XX: R$ 141,00

Solução

155,71 [ENTER]

141,00 [Δ%]

-9,45%

TECLA [%]

Essa tecla serve exclusivamente para o cálculo de percentagem.

a) Calcular 5% de R$ 10.450,00

Solução:

[ENTER]

5% [%]

R$ 522,50

CÁLCULO EM CADEIA

a) **Soma**

25,82 + 1.852,25 + 156,68 = 2.034,75

25,82 [ENTER] 1852,25 [+] 156,68 [+] **2.034,75[STO] 1**

b) **Subtração**

250 – 91,82 – 5,81 = 152,37

250 [ENTER] 91,82 [-] 5,81 [-] **152,37 [STO] 2**

c) **Multiplicação**

21 x 18,41 x 1,0562 = 408,34

21 [ENTER] 18,41 [x] 1,0562 [x] **408,34 [STO] 3**

d) **Divisão**

1.750,25 : 1,08 = 1.620,60

1.750,25 [ENTER] 1,08 [:] **1.620,60 [STO] 5**

e) **Adição, subtração, multiplicação e divisão**

(memória 1) – (memória 2) x (memória 3) : (memória .5)

[RCL] 1

[RCL] 2 [-]

[RCL] 3 [x]

[RCL] .5 [:]

474,30

CALENDÁRIO

- A HP12C permite saber: Que data será a n dias.
- Que data foi a n dias atrás.
- Quantos dias separam 2 datas.

- Que dia da semana foi ou será uma data.

A calculadora trabalha com datas entre 15 de outubro de 1582 e 25 de novembro de 4046. A HP sai de fábrica no formato americano de datas, ou seja, mês/dia/ano. Para que fique em nosso formato (EUROPEU), tecle [g] [4], que é D.MY (dia/mês/ano). Observe que no visor aparece D.MY., quando não há essa mensagem no visor, é porque a calculadora está no formato M.DY (mês/dia/ano).

Obs: mantenha o indicador D.MY sempre no visor.

Introduzindo Data

Para introduzir uma data na calculadora, devemos indicar o dia, seguido de ponto, o mês com dois dígitos e quatro dígitos para o ano. Exemplo:

10 de julho de 1997 → 10 . 071997

3 de novembro de 1950 → 3.111950

Cálculos com datas

Para sabermos qual data foi ou será a n dias, usamos as teclas [g] [CHS]

10.071997	enter	15	g	DATE	→	25.07.1997 5

O número 5 indica o dia da semana. Como 25/07/97 é uma Sexta-feira, o número 5 indica Sexta-feira.

Segunda = 1 Terça = 2 Quarta = 3 Quinta = 4 Sexta = 5
Sábado = 6

Domingo = 7

Para efetuar o cálculo com um número n de dias atrás, troca-se o sinal do número de dias com a tecla [CHS]

15.071997	enter	15	CHS	g	DATE	→	30.06.1997 1

Cálculo entre Datas

Para sabermos quantos dias separam duas datas, usamos as teclas [g] [EEX] Exemplos:

15.071991	enter	30.061991	g	ΔDYS	→	- 15

4.081997	enter	1.121997	g	ΔDYS	→	119

Descobrindo datas

Caso queiramos saber em que dia da semana nós nascemos, ou em que dia da semana ocorreu a Independência do Brasil, ou ainda, em que dia da semana uma aplicação vai ser resgatada, digitamos a data e calculamos zero dias com a tecla [DATE]

7.091822	enter	0	g	DATE	→	7.09.1822 6

Portanto, ocorreu em um sábado a Independência do Brasil.

Número de dias comerciais

Para calcular o número de dias entre 2 datas, usamos [Δ DYS] que fornece o número real de dias. Com a tecla [x><y], obtemos o número de dias comerciais.

1.021997	enter	1.031997	g	ΔDYS	→	28	x><y	→	30

PROGRAMA DE CONVERSÃO DE TAXAS EFETIVAS

Passo	Comando	Visor na HP
1	f CLx ($x=0$)	0,0000 RPN
2	f R/S (PSE)	000- 000 RPN PRGM
3	f R↓ (GTO)	000- 000 RPN PRGM
4	STO 0 ($\bar{x}$)	001- 44,-00 RPN PRGM
5	RCL i (12÷)	002- 45, 12 RPN PRGM
6	1 ($\hat{x},r$) % (INTG)	004- 25 RPN PRGM
7	1 ($\hat{x},r$) + (LSTx)	006- 40 RPN PRGM
8	RCL 0 ($\bar{x}$)	007- 45,-00 RPN PRGM
9	RCL n (12x)	008- 45, 11 RPN PRGM
10	÷ y^x ($\sqrt{x}$)	010- 21 RPN PRGM
11	1 ($\hat{x},r$) −	012- 30 RPN PRGM
12	1 ($\hat{x},r$) 0 ($\bar{x}$) 0 ($\bar{x}$) × (x^2)	016- 20 RPN PRGM
13	g R↓ (GTO)	016- 20 RPN PRGM

Se estiver utilizando o modelo **GOLD** da Calculadora HP12C, siga para o passo número 14. Se seu modelo for Platinum ou Prestige, vá para o passo 16.

Passos para Programação da HP12C, modelo GOLD

14 

15 

Passos para Programação da HP12C, modelos PLATINUM e PRESTIGE

16 

17 

Para utilização:

1) Introduza o valor da taxa informada na tecla

2) Introduza o número de dias do período da taxa informada na tecla.

3) Introduza o número de dias do período da taxa que se deseja calcular na tecla

Exemplo:

Encontrar a taxa anual equivalente a 5% a.m.

Solução

2
30
360

Resultado na Tela da HP12C 26,8241

Resposta: a taxa equivalente a 5% a.m. é 26,82% a.a.