



INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Universidade Técnica de Lisboa

Modelação da Hidratação do Cimento em Betões

João Vasco Mano Marques

Dissertação para a obtenção de Grau de Mestre em

Engenharia Civil

Júri

Presidente: Professor Doutor José Manuel Matos Noronha da Câmara

Orientadores: Professor Doutor João António Teixeira de Freitas

Doutor Júlio Balsa Pargana

Vogal: Professor Doutor Fernando António Baptista Branco

Setembro 2011

Resumo

O estudo do processo de hidratação do cimento em betões tem aumentado devido à crescente utilização de betões de elevado desempenho (que libertam maiores quantidades de calor) e o desejo de abreviar a duração do processo construtivo. Contudo, verifica-se que ainda há muito a fazer no sentido de controlar o processo de fendilhação durante a presa do betão, *i.e.*, assegurar uma evolução do estado de tensão compatível com o desenvolvimento das resistências mecânicas. Salienta-se que, nas primeiras idades, a evolução do estado de deformação do betão é fortemente influenciada por variações térmicas e volumétricas, quase sempre restringidas por coações internas e externas.

Criou-se um modelo termo-químico unidimensional de elementos convencionais (aproximando o campo de temperaturas) que reproduz a evolução do campo de temperaturas e do grau de hidratação do cimento. De forma deliberada, foram deixadas algumas opções ao utilizador que, usualmente, são admitidas por defeito, nomeadamente a possibilidade de escolha entre várias condições iniciais para a hidratação e a possibilidade de considerar uma taxa de libertação de calor não nula no instante inicial.

Após a apresentação do modelo, é feita uma análise de sensibilidade ao número de elementos finitos e respectivos graus de aproximação. Comparam-se os resultados obtidos com os de outros programas, onde se verifica a plausibilidade das hipóteses assumidas.

Finalmente, com o intuito de perceber a adequabilidade da formulação de elementos finitos, de algumas hipóteses admitidas e do próprio modelo unidimensional, fazem-se comparações com dois casos reais: uma laje estrutural de um pavilhão industrial e a fundação de uma torre eólica. A primeira situação encontra-se, à partida, dentro do domínio de aplicação do modelo criado, mas não a segunda. Porém, sendo as torres eólicas de grandes dimensões estruturas bastante comuns e cujas fundações são betonadas de uma só vez, considera-se de todo o interesse saber se é possível aproximar o campo de temperaturas no eixo de simetria da fundação.

Palavras-chave: Hidratação do cimento; Elementos finitos convencionais; Transferências de calor; Betão jovem.

Abstract

The study of the process of hydration of cements in concrete has increased with growing demand of high performance concrete (that release larger amounts of heat) and with the desire to shorten the duration of the construction process. However, there is still much to do in order to control the process of cracking of the concrete during hardening, *i.e.*, ensure a evolution of the state of tension compatible with the development of mechanical strength. It should be noted that, at early ages, the evolution of the deformation of concrete is strongly influenced by thermal and volumetric variations, almost always constrained by internal and external constraints.

A one-dimensional thermo-chemical model of conventional finite elements (approximating the temperature field) was developed, that reproduces the evolution of the temperature and hydration degree fields during the hydration process. Deliberately has been left to the user some options that usually are admitted by default, namely the possibility to choose between several initial conditions for the hydration and the possibility of considering a heat release rate different from zero in the beginning of process.

After the formulation of the model, a sensitivity analysis was carried out where the number of finite elements and their degrees of approximation was studied. The results were compared with other programs, which verified the plausibility of the assumptions made.

Finally, in order to understand the suitability of the finite element formulation and some assumptions made, the one-dimensional modelling approach was used for two case studies: a slab of an industrial structure and the foundation of a wind turbine. The first situation is within the scope of the model created, but that is not the case of the second. However, with the fairly common large wind turbine structures, whose foundations are cast in one pour, it is of concern whether it is possible to approximate the temperature field on the central axis of the foundation.

Keywords: Hydration of cement; Conventional finite elements; Heat transfer; Early age concrete.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, quero agradecer ao ilustre Professor João Teixeira de Freitas pela sua disponibilidade, paciência e orientação. Graças à sua extraordinária sapiência foi-me possível adquirir um conjunto de competências, que muito dificilmente conseguiria de outra forma. Não posso também deixar de agradecer a compreensão demonstrada durante o período em que decorreu o meu julgamento (decorrente de um acidente de viação em que estive envolvido).

Quero também agradecer ao Doutor Júlio Pargana, co-orientador deste trabalho, por ter estado sempre disponível e pelo ânimo constante.

Agradeço ao Eng. Cuong Pham pela partilha constante de informações e resultados. Ao Professor Carlos Tiago pela cedência da licença do programa WinEdt e à Eng.^a Maria José Duarte pela Introdução ao L^AT_EX.

Agradeço ainda ao Professor Miguel Azenha por ter disponibilizado os valores dos seus trabalhos experimentais e à Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT) pela bolsa que me atribuiu.

Gostaria de deixar uma palavra de apreço às Professoras Beatriz Condessa e Isabel Ramos pela gentileza e compreensão que tiveram numa altura em que estava fisicamente incapacitado de me deslocar ao IST.

Aos meus colegas de curso, especialmente àqueles com quem fiz a maioria dos trabalhos de grupo.

Àqueles que têm sido o meu suporte emocional. Todos, à sua maneira, têm sido importantes, mas sinto-me na obrigação de deixar uma palavra de especial apreço aos que me apoiaram na fase mais complicada da minha vida: a Salomé Simão que esteve sempre presente nos momentos críticos, percorrendo algumas vezes grandes distâncias para tal; a Eng.^a Esmeralda Dourado pelo apoio constante e pelas iniciativas que organizou; o Fernando Simões pela ajuda durante o semestre em que fiquei impedido de frequentar assiduamente as aulas e por ter testemunhado isso em tribunal; o Jorge Pedro pelo apoio.

À minha família, em especial à minha irmã e à minha tia.

Aos meus pais por um apoio forte, constante e que transcende em muito o percurso académico.

Acknowledgements

First I would like to acknowledge the distinguished Professor João Teixeira de Freitas, for his guidance, availability and patience. Thanks to his extraordinary wisdom I was able to acquire a span of skills which would have been very hard to gain otherwise. I would also like to thank him for the support during the period of my trial (due to a car crash where I was involved).

I would like to thank Doctor Júlio Pargana, co-supervisor of this work, for being always available and for the constant cheer up. The fact that he and Eng. Cuong Pham are not able to speak Portuguese very well was the motivation behind this English version of the acknowledgments.

I would also like to thank Eng. Coung Pham for a source of information and results. To Professor Carlos Tiago for the license of WinEdt and to Eng.^a Maria José Duarte for the introduction to L^AT_EX.

To Professor Miguel Azenha for sharing the raw values of his experiments and to Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT) for the support given to this work, namely through the scholarship that they gave me.

To my classmates, specially to those who were closer and worked with me.

I want to make a word of appreciation to Professors Beatriz Condessa and Isabel Ramos for the kindness and comprehension when I was physically unable to go to the IST.

To those who have been my emotional support. Everyone, in their very own manner, were important, but I must point out those who stand by during the hardest phase of my life: Salomé Simão for being always present in the critical moments; Eng.^a Esmeralda Dourado, for organizing some support initiatives and Fernando Simões, for his help during the semester in which I was unable to frequent the classes and for testifying that on court; to Jorge Pedro for the support.

To my family, specially to my sister and to my aunt.

To my parents for their strong, constant and outstanding support in almost every aspect of my live.

Conteúdo

Resumo	iii
Abstract	v
Agradecimentos	vii
Acknowledgements	ix
Conteúdo	xi
Lista de Tabelas	xv
Lista de Figuras	xvii
Notação	xxi
1 Introdução	1
1.1 Observações Gerais	1
1.2 Estado da Arte	2
1.3 Problemas Térmico e Mecânico	3
1.4 Caracterização do Material	5
1.5 Organização do Texto	6
2 Definição do Modelo	9
2.1 Introdução	9
2.2 Modelo	10
2.3 Modos de Transferência de Calor	10
2.4 Condições de Fronteira	12
2.5 Modelo Matemático	13
2.5.1 Equações Básicas	13
2.5.2 Analogia com a Mecânica dos Sólidos	15
2.5.3 Definição das Grandezas	16

2.5.4	Condições de Fronteira	20
3	Variação no Tempo	23
3.1	Introdução	23
3.2	Formulação Incremental das Condições de Domínio	24
3.3	Formulação Incremental das Condições de Fronteira	24
3.4	Fonte de Calor de Hidratação	25
3.5	Discretização no Tempo	26
4	Elementos Finitos	27
4.1	Introdução	27
4.2	Método dos Elementos Finitos	28
4.3	Discretização no Espaço	29
4.3.1	Método dos Resíduos Ponderados	30
4.3.2	Balanco Energético	31
4.4	Assemblagem do Sistema	33
4.4.1	Tabela de Incidências	33
4.5	Solução Inicial	34
4.5.1	Hidratação	35
4.6	Funções de Aproximação	35
4.7	Aspectos Numéricos	37
4.7.1	Escalas	38
4.7.2	Método de Integração de Gauss	38
4.7.3	Mudança de Coordenadas	39
4.7.4	Método de Newton-Raphson	39
4.7.5	Convergência dos métodos θ	40
5	Modelo Numérico	41
5.1	Introdução	41
5.2	Algoritmo	41
5.3	Estrutura do programa	42
5.4	Leitura de Dados	43
5.5	Escrita de Resultados	46
6	Convergência das Soluções	49
6.1	Introdução	49

6.2	Testes	50
6.2.1	Formatação dos Resultados	52
6.3	Aproximações Fracas	53
6.3.1	Convergência do Campo de Temperatura	53
6.3.2	Convergência do Grau de Hidratação	55
6.4	Aproximações Fortes	56
6.4.1	Convergência do Campo de Temperatura	56
6.4.2	Convergência do Grau de Hidratação	57
6.5	Conclusões	60
7	Comparação com Outros Modelos Numéricos	63
7.1	Introdução	63
7.2	Modelo Unidimensional	64
7.2.1	Teste Adiabático	64
7.2.2	Temperatura Prescrita	65
7.2.3	Convecção-Radiação	66
7.3	Modelo Bidimensional	67
7.4	Conclusões	70
8	Comparação com Ensaios Experimentais	71
8.1	Introdução	71
8.2	Laje de um Armazém	71
8.3	Torre Eólica	75
9	Conclusões	83
9.1	Resultados	83
9.2	Formação	85
9.3	Desenvolvimentos Futuros	85
	Referências Bibliográficas	87
	Bibliografia	91
A	Formulação incremental da lei Constitutiva	95
B	Teorema de Taylor	97

C	Formulação Incremental do Fluxo de Calor	99
D	Forma Incremental dos métodos θ	101
E	Discretização no Tempo do Fluxo de Calor	103
F	Integração Numérica	105
G	<i>Input</i> Principal	111
H	<i>Input</i> da função $f(\alpha)$	113
I	<i>Inputs</i>	115
	I.1 Temperatura Prescrita	115
	I.2 Convecção-Radiação	115
J	Resultados do Modelo Bidimensional	117
	J.1 Temperatura	117
	J.2 Grau de Hidratação	118
K	Resultados do Modelo Unidimensional de Elementos Convencionais	121
	K.1 Temperatura	121
	K.2 Grau de Hidratação	122

Lista de Tabelas

1.1	Principais propriedades do betão	5
1.2	Composição química e finura do cimento	6
2.1	Condições de fronteira	12
2.2	Calor libertado a tempo infinito (Q_{∞})	17
2.3	Parâmetros a utilizar na modelação numérica	19
6.1	Características do ensaio - Convergência das soluções	51
7.1	Características dos ensaios - Modelo unidimensional de elementos híbridos	64
7.2	Características do ensaio - Modelo bidimensional de elementos híbridos	69
8.1	Características dos ensaios - Laje de armazém	73
8.2	Características dos ensaios - Torre eólica	80
F.1	Posição dos pontos de Gauss e respectivos pesos	108

Lista de Figuras

2.1	Modelo unidimensional	10
2.2	Condução	11
2.3	Convecção	11
2.4	Radiação	11
2.5	Volume de controlo	14
2.6	Equação de calor por analogia com a teoria de análise de estruturas	16
2.7	Função de hidratação, $f(\alpha)$ - CA CEM I 42.5R	18
4.1	Discretização de um domínio genérico em elementos	29
4.2	Tabela de incidências	33
4.3	Polinómios de Legendre	36
4.4	Polinómios de Lagrange de 1º grau	36
4.5	Polinómios de Lagrange de 2º grau	36
4.6	Mudança de coordenadas	39
4.7	<i>Snap-trough</i> e <i>snap-back</i>	40
5.1	Fluxograma do programa	44
5.2	Fluxograma da solução inicial	45
5.3	Fluxograma do cálculo da matriz de rigidez, \mathbf{K}	45
6.1	Caracterização dos testes de convergência das soluções	50
6.2	Evolução da temperatura e do grau de hidratação em duas secções	51
6.3	Secção em alguns instantes de tempo	51
6.4	Temperatura prescrita - 1 elemento de grau 1	53
6.5	Temperatura, aproximações fracas - 7 horas ($T_{ref} = 27.708^{\circ}C$)	54
6.6	Temperatura, aproximações fracas - 14 horas, ($T_{ref} = 36.868^{\circ}C$)	54
6.7	Temperatura, aproximações fracas - 48 horas ($T_{ref} = 26.372^{\circ}C$)	54

6.8	Grau de hidratação, aproximações fracas - 7 horas ($\alpha_{ref} = 0.072$)	55
6.9	Grau de hidratação, aproximações fracas - 14 horas ($\alpha_{ref} = 0.480$)	55
6.10	Grau de hidratação, aproximações fracas - 48 horas ($\alpha_{ref} = 0.801$)	56
6.11	Temperatura, aproximações fortes - 7 horas ($T_{ref} = 27.708^{\circ}C$)	57
6.12	Polinómio de Lagrange - grau 21	57
6.13	Temperatura, aproximações fortes - 7 horas ($T_{ref} = 27.708^{\circ}C$)	58
6.14	Temperatura, aproximações fortes - 14 horas ($T_{ref} = 36.868^{\circ}C$)	58
6.15	Temperatura, aproximações fortes - 48 horas ($T_{ref} = 26.372^{\circ}C$)	58
6.16	Grau de hidratação, aproximações fortes - 7 horas ($\alpha_{ref} = 0.072$)	59
6.17	Grau de hidratação, aproximações fortes - 14 horas ($\alpha_{ref} = 0.480$)	59
6.18	Grau de hidratação, aproximações fortes - 48 horas ($\alpha_{ref} = 0.801$)	59
7.1	Comparação com modelo híbrido unidimensional - Teste adiabático	65
7.2	Comparação com modelo híbrido unidimensional - Temperatura prescrita	66
7.3	Comparação com modelo híbrido unidimensional - Convecção	66
7.4	Comparação com modelo híbrido unidimensional - Secção no instante inicial	67
7.5	Comparação com modelo híbrido unidimensional - Convecção, $\dot{Q}_0 = 0$	67
7.6	Malha de 2×2 elementos	68
7.7	Modelo bidimensional - Campo de temperatura às 17.5, 44.4 e 72.5 horas	68
7.8	Modelo unidimensional - Campo de temperatura às 17.5, 44.4 e 72.5 horas	68
7.9	Modelo bidimensional - Grau de hidratação às 17.5, 44.4 e 72.5 horas	69
7.10	Modelo unidimensional - Grau de hidratação às 17.5, 44.4 e 72.5 horas	69
7.11	Comparação com modelo híbrido bidimensional - 1 camada	70
7.12	Comparação com o modelo bidimensional às 3.2, 17.5, 24.0, 44.4 e 72.4 horas	70
8.1	Fotografia da laje antes da betonagem	72
8.2	Planta da laje	72
8.3	Curvas de caracterização pseudo-adiabática	74
8.4	Evolução das temperaturas - CA CEM I 42.5R	75
8.5	Evolução das temperaturas - CB CEM I 42.5R	75
8.6	Torre eólica e modelo utilizado em [2, 46]	76
8.7	Resultados no domínio - Modelo bidimensional [2]	77
8.8	Dimensões da fundação e localização dos sensores	77
8.9	Torre eólica - Sensores	78
8.10	Valores medidos nos sensores	78

8.11 Torre Eólica - Sensor 1	79
8.12 Torre Eólica - Sensor 3	81
8.13 Torre Eólica - Sensor 4	81
F.1 Função polinomial de grau 5	105

Notação

Em nome da clareza, as abreviatura e símbolos são aqui introduzidos pela ordem da sua primeira aparição no texto, evitando-se assim repetições desnecessárias. Note-se ainda que, por vezes, o mesmo símbolo pode ter significados diferentes ao longo do trabalho. Porém, embora possa parecer confuso nesta listagem, ao longo do texto são tomadas precauções para evitar dúvidas.

Lista de Abreviaturas

IST	Instituto Superior Técnico
FCT	Fundação para a Ciência e Tecnologia
EC2	EN 1992-1-1

Lista de Variáveis

Capítulo 1

f_{cd}	Valor de dimensionamento da tensão de rotura do betão à compressão
f_{ck}	Valor de característico da tensão de rotura do betão à compressão
f_{ctm}	Valor médio da tensão de rotura do betão à tracção
$E_{c,28}$	Módulo de elasticidade do betão aos 28 dias
SiO_2	Sílica
Al_2O_3	Óxido de alumínio
Fe_2O_3	Óxido de ferro
CaO	Óxido de cálcio
MgO	Óxido de magnésio
SO_3	Trióxido de enxofre
K_2O	Óxido de potássio

Capítulo 2

σ	Fluxo de calor / tensões
T_s	Temperatura à superfície
T	Temperatura
k	Condutividade térmica
\dot{E}_{in}	Energia que entra no volume de controle
\dot{E}_g	Energia gerada pelas reacções de hidratação do cimento
\dot{E}_{st}	Energia que fica armazenada no volume de controle
\dot{E}_{out}	Energia que sai do volume de controle
σ_x	Fluxo de calor segundo a direcção do eixo x
σ_y	Fluxo de calor segundo a direcção do eixo y
σ_z	Fluxo de calor segundo a direcção do eixo z
\dot{Q}	Fonte de calor
ρc	Calor específico
ε	Gradiente da temperatura no espaço / Deformações / Emissividade
k_∞	Condutividade térmica após formação de presa
α	Grau de hidratação
Q_∞	Quantidade de calor a tempo infinito
A_t	valor máximo da produção de calor
$f(\alpha)$	Função que define a evolução da taxa de calor normalizada
E_a	Energia de Activação
R	constante universal dos gases
n	normal
\bar{t}	Fluxo de calor prescrito
\bar{T}	Temperatura prescrita
h_{cr}	Coefficiente de convecção-radiação
T_a	Temperatura ambiente
h_c	Coefficiente de convecção
h_r	Coefficiente de radiação
v	Velocidade do vento

Capítulo 3

v	Grandeza genérica no instante t
v_0	Grandeza genérica no instante inicial / Velocidade do vento no início do incremento
δv	Incremento de uma grandeza genérica / Incremento na velocidade do vento
$\delta \varepsilon$	Incremento do gradiente da temperatura no espaço
δT	Incremento de temperatura
$\delta \sigma$	Incremento do fluxo de calor
k_0	Valor da condutividade térmica no início do incremento
R_k	Resíduo do fluxo de calor
$\delta \dot{\alpha}$	Incremento da derivada do grau de hidratação
$\delta \dot{T}$	Incremento da derivada da Temperatura
$\delta \bar{t}$	Incremento no fluxo de calor prescrito
$\delta \bar{T}$	Incremento na temperatura prescrita
R_{h0}	Resíduo da fronteira de Robin
h_{cr0}	Valor do coeficiente de convecção-radiação no início do incremento
δh_{cr}	Incremento no coeficiente de convecção-radiação
T_0	Temperatura no início do incremento
δh_c	Incremento no coeficiente de convecção
δh_r	Incremento no coeficiente de radiação
δT_a	Incremento na temperatura ambiente
β_0	Valor do parâmetro β no início do incremento
f_0	Função que define a evolução da taxa de calor normalizada no início do incremento
f'_0	Deriva da função que define a evolução da taxa de calor normalizada no início do incremento
$\delta \alpha$	Varição do grau de hidratação
R_α	Resíduo da lei de Arrhenius
θ	Parâmetro dos métodos θ
\dot{v}_0	Derivada de grandeza genérica no início do incremento
\dot{v}	Derivada de grandeza genérica no instante t
V	Domínio

Capítulo 4

$N_{\text{nós}}$	Número de nós
$N_{\text{elementos}}$	Número de elementos
Γ^e	Fronteira do elemento
Γ_i^e	Fronteira entre elementos
Γ_σ^e	Fronteira de Neumann
Γ_T^e	Fronteira de Dirichlet
Γ_q^e	Fronteira de Robin
δT_i	Incremento no valor inter-elementar da temperatura
ψ_T	Vector que contém as funções de interpolação da temperatura
V^e	Domínio do elemento
B	Vector que contém os gradientes da temperatura
W_i	Trabalho das forças interiores
u	Campo de deslocamentos
u	Campo de forças
K_d	Coefficiente de amortecimento
p	Forças concentradas aplicadas na fronteira
W_e	Trabalho das forças exteriores
P	Polinómio de Legendre
ε	Coordenada no referencial $[-1, 1]$
$P_{Lagrange}$	Polinómio de Lagrange

Capítulo 5

L_S	Escala de comprimentos
T_S	Escala de temperaturas
Q_S	Escala do calor
K_S	Escala da condutividade térmica
ε_S	Escala do gradiente de temperatura
σ_S	Escala do fluxo de calor
t_S	Escala do tempo
ρc_S	Escala do calor específico
h_S	Escala do coeficiente de convecção-radiação
A_{TS}	Escala da taxa máxima de produção de calor

β_S	Escala do parâmetro β
v_s	Escalada genérica
\hat{v}	Valor de uma grandeza genérica escalada
\hat{T}	Valor da temperatura escalada
\hat{Q}_∞	Valor escalado da quantidade de calor libertada a tempo infinito
$\hat{\alpha}$	Valor escalado da derivada do grau de hidratação
\hat{A}_T	Valor escalado da taxa máxima de produção de calor
\hat{T}	Valor escalado da temperatura
$f(x)$	Função genérica
W_i	Peso do ponto de Gauss i
n	Número de pontos de Gauss
P_i	Coordenada do ponto de Gauss i
x	Coordenada no referencial inicial
C_c	Peso volúmico do cimento no betão
T_{ref}	Valor de referência para a temperatura
α_{ref}	Valor de referência para o grau de hidratação

Capítulo 7

\dot{Q}_0	Calor libertado no instante inicial
a	Parâmetro de calibração da função $f(\alpha)$ contínua
b	Parâmetro de calibração da função $f(\alpha)$ contínua
c	Parâmetro de calibração da função $f(\alpha)$ contínua

Capítulo 8

T^{ad}	Temperaturas medidas experimentalmente durante o ensaio adiabático
T_0	Primeira temperatura medida no ensaio adiabático
T_∞	Ultima temperatura medida no ensaio adiabático
T_{i+1}	Temperatura medida no instante genérico $i + 1$
T_i	Temperatura medida no instante genérico i
t_{i+1}	Instante genérico $i + 1$
t_i	Instante genérico i

Capítulo 1

Introdução

1.1 Observações Gerais

Em muitas aplicações, por uma questão de simplicidade, a evolução do comportamento do betão no tempo tem sido desprezada. Tratando-se de um material compósito, cujas tensões se vão instalando desde o início da sua formação, o estudo exaustivo da sua história de tensões pode revelar-se bastante complexo. No entanto, a evolução dos betões de alta resistência e a redução dos prazos de construção fizeram com que a análise do comportamento do betão desde as primeiras idades tenha ganho importância em muitas aplicações práticas, tais como barragens, pontes e alguns tipos de fundações em que a cura usual se pode revelar ineficaz. Sucintamente, as estruturas mais sensíveis a este problema são: aquelas em que existem grandes volumes de betão envolvidos, o que dificulta a dissipação do calor; aquelas em que são utilizados super betões que atingem temperaturas mais altas que os betões correntes; as estruturas que são colocadas em carga muito cedo.

Durante a hidratação do cimento ocorrem reacções químicas exotérmicas e, sendo este um material com baixa condutividade térmica [1], podem gerar-se grandes diferenças de temperatura entre a superfície e o interior das peças betonadas. Estes campos de temperatura originam, por sua vez, variações de volume. Nas situações correntes em que as deformações se encontram restringidas, aparecem, inevitavelmente, campos de tensões. Sempre que for excedido o valor da tensão de rotura à tracção irá ocorrer abertura de fendas. Note-se que, uma vez que o cimento ainda não formou presa, os valores da tensão de rotura são inferiores àqueles que, usualmente, são considerados em projecto.

Também se tem verificado um aumento de preocupações quer ambientais quer ao nível da qualidade e durabilidade das estruturas. Ao contrário do que inicialmente se previu, as soluções

de betão armado têm visto a sua competitividade aumentar relativamente a outras alternativas, em consequência da evolução da tecnologia associada a este material. Actualmente, tem-se assistido a um aumento da utilização de novos betões. No entanto, tendo em consideração que as exigências colocadas são cada vez maiores, surge naturalmente a necessidade de perceber e, conseqüentemente, controlar melhor o comportamento inicial deste material.

O processo de cura tem sido feito essencialmente de forma empírica, ficando, na maioria das situações, ao cuidado da experiência e qualidade do construtor. Como em grande parte das obras o projectista não sabe *a priori* quem irá construir, existe uma grande incerteza relativamente ao que irá ocorrer até à formação da presa. As soluções correntes de cura passam pela rega das superfícies das peças e colocação de um material cuja função visa, essencialmente, reduzir a evaporação de água. No caso das barragens, instala-se um sistema de tubos onde se faz circular água fria, de forma a reduzir as temperaturas. Como referido, ambos os processos resultam da experiência empírica, estando portanto subjacente alguma incerteza quanto à sua real eficácia sempre que são aplicados a um novo tipo de betão ou de estrutura.

Apesar de tudo, o tempo tem revelado que as práticas de projecto e construção se têm revelado satisfatórias para os estados limites últimos, no sentido em que garantem coeficientes de segurança adequados. Porém, a situação não é tão satisfatória para os estados limites de utilização. Verifica-se, por vezes, que as fendas têm aberturas acima do previsto ou que apareceram em zonas cujos modelos de cálculo correntes não conseguem justificar [2]. Tratando-se de estruturas de betão armado, a fendilhação é um fenómeno normal e inevitável, mas deve ser sempre controlada, pois pode ter inúmeras implicações práticas.

1.2 Estado da Arte

O comportamento do betão nas primeiras idades é caracterizado por um estado de deformação fortemente influenciado por variações térmicas e volumétricas, quase sempre restringidas por coacções internas e externas que potenciam a fendilhação precoce.

O aprofundamento do estudo do comportamento do betão nas primeiras idades tem sido suscitado pela crescente utilização de betões de elevado desempenho e pelo desejo de abreviar o processo construtivo. São maiores as exigências de modelação que daí decorrem, não só para assegurar condições de durabilidade adequadas ao período de vida da estrutura, mas também para evitar problemas que se têm verificado pela inadequada avaliação do comportamento do betão na fase da construção, Estrada et al. [3].

Contudo, são ainda limitadas as ferramentas disponíveis para realizar a modelação do com-

portamento de betões nas primeiras idades e prever a fendilhação durante o processo de presa, assegurando uma evolução do estado de tensão adequada ao desenvolvimento das resistências mecânicas.

Para modelar a evolução das propriedades do betão é necessário combinar [2, 4] a solução de um problema termo-químico, para a reacção de hidratação do cimento e o comportamento térmico associado [5], e de um problema mecânico, para simular a evolução das propriedades e do comportamento mecânico do betão [6].

Na formulação do problema mecânico é usual adoptar a hipótese de linearidade geométrica na definição das condições de equilíbrio e de compatibilidade. No entanto, é necessário simular o comportamento fisicamente não-linear associado à ocorrência da fendilhação do betão, incluindo os efeitos decorrentes da fluência [7] e da retracção autógena [8].

O comportamento termo-químico, transiente e não-linear, combina a condição de conservação do calor com a equação que define a fonte de calor decorrente do processo de hidratação. Têm sido propostos modelos micro-estruturais para simular o processo de hidratação [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15]. A sua implementação é computacionalmente bastante pesada, produzindo um detalhe de informação que é supérfluo para a maioria das aplicações práticas. Por isso, por vezes, opta-se pela utilização de modelos macro-estruturais [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23], geralmente baseados na lei de Arrhenius com parâmetros físicos determinados e calibrados experimentalmente para capturar adequadamente o processo termo-químico [4, 24].

1.3 Problemas Térmico e Mecânico

Para estudar a evolução do betão ao longo do tempo de forma completa é necessário resolver dois problemas, um termo-químico e outro mecânico. O problema termo-químico (aqui designado por térmico) é não linear e varia no tempo, simulando o processo de hidratação. O problema mecânico também varia no tempo e é fisicamente não linear, porque as propriedades mecânicas variam durante o processo de hidratação.

Importa sublinhar que ambos estão interligados, dado que se influenciam mutuamente. Por um lado, o campo de temperaturas, ao promover variações de volume num material que, no caso geral, tem as suas deformações restringidas, vai provocar alterações no campo de tensões. Por outro, o campo de temperaturas vai ter uma grande influência sobre a velocidade das reacções químicas alterando, uma vez mais, o comportamento mecânico do material.

Comparativamente, a influência do comportamento mecânico no campo de temperaturas é menor que o oposto. Contudo, sempre que aparece uma fenda, é criada uma descontinuidade

no campo de temperaturas alterando a forma de transmissão de calor. Além disso, as variações de volume da peça podem alterar as próprias condições de fronteira ao originar, por exemplo, perdas de contacto.

Posto isto, em todos os estudos deste tipo, é necessário admitir várias hipóteses simplificativas pois, caso contrário, o cálculo seria extremamente moroso, devido às interdependências e não linearidades envolvidas. Como já foi explicado a influência da variação das propriedades mecânicas sobre o campo de temperaturas é significativamente menor que o contrário. Assim, de um modo geral, é habitual considerar como hipótese que o campo de temperaturas não depende da variação das propriedades do material [1, 2, 25]. Deste modo, é possível modelar o campo de temperaturas de forma independente e, posteriormente, quando se analisa a evolução das propriedades mecânicas utilizam-se as distribuições de temperatura e o grau de hidratação já calculados [4]. O *output* do modelo térmico serve assim de *input* no modelo mecânico, considerando-se apenas a influência das temperaturas nas propriedades mecânicas. Existem outras abordagens mais recentes em que se obtém melhores resultados. Por exemplo, através de estratégias iterativas em que o processo acima descrito constitui a primeira iteração e, posteriormente, os resultados obtidos no modelo mecânico são re-introduzidos no modelo térmico dando origem a um processo iterativo. Actualmente, devido à melhoria das ferramentas disponíveis, é ainda possível considerar explicitamente as interações sobre modelos termo-mecânicos acoplados.

Conforme se depreende do paragrafo anterior, no estudo da evolução do betão no tempo, a análise térmica antecede (ou acompanha) a análise mecânica. Neste trabalho modelou-se apenas o comportamento térmico, considerando-se que o campo de temperaturas não depende do campo de tensões. Assim, possíveis desenvolvimentos futuros do modelo criado terão, forçosamente, de passar pelas duas primeiras vias apresentadas.

1.4 Caracterização do Material

Os betões de ligantes hidráulicos são materiais que resultam da mistura, em proporções adequadas, de cimento, britas, areias e água. Para além destes componentes básicos podem ainda conter adjuvantes e adições. Este material pode ser classificado quanto a várias propriedades (peso volúmico, resistência à tracção, resistência à compressão, módulo de elasticidade, etc), existindo para o efeito normas bem definidas.

A propriedade mais significativa na caracterização do betão é a resistência à compressão que, expressa em termos de resistência característica, é definida como o valor da resistência atingido com uma probabilidade de 95% sem ocorrer a rotura. Por convenção, este valor é determinado aos 28 dias. A classificação do betão é feita recorrendo a esta propriedade. Por exemplo, na designação C30/37, o primeiro valor apresentado define a resistência obtida em ensaios com provetes cilíndricos, conforme indicado no EC2, e o segundo é obtido em provetes cúbicos, de acordo com a designação antiga. Na tabela 1.1, retirada de [26], apresentam-se as propriedades e os valores usualmente utilizados em projecto de estruturas de betão que, por convecção, são obtidos aos 28 dias. Faz-se, no entanto, notar que as propriedades evoluem ao longo do tempo.

Tabela 1.1: Principais propriedades do betão

	C15/20	C20/25	C25/30	C30/37	C35/45	C40/50	Unidades
f_{cd}	10.7	13.3	16.7	20.0	23.3	26.7	MPa
f_{ck}	16.0	20.0	25.0	30.0	35.0	40.0	MPa
f_{ctm}	1.9	2.2	2.6	2.9	3.2	3.5	MPa
$E_{c,28}$	29.0	30.0	31.0	33.0	34.0	35.0	GPa

Dos vários componentes do betão, aquele que mais influencia o calor de hidratação é o cimento. De tal forma que, no presente trabalho, mais do que saber se o betão é um C30/37, interessa saber qual é o tipo de cimento utilizado, visto que tem influência nos parâmetros de caracterização que serão apresentados. Não foram feitos ensaios experimentais, tendo-se optado pela utilização dos valores apresentados em [2] onde foram caracterizados os cimentos provenientes dos dois principais fornecedores do mercado português. Na tabela 1.2 apresenta-se a composição química referente a cada um dos tipos de cimento analisados.

Tabela 1.2: Composição química e finura do cimento [2]

Tipo de Cimento		SiO_2	Al_2O_3	Fe_2O_3	CaO (Total)	MgO	SO_3	K_2O	CaO livre	Perda na ignição	Blain (cm^2/g)
Empresa A	CEM I 52.5R	18.98	5.43	3.57	64.03	1.6	3.31	1.03	1.126	2.13	3880
	CEM I 42.5R	18.26	5.47	3.32	63.89	1.86	2.756	1.08	1.29	2.6	2950
	CEM II/A-L 42.5R	16.82	5.11	3.11	62.31	1.78	3.2	1	1.12	6.39	3830
	CEM II/B-L 32.5N	12.74	4.17	2.31	59.75	1.47	3.04	0.79	0.73	14.54	4060
	CEM IV/B(V) 32.5N	31.73	12.67	6.88	39.85	1.69	2	1.06	0.84	3.02	3630
Empresa B	CEM I 52.5R	20.16	4.35	3.48	62.97	2.33	3.4	-	-	-	4914
	CEM I 42.5R	19.82	4.22	3.4	62.66	2.21	3.47	-	-	-	4112
	CEM II/A-L 42.5R	18.58	4.18	3.22	62.02	2.09	3.35	-	-	-	4494
	CEM II/B-L 32.5N	18.02	3.86	2.52	59.7	1.79	2.61	-	-	-	4433
	CEM II/B-L 32.5R (w)	17.29	2.38	0.17	64.58	0.5	2.48	-	-	-	5019

1.5 Organização do Texto

A formulação de problemas em engenharia civil deve ser feita de forma criteriosa, *i.e.*, deve ser seguida uma abordagem sistemática que conduza à resolução pretendida mas que, além disso, permita que outros possam acompanhar a linha de raciocínio. No presente trabalho, identifica-se o problema (evolução no tempo das propriedades do betão); escolhe-se o aspecto concreto que se pretende estudar (evolução do campo de temperatura); introduzem-se algumas hipóteses simplificativas que possibilitem a sua resolução, sem destruir os aspectos essenciais que se pretende modelar; identificam-se as variáveis principais; escolhe-se a abordagem adequada e procede-se à criação do modelo. Por fim, é necessário validar o modelo criado, comparando-o com outros modelos e aplicando-o a casos reais.

O presente trabalho está organizado em nove capítulos, incluindo o de introdução. Em seguida, apresenta-se, de forma sucinta, o conteúdo de cada um deles.

No capítulo 2, é seguido um dos princípios fundamentais do Professor Edward Wilson [27]:

”Não deve ser criado um modelo computacional antes de se definirem os carregamentos, as propriedades do material e as condições de fronteira”.

Assim, é apresentado o modelo seguido e são explicadas as hipóteses simplificativas. No modelo matemático caracterizam-se as principais equações, definem-se conceptual e numericamente as grandezas principais e faz-se um paralelismo entre o problema do calor e o problema mecânico, mais usual em engenharia civil. Neste capítulo são ainda introduzidos alguns conceitos gerais indispensáveis à compreensão do restante trabalho.

No capítulo 3, é introduzida a variável tempo, *i.e.*, as equações apresentadas no capítulo anterior são ajustadas no sentido de permitirem um análise ao longo do tempo.

No capítulo 4, segue-se o segundo princípio fundamental do Professor Edward Wilson [27]:

”Não se deve utilizar um programa de análise estrutural a menos que se perceba completamente a teoria e aproximações subjacentes”.

Sendo este um problema sem solução analítica, é necessário recorrer a métodos numéricos para obter uma solução. Com este enquadramento, optou-se pelo método dos elementos finitos, pelo que neste ponto são apresentados os conceitos e as equações necessários à sua aplicação. Neste capítulo é, ainda, feito um parêntesis na exposição para falar de alguns aspectos numéricos necessários à implementação do método dos elementos finitos.

No capítulo 5, é retomada a linha que vinha a ser seguida e é apresentado o modelo criado. Faz-se a ponte entre os conceitos teóricos previamente apresentados e os aspectos práticos da sua aplicação. De forma muito resumida, explica-se o funcionamento do programa desenvolvido.

A qualidade das soluções obtidas através do método dos elementos finitos é muito dependente das aproximações utilizadas. Assim, no capítulo 6 calibra-se a malha de elementos e o grau de aproximação, no sentido de obter um compromisso entre o tempo dispendido, os recursos consumidos e a qualidade do resultado.

No capítulo 7 é feita a validação do modelo por comparação com programas existentes. Sendo este um problema sem solução analítica, foi a única forma encontrada para realizar um confronto sistemático de resultados. Nenhuma das soluções presentes neste capítulo é, *a priori*, exacta mas o facto de haver diferentes modelos a obter soluções semelhantes dá, obviamente, alguma garantia, sobretudo sabendo que os outros modelos já foram validados. Aproveita-se, ainda, este capítulo para avaliar as diferentes hipóteses e formulações do problema. Uma vez que não foi encontrado nenhum programa igual ao que foi criado, este ponto surge naturalmente como justificação das diferenças encontradas.

O capítulo 8 contém a comparação do modelo criado com dois ensaios experimentais reais realizados por um investigador nesta área.

Por fim, as conclusões obtidas são apresentadas no capítulo 9.

Capítulo 2

Definição do Modelo

2.1 Introdução

O carácter exotérmico da reacção de hidratação do cimento, associado a uma baixa condutividade térmica do betão, faz com que a temperatura suba, uma vez que o calor produzido não é facilmente dissipado. Assim, são originadas variações de volume no material que conduzem ao aparecimento de tensões, devido à restrição nas deformações. Estas tensões, por sua vez, caso ultrapassem o valor de fendilhação, irão originar a abertura de fendas.

Os modelos de cálculo usuais não permitem integrar de forma adequada os efeitos do calor de hidratação, pelo que será necessário criar modelos numéricos especificamente para este efeito.

Qualquer modelo (por muito bom que seja) constitui sempre uma aproximação da realidade que, geralmente, é bastante complexa. Logo, é necessário simplificar o problema, através da introdução de algumas hipóteses, com o intuito de estabelecer um modelo bem definido, exequível e válido no âmbito das suposições admitidas.

Neste capítulo apresenta-se o modelo do comportamento no domínio e na fronteira, fazendo uma pequena referência às simplificações adoptadas, deixando para mais tarde a sua validação. Em seguida, introduz-se o modelo matemático começando pelas suas equações básicas (lei de Fourier e equação de calor) mas falando sobretudo da definição das grandezas. Houve a necessidade de recorrer a definições empíricas para algumas condições de fronteira, pelo que a sua apresentação é feita aqui. Por fim, faz-se a ponte para o modelo matemático dos tipos de fronteira previamente enumerados.

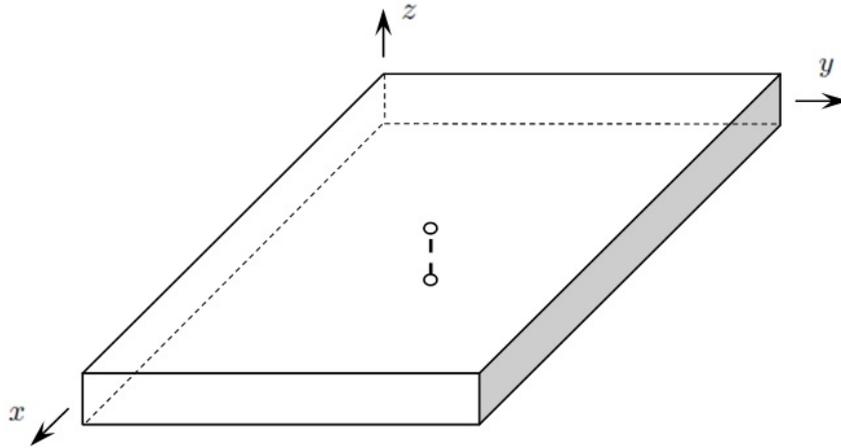


Figura 2.1: Modelo unidimensional

2.2 Modelo

Conforme se pode observar na figura 2.1, utilizou-se um modelo unidimensional do comportamento térmico como aproximação de uma laje. Implicitamente, está a considerar-se a laje como suficientemente comprida e larga, de forma a desprezar os efeitos de fronteira em todas as faces, à excepção dos topos. Ou seja, e para o referencial indicado, admite-se que as variáveis do problema são independentes das coordenadas x e y .

A representação apresentada necessitará, naturalmente, de ser validada posteriormente com recurso a outros modelos ou, preferencialmente, a resultados experimentais.

2.3 Modos de Transferência de Calor

Fisicamente o calor pode ser transmitido de três formas diferentes na fronteira de um corpo:

1. Condução

A condução é o processo de transferência de calor em que o transporte de energia térmica é realizado através do movimento de vibração aleatório de moléculas ou através do movimento de electrões livres. É, tipicamente, a forma de transmissão de calor entre corpos sólidos (ver figura 2.2).

2. Convecção

A transferência de calor por convecção é feita através do movimento de fluidos. Um caso típico é quando uma superfície quente aquece o fluido circundante que, devido por exemplo

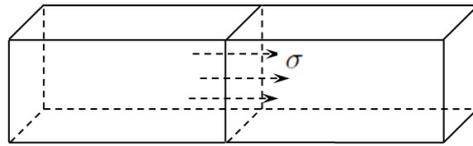


Figura 2.2: Condução

à circulação do vento, vai sendo renovado e transportado para outro local. Assim, o fluido em contacto é aquecido e substituído por fluido circulante que, por sua vez, pode chamar mais calor da superfície do corpo (ver figura 2.3).

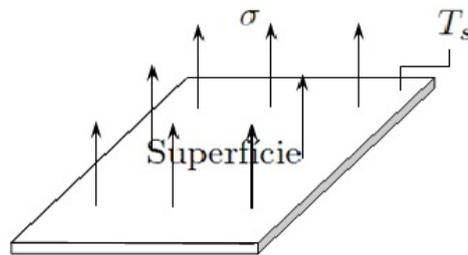


Figura 2.3: Convecção

3. Radiação

A transferência de calor por radiação está relacionada com a emissão de energia a partir de um corpo como consequência da sua temperatura (ver figura 2.4). Ao contrário dos dois modos anteriores, a radiação ocorre mesmo no vácuo. Alega-se que este tipo de transferência é feito através de ondas electromagnéticas (de acordo com a Teoria Clássica de Maxwell), ou através de fótons discretos (de acordo com a hipótese de Planck).

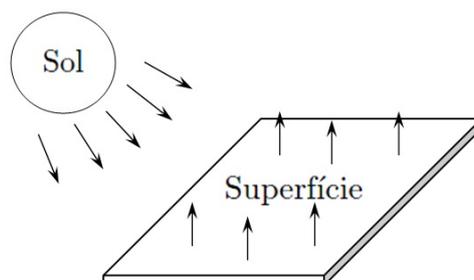


Figura 2.4: Radiação

2.4 Condições de Fronteira

De acordo com o exposto na secção 2.3, existem três modos de transmissão de calor. Interessa, no entanto, perceber de que forma os modos estudados se concretizam ao nível da fronteira. Assim, neste ponto principia-se por fazer uma observação física do problema, esquecendo a parte numérica. Numa fase posterior, faz-se a apresentação dos modelos matemáticos a utilizar e respectivas simplificações.

Após observação da natureza, verifica-se que qualquer um dos três modos se pode subdividir em duas categorias, conforme se sistematizou na tabela 2.1.

Tabela 2.1: Condições de Fronteira

Condução	<ul style="list-style-type: none">• Livre• Imposta
Convecção	<ul style="list-style-type: none">• Natural• Forçada
Radiação	<ul style="list-style-type: none">• Ondas Curtas• Ondas Longas

A condução depende, para além da temperatura do elemento em análise, de dois factores: temperatura do corpo em contacto e fluxo de calor entre ambos. Logo, sempre que se impuser uma das duas variáveis, chama-se a condução de imposta. Por oposição, quando, quer a temperatura, quer o calor puderem variar chama-se de livre.

Da mesma forma, a convecção pode ser subdividida em natural e forçada. Como já foi dito, entende-se por convecção uma troca de calor entre um corpo sólido e um fluido envolvente. Neste caso, a troca de calor ocorrerá entre o betão e o meio ambiente. Este fenómeno será regido, essencialmente, pela velocidade do fluido e pela diferença de temperatura entre o betão e o meio ambiente. Será natural quando o fluido em contacto for sendo renovado devido à variação de densidade que acontece em consequência da sua variação de temperatura. Isto é, o betão aquece o ar envolvente que, por sua vez, diminui de densidade, sobe e dá lugar a uma nova porção de ar. Por outro lado, será forçada quando, através de processos artificiais, se aumentar ou diminuir a taxa de renovação do fluido em contacto.

A subdivisão da radiação é substancialmente diferente das duas anteriores. Este modo pode ser subdividido em radiação de onda curta ou de onda longa. A mudança de categoria passa, apenas, por uma diferença no comprimento de onda. Em sentido lato, todos os corpos emitem radiações de onda longa. A onda curta está, geralmente, associada à radiação solar [1].

2.5 Modelo Matemático

Por forma a tornar a exposição mais clara, o modelo matemático é apresentado por etapas. Numa primeira fase, apresenta-se as equações a aplicar no domínio do elemento e introduz-se as grandezas físicas, bem como a sua concretização para o caso em apreço. Numa fase posterior, são apresentadas as condições de fronteira, fazendo uma pequena introdução física da cada uma.

2.5.1 Equações Básicas

Nesta subsecção faz-se a apresentação das equações básicas referentes ao problema térmico. Ficam por caracterizar algumas grandezas apresentadas, o que é feito na secção seguinte.

Este problema tem duas equações fundamentais:

1. Lei de Fourier

De acordo com [28], demonstra-se experimentalmente que existem duas leis que regem o fluxo de calor. A primeira condição diz que o fluxo de calor ($\vec{\sigma}$) e a variação da temperatura no espaço (∇T) têm direcções opostas:

$$\frac{\sigma}{|\sigma|} = -\frac{\nabla T}{|\nabla T|} \quad (2.1)$$

A segunda lei refere que a magnitude do fluxo de calor é directamente proporcional ao gradiente de temperatura:

$$|\sigma| \propto |\nabla T| \quad (2.2)$$

Posto isto, o fluxo de calor deixa de ser algo abstracto e passa a ser, à parte de uma constante de proporcionalidade, uma quantidade com uma direcção e magnitude definidas. A constante de proporcionalidade define a condutividade térmica (k em $Wm^{-1}K^{-1}$), conforme se observa na lei de Fourier:

$$\sigma = -k \nabla T \quad (2.3)$$

Note-se que a lei de Fourier estabelece uma condição de causalidade entre o campo de temperaturas e o fluxo de calor.

2. Equação de Calor

A dedução da equação de calor pode ser feita de várias formas. A forma usual na literatura [4, 28, 29] é através da conservação da energia num volume de controle. Na figura 2.5

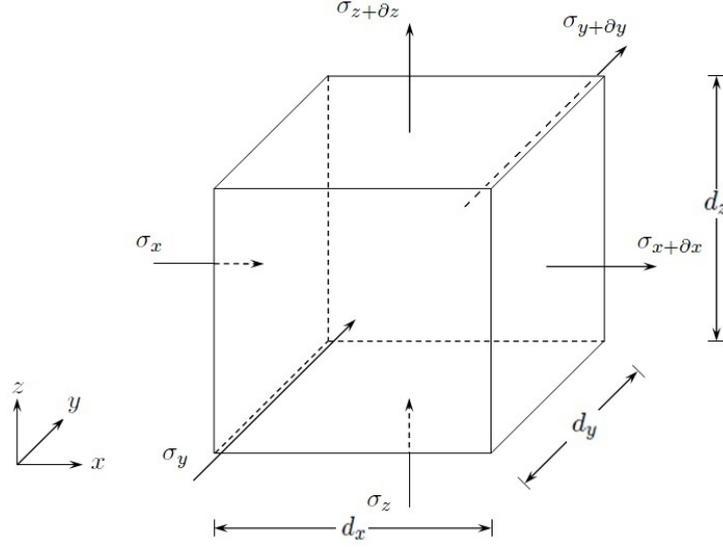


Figura 2.5: Volume de controle

apresenta-se um volume de controle genérico, onde pode ser feito o balanço energético. De acordo com a primeira lei da termodinâmica para sistemas fechados,

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_g - \dot{E}_{st} = \dot{E}_{out} \quad (2.4)$$

onde, \dot{E}_{in} corresponde à energia que entra no volume, \dot{E}_{out} é a que sai, \dot{E}_g é, nesta aplicação, a energia gerada pelas reacções de hidratação do cimento e \dot{E}_{st} é aquela que fica armazenada. \dot{E}_{in} é definido por,

$$\dot{E}_{in} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (2.5)$$

e \dot{E}_{out} por:

$$\dot{E}_{out} = \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) + \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy\right) + \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz\right) \quad (2.6)$$

Para calcular a energia produzida durante a reacção química, multiplica-se a taxa de geração de calor interno (\dot{Q} em Wm^{-3}) pelo volume de controle:

$$\dot{E}_g = \dot{Q} \, dxdydz \quad (2.7)$$

A energia que fica armazenada dentro do volume de controle calcula-se através da equação,

$$\dot{E}_{st} = \rho c \, \dot{T} \, dxdydz \quad (2.8)$$

em que ρc define o calor específico.

Substituindo as equações (2.5) a (2.8) em (2.4),

$$\begin{aligned} & \sigma_x dydz + \sigma_y dxdz + \sigma_z dxdy + \dot{Q} dxdydz - \rho c \dot{T} dxdydz = \\ & = \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz + \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy\right) dxdz + \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz\right) dxdy \end{aligned} \quad (2.9)$$

e simplificando, obtém-se:

$$-\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \dot{Q} = \rho c \dot{T} \quad (2.10)$$

Para que o resultado final dependa apenas do calor, da temperatura e das propriedades do material, é necessário recorrer à Lei de Fourier (2.3). Concretizando-a para a presente situação, obtém-se:

$$\sigma_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.11)$$

$$\sigma_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.12)$$

$$\sigma_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.13)$$

Para finalizar, é necessário substituir a Lei de Fourier em (2.9), obtendo-se a equação do calor,

$$\dot{Q} - \rho c \dot{T} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-k \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-k \frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

ou, denotando $\nabla = \{\partial_x, \partial_y, \partial_z\}^T$,

$$\nabla^T (k \nabla T) + \dot{Q} = \rho c \dot{T} \quad (2.14)$$

2.5.2 Analogia com a Mecânica dos Sólidos

A mesma expressão pode ser obtida por analogia com a teoria da análise de estruturas. Embora menos óbvia, esta dedução é mais simples de compreender por pessoas com formação base em engenharia civil. A dificuldade desta nova abordagem é perceber de que forma se relacionam as grandezas deste problema com os deslocamentos, extensões, relações constitutivas, tensões e esforços.

Partir-se-á dos deslocamentos¹ que, neste caso, correspondem à temperatura (T) até obter o fluxo de calor (Q), equivalente aos esforços. Sendo o deslocamento uma grandeza conhecida, é possível, através da equação de compatibilidade (2.15), obter as extensões (ε) que, neste caso, correspondem ao gradiente no espaço da temperatura (∇T):

$$\varepsilon = \nabla T \quad (2.15)$$

¹Note-se que se obteria um resultado idêntico caso se começasse pelos esforços.

Uma vez conhecido o gradiente térmico, ε , pode determinar-se o equivalente às tensões, através da relação constitutiva. A lei de Hooke utilizada na mecânica, mais concretamente na teoria da elasticidade linear, é aqui substituída pela Lei de Fourier, equação (2.3). Por fim, basta aplicar a condição de equilíbrio, (2.10), para obter o resultado que foi obtido anteriormente em (2.14).

Apresenta-se na figura 2.6, um esquema gráfico demonstrando a analogia com a análise estrutural.

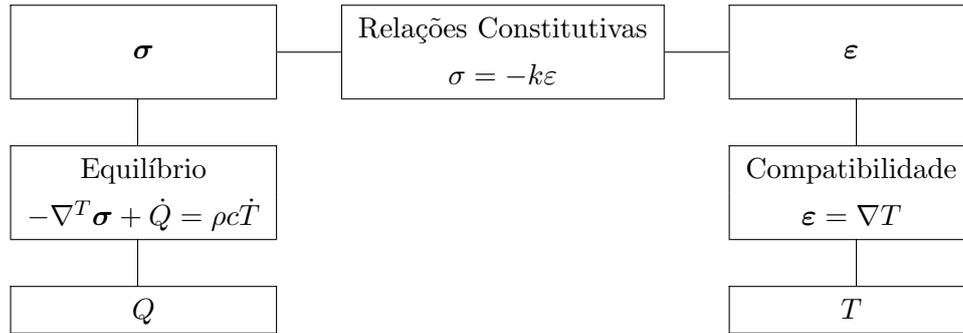


Figura 2.6: Equação de calor por analogia com a teoria de análise de estruturas

2.5.3 Definição das Grandezas

Nesta subsecção, é feita a caracterização das grandezas necessárias à utilização das equações anteriores, concretizando-as para o problema presente.

- Condutividade térmica (k)

A condutividade térmica irá variar ao longo do tempo, pelo que será necessário traduzir matematicamente a evolução deste parâmetro. De acordo com [25] a variação de k pode ser traduzida pela expressão empírica,

$$k = k_{\infty}(1.33 - 0.33\alpha) \quad (2.16)$$

onde k_{∞} é o valor da condutividade do betão após a formação de presa e α representa o grau de hidratação.

- Grau de hidratação (α)

O grau de hidratação é definido, em cada instante, pelo rácio entre o calor libertado até ao momento e aquele que será libertado até ao final do processo:

$$\alpha(t) = \frac{Q(t)}{Q_{\infty}} \quad (2.17)$$

Na aplicação do modelo a casos reais, não é fácil estimar o valor inicial deste parâmetro, uma vez que é difícil afirmar com certeza em que momento começam as reacções conducentes à hidratação, sobretudo devido ao transporte, onde é aproveitada a tixotropia que o betão possui na fase inicial. Todavia, é usual admitir $\alpha(t = 0) = 0$.

- Quantidade calor a tempo infinito (Q_∞)

Um dos problemas da aplicação da definição (2.17) é a determinação de Q_∞ . Este valor é obtido pelo integral no tempo da taxa de calor libertado durante o processo de hidratação do cimento. Neste estudo recorre-se a valores de Q_∞ retirados da literatura [2] e que se apresentam na tabela 2.2.

Tabela 2.2: Calor libertado a tempo infinito (Q_∞)

	Q_∞ (kJ/kg)
Tipos de Cimento	Q_∞
CA CEM I 52.5R	383.9
CA CEM I 42.5R	370.5
CA CEM II A L 42.5R	352.5
CA CEM II B L 32.5N	270.3
CA CEM IV 32.5N	296.4
CB CEM I 52.5R	394.6
CB CEM I 42.5R	358.3
CB CEM II AL 42.5R	333.9
CB CEM II B L 32.5N	303.5
CB CEM II B L 32.5R White	256.1

- Fonte de calor (\dot{Q})

A fonte de calor devido às reacções de hidratação será definido pela lei de Arrhenius [25],

$$\dot{Q} = A_T f(\alpha) \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right) \quad (2.18)$$

onde E_a é a energia de activação (J/mol), R é a constante universal dos gases ($J/mol.K^{-1}$), A_T é o valor máximo da produção de calor (J/s) e $f(\alpha)$ define a evolução da taxa de calor normalizada em função do grau de hidratação (α). A função $f(\alpha)$, bem como E_a e A_T são determinados experimentalmente.

Existem vários métodos experimentais para determinar as grandezas que constam da equação (2.18). Neste trabalho os valores são directamente retirados da bibliografia [2]. De

referir, por uma questão de coerência, que, na fonte utilizada, os valores são determinados através de dois processos cujas descrições podem ser encontradas em [24, 30]. Porém, na tabela 2.3 são apenas apresentados os valores que serão, efectivamente, utilizados para $f(\alpha)$, E_a e A_T .

A função de hidratação, $f(\alpha)$, é interpolada linearmente entre os valores medidos experimentalmente, como se mostra na figura 2.7.

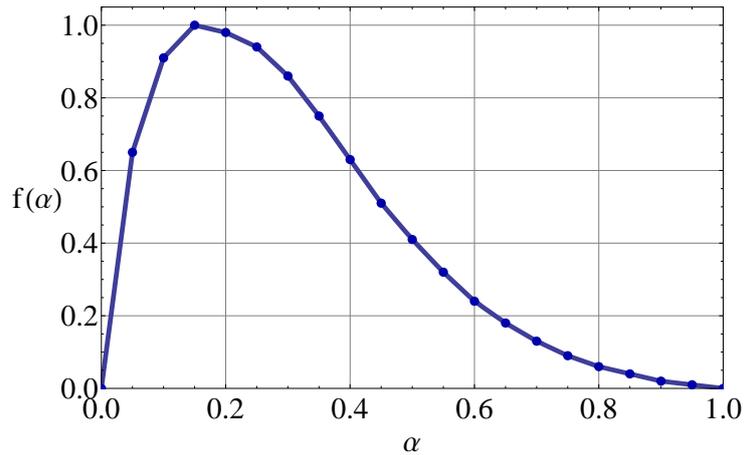


Figura 2.7: Função de hidratação, $f(\alpha)$ - CA CEM I 42.5R

A normalização da função de hidratação garante a condição,

$$f_{max} = 1 \quad (2.19)$$

e, em consequência da definição (2.17), a hidratação total é atingida para a condição $\alpha = 1$. É experimentalmente muito difícil determinar o valor inicial da função de hidratação, sendo usual admitir que $f(\alpha = 0) = 0$.

Olhando para a equação (2.18), conclui-se que se $f(\alpha)$ tomar o valor zero, então \dot{Q} será nulo. Isto é um problema que, conforme se verá adiante, aparece no cálculo na solução inicial pois, na tabela 2.3, verifica-se que $f(\alpha = 0) = 0$. A implicação imediata é uma libertação de calor nula no instante inicial. Caso não seja acautelada, esta situação não permite dar início à hidratação.

- Calor específico (ρc)

O calor específico do betão é, de acordo com [2], influenciado por vários factores, tais como: volume dos agregados, proporção água/cimento, tipo de agregados e temperatura. No entanto, verifica-se que este parâmetro tem sempre uma variação inferior a 10% no

intervalo $[5, 50]^{\circ}C$, que contém a esmagadora maioria dos possíveis casos de estudo. Assim, no presente trabalho, opta-se por desprezar a sua variação e utilizar valores médios encontrados na literatura.

Tabela 2.3: Parâmetros a utilizar na modelação numérica

	CA CEM I 42.5R	CA CEM I 52.5R	CA CEM II A L 42.5R	CA CEM II B L 32.5N	CA CEM IV 32.5N	CB CEM I 42.5R	CB CEM I 52.5R	CB CEM II AL 42.5R
A_T	2.150E+08	1.607E+09	3.553E+09	4.096E+09	7.807E+07	3.522E+08	1.374E+09	7.683E+07
E_a (kJ/mol)	43.83	48.19	51.02	52.10	41.84	44.38	47.40	41.30
Q_{∞} (kJ/kg)	355.2	386.3	327.4	296.2	279.5	370.3	414.0	343.1
a_T	$f(a_T)$	$f(a_T)$	$f(a_T)$	$f(a_T)$	$f(a_T)$	$f(a_T)$	$f(a_T)$	$f(a_T)$
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.05	0.65	0.62	0.75	0.83	0.62	0.58	0.53	0.68
0.10	0.91	0.88	0.95	0.99	0.85	0.85	0.83	0.92
0.15	1.00	0.99	1.00	0.99	0.98	0.98	0.99	1.00
0.20	0.98	1.00	0.97	0.95	0.99	1.00	0.98	0.98
0.25	0.94	1.00	0.96	0.87	0.92	1.00	0.89	0.91
0.30	0.86	0.95	0.90	0.83	0.82	0.94	0.76	0.82
0.35	0.75	0.85	0.78	0.77	0.72	0.83	0.57	0.74
0.40	0.63	0.70	0.66	0.68	0.58	0.69	0.39	0.64
0.45	0.51	0.56	0.56	0.59	0.41	0.55	0.24	0.52
0.50	0.41	0.45	0.46	0.51	0.27	0.41	0.17	0.41
0.55	0.32	0.36	0.34	0.42	0.19	0.30	0.16	0.31
0.60	0.24	0.28	0.25	0.30	0.15	0.22	0.14	0.24
0.65	0.18	0.23	0.20	0.21	0.12	0.17	0.11	0.18
0.70	0.13	0.18	0.16	0.16	0.10	0.13	0.08	0.14
0.75	0.09	0.13	0.12	0.12	0.08	0.10	0.06	0.10
0.80	0.06	0.08	0.08	0.08	0.05	0.07	0.04	0.07
0.85	0.04	0.04	0.04	0.04	0.03	0.04	0.03	0.04
0.90	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
0.95	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

2.5.4 Condições de Fronteira

Na secção 2.4 definem-se os tipos de fronteira possíveis. Agora é necessário traduzi-los matematicamente. Como nota prévia, convém referir que todos os modelos têm as suas limitações, pelo que implicam, necessariamente, algumas simplificações. Por forma a introduzir as condições fronteira o mais correctamente possível e para, posteriormente, se conseguir interpretar os resultados, é necessário compreender, além das equações, as simplificações subjacentes. Em seguida, apresentar-se-ão os três tipos de fronteira que serão utilizados: Neumann, Dirichlet e Robin.

1. Fronteira de Neumann

Na mecânica, a fronteira de Neumann (ou fronteira estática) define uma fronteira sujeita a uma força imposta, o que aqui corresponderá a um fluxo de calor definido. Fisicamente, representa a condução com o fluxo de calor imposto. Matematicamente, pode ser traduzida pela equação seguinte, em que n define a normal exterior unitária:

$$\mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma} = \bar{t} \quad (2.20)$$

Sempre que se considera o fluxo de calor igual a zero, está a admitir-se que não existem trocas de calor com o meio. Neste caso particular, a fronteira passa chamar-se adiabática.² Esta condição é muito utilizada para calibrar os ensaios e quando se estudam estruturas de grande porte. Dada a grande quantidade de betão, em estruturas como barragens, é legítimo admitir que não existe troca de calor com o meio [28].

2. Fronteira de Dirichlet

Na mecânica, a fronteira de Dirichlet (ou fronteira cinemática) define uma fronteira sujeita a um deslocamento imposto. Nesta aplicação corresponderá a uma fronteira com uma temperatura imposta. Esta condição é traduzida pela equação:

$$T = \bar{T} \quad (2.21)$$

3. Fronteira de Robin

Na mecânica, a fronteira de Robin (ou fronteira elástica) define uma fronteira em que as forças são proporcionais aos deslocamentos. Neste caso será uma condição que relaciona a temperatura e o fluxo de calor na fronteira. Fisicamente, pode definir todos os fenómenos apresentados. No entanto, no presente trabalho evita-se a sua utilização na condução, pois de acordo com [28], de um modo geral, a condução fica bem caracterizada utilizando

²Deriva da palavra grega *adiabatos* que significa impenetrável

apenas a fronteira de Neumann ou de Dirichlet, sendo esta formulação muito mais fiel no caso da convecção e radiação. Matematicamente, pode ser traduzida pela equação,

$$n^T \sigma = h_{cr}(T - T_a) \quad (2.22)$$

onde o coeficiente de convecção-radiação, h_{cr} , será dada por:

$$h_{cr} = h_c + h_r \quad (2.23)$$

Para o coeficiente de convecção, h_c , adoptou-se a expressão empírica, [25],

$$h_c = \begin{cases} 5.6 + 3.95v & \text{se } v \leq 5m/s \\ 7.6v^{0.78} & \text{se } v > 5m/s \end{cases} \quad (2.24)$$

onde $v(m/s)$ representa a velocidade do vento. O coeficiente de radiação, h_r , é dado por [25],

$$h_r = \begin{cases} \varepsilon[4.8 + 0.075(T_a - 278.15)] & \text{se } T_a \geq 278.15K \\ 4.8\varepsilon & \text{se } T_a < 278.15K \end{cases} \quad (2.25)$$

onde ε representa o coeficiente de emissividade, que varia no intervalo [0.85, 0.95].

Refira-se que as definições adoptadas para h_c e h_r foram escolhidas entre várias possíveis.

Faz-se notar que, nas condições definidas anteriormente, todas as variáveis variam no tempo.

Capítulo 3

Variação no Tempo

3.1 Introdução

Os problemas térmicos dependem do espaço e, à parte de situações muito específicas, também do tempo. Deste modo, qualquer modelo que almeje obter resultados correctos tem de integrar esta variável na sua formulação.

A abordagem a problemas cujas grandezas se vão alterando pode ser feita de várias formas, *e.g.*, separar as variáveis no tempo e no espaço:

$$v(x, t) = a(x).b(t) \quad (3.1)$$

No presente trabalho, optou-se por uma estratégia incremental, calculando as variações das grandezas e aplicando [25],

$$v(x, t) = v_0(x, t_0) + \delta v(x, \delta t) \quad (3.2)$$

onde v e v_0 representam a grandeza em estudo no instante t e no instante inicial, respectivamente; δt é o incremento de tempo e δv o incremento da grandeza.

A via seguida consiste em definir uma sequência incremental de problemas, aproximando numericamente as derivadas no tempo. Existem diferentes técnicas para definir as aproximações e o valor do incremento de tempo de modo a satisfazer determinadas critérios de estabilidade e convergência. Neste capítulo faz-se a apresentação da formulação incremental utilizada, começando pelas equações válidas no domínio do elemento, prosseguindo para as expressões válidas nos diferentes tipo de fronteira e continuando para a redefinição das expressões empíricas. Por fim, será explicado o processo de discretização no tempo, nomeadamente através dos métodos θ .

3.2 Formulação Incremental das Condições de Domínio

De forma a adoptar a formulação incremental será necessário reescrever algumas das equações previamente apresentadas no capítulo 2. Assumindo que todas as condições são satisfeitas no instante t_0 , utilizando a definição (3.2) e seguindo, uma vez mais, a forma usual em análise estrutural, obtém-se as seguintes descrições incrementais para a condição de compatibilidade,

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla\delta T \quad (3.3)$$

para a relação constitutiva,

$$\delta\boldsymbol{\sigma} = -k_0\delta\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{R}_k \quad (3.4)$$

onde,

$$\mathbf{R}_k = 0.33k_\infty(\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \delta\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (3.5)$$

e para a condição de equilíbrio:

$$-\nabla^T\delta\boldsymbol{\sigma} + Q_\infty\delta\dot{\alpha} = \rho c \delta\dot{T} \quad (3.6)$$

A obtenção das expressões (3.3) e (3.6) é imediata. No entanto, os passos seguidos até à equação (3.4) podem ser encontrados no apêndice A.

3.3 Formulação Incremental das Condições de Fronteira

De mesma forma, as equações referente às condições de fronteira podem ser reescritas em forma incremental, aplicando apenas a definição (3.2), encontrando-se as seguintes expressões para a condição de Neumann,

$$\mathbf{n}^T\delta\boldsymbol{\sigma} = \delta\bar{t} \quad (3.7)$$

de Dirichlet,

$$\delta T = \delta\bar{T} \quad (3.8)$$

e de Robin,

$$\mathbf{n}^T\delta\boldsymbol{\sigma} = h_0\delta T + R_{h0} \quad (3.9)$$

onde:

$$h_0 = h_{cr0} + \delta h_{cr} \quad (3.10)$$

$$R_{h0} = -h_{cr0}\delta T_a + \delta h_{cr}(T_0 - T_a) \quad (3.11)$$

O coeficiente δh_{cr} denota a variação da convecção e radiação e é dado por,

$$\delta h_{cr} = \delta h_c + \delta h_r \quad (3.12)$$

onde a variação do coeficiente de convecção (δh_c) é definida por,

$$\delta h_c = \begin{cases} 3.95\delta v & \text{se } v \leq 5m/s \\ 7.6(v_0 + \delta v)^{0.78} - 7.6v_0^{0.78} & \text{se } v > 5m/s \end{cases} \quad (3.13)$$

e a variação do coeficiente de radiação (δh_r) por:

$$\delta h_r = \begin{cases} 0.075\varepsilon\delta T_a & \text{se } T_a \geq 278.15K \\ 0 & \text{se } T_a < 278.15K \end{cases} \quad (3.14)$$

3.4 Fonte de Calor de Hidratação

Esta grandeza é definida pela lei de Arrhenius (2.18). No entanto, \dot{Q} será substituída, pela taxa do grau de hidratação (2.17),

$$Q_\infty \dot{\alpha} = A_T f(\alpha) \exp(-\beta(T)) \quad (3.15)$$

onde:

$$\beta(T) = \frac{E_a}{RT} \quad (3.16)$$

Será pois necessário definir a lei de Arrhenius, bem como as grandezas nela envolvidas, para a formulação incremental. Assume-se que a evolução da produção de calor normalizada é função do grau de hidratação, através da função $f(\alpha)$ definida por troços lineares, como se ilustra na figura 2.7:

$$f(\alpha) = f_0 + f'_0 \delta\alpha \quad (3.17)$$

Tomando esta hipótese e recorrendo ao Teorema de Taylor (ver apêndice B), a equação (3.15) pode, no caso geral, ser escrita na forma incremental, através de,

$$\delta\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0 \beta_0 \frac{\delta T}{T_0} + \dot{\alpha}_0 \frac{f'_0}{f_0} \delta\alpha + \dot{\alpha} \beta_0 R_\alpha \quad (3.18)$$

onde:

$$R_\alpha = \left(1 + \frac{f'_0}{f_0} \delta\alpha\right) R_e + \frac{f'_0}{f_0} \frac{\delta T}{T_0} \delta\alpha \quad (3.19)$$

$$R_e = -\left(\frac{\delta T}{T_0}\right)^2 \left[\left(1 - \frac{1}{2}\beta_0\right) - \left(1 - \beta_0 + \frac{1}{6}\beta_0^2\right) \frac{\delta T}{T_0} + \dots\right] \quad (3.20)$$

Os passos intermédios para a obtenção das equações (3.18) a (3.20) podem ser encontrados no apêndice C.

3.5 Discretização no Tempo

Existem inúmeros procedimentos que podem ser utilizados para proceder à discretização na dimensão tempo. Aqui utilizam-se os chamados métodos θ [31] que podem ser escritos, de forma geral,

$$v = v_0 + (1 - \theta)\delta t \dot{v}_0 + \theta \delta t \dot{v} \quad (3.21)$$

onde v representa a variável genérica, \dot{v}_0 e \dot{v} representam os valores da derivada no instante inicial (t_0) e no instante t , respectivamente, sendo θ o factor de integração. Podem ser atribuídos a θ diferentes valores dando origem a diferentes métodos, designadamente: o método de Euler progressivo ($\theta = 0$), o método de Euler regressivo ($\theta = 1$) e o método de Crank-Nicholson ($\theta = 0.5$).

A forma incremental dos método θ ,

$$\theta \delta t \delta \dot{v} = \delta v - \delta t \dot{v}_0 \quad (3.22)$$

cuja dedução pode ser encontrada no apêndice D, é usada para obter a discretização no tempo da condição de equilíbrio térmico (3.6),

$$-\theta \delta t \nabla^T \delta \boldsymbol{\sigma} + Q_\infty \delta \alpha = \rho c \delta T + R_{e0} \text{ em } V \quad (3.23)$$

onde:

$$R_{e0} = \delta t (Q_\infty \dot{\alpha}_0 - \rho c \dot{T}_0) \quad (3.24)$$

Da mesma forma, (3.22) pode ser utilizada na definição (3.18), ficando,

$$\delta \alpha = A_{T0} \delta T + R_{\alpha 0} + A_{\alpha 0} R_\alpha \quad (3.25)$$

onde:

$$A_{T0} = \frac{A_{\alpha 0}}{T_0} \quad (3.26)$$

$$A_{\alpha 0} = \frac{f_0 \beta_0 \theta \delta t \dot{\alpha}_0}{f_0 - f'_0 \theta \delta t \dot{\alpha}_0} \quad (3.27)$$

$$R_{\alpha 0} = \frac{1}{\theta \beta_0} \quad (3.28)$$

Os passos intermédios para a obtenção das equações (3.25) a (3.28) encontram-se no apêndice E.

Capítulo 4

Elementos Finitos

4.1 Introdução

Estando o modelo definido, importa agora escolher a abordagem a seguir na sua resolução. Uma vez que não é possível impor de forma forte todas as condições, o leque de caminhos possíveis reduz-se substancialmente, ficando limitado aos métodos numéricos.

A maioria dos problemas tratados pela engenharia civil não têm solução analítica, pelo que a situação não é nova. Daí resulta a importância de dispor de um método que permita obter soluções aproximadas para os problemas às derivadas parciais, lineares ou não lineares, que caracterizam todos os modelos de análise estrutural. Esse método deve ser geral, aplicável a todos os modelos estruturais, ser relativamente fácil de aplicar e produzir soluções com os níveis de precisão exigidos pelos critérios de dimensionamento.

Existem vários métodos que permitem a obtenção de soluções aproximadas e, dentro de cada método, várias técnicas para a formulação do problema. No presente trabalho, adopta-se o método dos elementos finitos, que é o mais popular na resolução de problemas ligados à análise estrutural. Este método surgiu quando foi proposto um conceito que consistia em discretizar o domínio da estrutura (originando os elementos finitos) e aproximar em cada uma dessas partes algumas das variáveis em estudo [32]. O que distingue as diferentes formulações do método são as variáveis que se escolhe para aproximar directamente e a forma como se impõem, não só as condições no interior de cada elemento (equilíbrio, compatibilidade e elasticidade), mas também as condições utilizadas para reunir os elementos e recuperar a continuidade da estrutura e dos campos que se pretende obter.

Os métodos numéricos têm a desvantagem de, em certa medida, deixar de ser facilmente identificável o significado físico das variáveis do problema e, em geral, também deixa de ser

imediate a interpretação física das equações resolventes que se obtêm. No entanto, neste caso, esta é a única alternativa possível.

Neste capítulo começa-se por fazer uma breve introdução ao método dos elementos finitos e ao modo como são reunidas as equações elementares. Posteriormente, apresenta-se a formulação adoptada e várias formas diferentes de a obter e fala-se das funções de aproximação utilizadas. Por fim, apresentam-se alguns aspectos numéricos necessários à implementação do método. Muitos dos pontos agora abordados podem ser encontrados em [25].

4.2 Método dos Elementos Finitos

Aborda-se o problema térmico recorrendo a elementos convencionais que permitem aproximar directamente apenas um campo: neste caso, aproximou-se o campo de temperaturas. Após a aproximação directa do campo de temperaturas, segue-se a compatibilidade, relações constitutivas e equilíbrio até chegar ao campo do fluxo de calor, o caminho que foi apresentado na figura 2.6. A continuidade entre elementos será imposta através das incidências habituais em termos de temperatura, recorrendo ao conceito de tabela de incidências, garantindo a continuidade do campo aproximado, mas não necessariamente das suas derivadas.

É habitual aproximar directamente os deslocamentos ou, neste caso, as temperaturas, por ser sempre mais fácil definir uma solução cinematicamente admissível do que uma solução equilibrada. A admissibilidade cinemática é satisfeita utilizando funções contínuas e escrevendo-as de maneira a ser fácil impor as condições de compatibilidade na fronteira.

O método dos elementos finitos pode, resumidamente, ser dividido nos oito passos que se apresentam:

1. Discretização da estrutura;
2. Identificação dos deslocamentos independentes;
3. Definição das funções de aproximação;
4. Equações elementares:
 - 4.1. Matriz de rigidez elementar;
 - 4.2. Vector das forças nodais equivalentes.
5. Reunião das equações elementares:
 - 5.1. Matriz de rigidez da estrutura;
 - 5.2. Vector das forças nodais equivalentes.

6. Resolução da equação do Método dos Elementos Finitos;
7. Análise crítica dos resultados;
8. Verificação do equilíbrio.

4.3 Discretização no Espaço

Nesta secção é apresentada a formulação dos elementos a utilizar para resolver o problema da modelação da resposta térmica do betão na sua fase inicial. Antes de prosseguir, para apoiar a dedução das equações a utilizar num elemento típico de domínio V , convém atentar nas equações que são necessárias, a saber: equação de compatibilidade (3.3), relação constitutiva (3.4) e condição de equilíbrio (3.23). Será ainda necessário ter presente a forma incremental da lei de Arrhenius (3.25).

Admite-se que o domínio unidimensional foi discretizado em elementos, como se observa na figura 4.1, e considera-se um elemento genérico, como se indica.

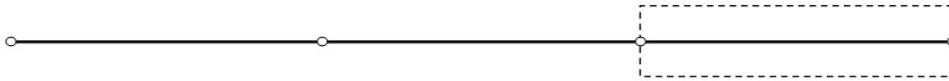


Figura 4.1: Discretização de um domínio genérico em elementos

O elemento convencional é deduzido aproximando o campo de temperaturas no domínio do elemento, V^e ,

$$T(x) = \boldsymbol{\psi} \mathbf{T} \text{ em } V^e \quad (4.1)$$

onde \mathbf{T} é o vector dos valores nodais da temperatura e $\boldsymbol{\psi}$ é o vector-linha que contém as funções de interpolação adiante definidas. Estas funções tomam o valor um no nó a interpolar e zero nos restantes,

$$\psi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (4.2)$$

sendo a sua soma é igual à unidade:

$$\sum_i \psi_i = 1 \quad (4.3)$$

Assume-se, ainda, que o gradiente de temperatura é imposto localmente,

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \mathbf{B} \mathbf{T} \text{ em } V^e \quad (4.4)$$

onde:

$$\mathbf{B} = \nabla \boldsymbol{\psi} \quad (4.5)$$

Existem quatro tipos de fronteira, nomeadamente a fronteira entre elementos, Γ_i^e , e aquelas que já foram apresentadas: Neumann (3.7), Dirichlet(3.8) e Robin(3.9). Ou seja, pela mesma ordem:

$$\Gamma^e = \Gamma_i^e \cup \Gamma_\sigma^e \cup \Gamma_T^e \cup \Gamma_q^e \quad (4.6)$$

A continuidade entre elementos será assegurada através do campo de temperaturas,

$$\delta T = \delta T_i \text{ em } \Gamma_{\Gamma_i}^e \quad (4.7)$$

onde δT_i representa o campo de temperatura na fronteira inter-elementar ou na fronteira de Dirichlet do elemento.

4.3.1 Método dos Resíduos Ponderados

Podem ser utilizadas várias técnicas para obter as equações dos elementos mas, no presente documento será utilizada a versão Galerkin do método dos resíduos ponderados, que pode ser sumariada nos seguintes passos:

1. As funções de aproximação da temperatura são utilizadas para impor em média a condição de equilíbrio térmico:

$$\int \boldsymbol{\psi}^T (\theta \delta t \nabla^T \delta \boldsymbol{\sigma} - Q_\infty \delta \alpha + \rho c \delta T + R_{e0}) dV^e = \mathbf{0} \quad (4.8)$$

2. O primeiro termo é integrado por partes, de forma a obter explicitamente, um termo para impor as condições de fronteira¹:

$$-\theta \delta t \int (\nabla \boldsymbol{\psi})^T \delta \boldsymbol{\sigma} dV^e + \theta \delta t \int \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{n}^T \delta \boldsymbol{\sigma} d\Gamma^e - \int \boldsymbol{\psi}^T (Q_\infty \delta \alpha - \rho c \delta T - R_{e0}) dV^e = \mathbf{0} \quad (4.9)$$

3. As condições (3.3) e (3.4) são impostas, obtendo a definição da matriz de rigidez do elemento, \mathbf{K} , e o termo residual associado à relação constitutiva, \mathbf{R}_k :

$$\theta \delta t (\mathbf{K} \delta T - \mathbf{R}_k) + \theta \delta t \int \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{n}^T \delta \boldsymbol{\sigma} d\Gamma^e - \int \boldsymbol{\psi}^T (Q_\infty \delta \alpha - \rho c \delta T - R_{e0}) dV^e = \mathbf{0} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{B}^T k_0 \mathbf{B} dV^e \quad (4.11)$$

$$\mathbf{R}_k = \int \mathbf{B}^T \mathbf{R}_k dV^e \quad (4.12)$$

¹ $\int_a^b f g' dx = - \int_a^b f' g dx + [fg]_a^b$

4. A aproximação (4.1) é também imposta, obtendo-se a definição da matriz do calor específico, \mathbf{H} , e o termo de equilíbrio residual, $\bar{\mathbf{R}}_{e0}$:

$$(\theta\delta t \mathbf{K} + \mathbf{H})\delta T + (\bar{\mathbf{R}}_{e0} - \theta\delta t \bar{\mathbf{R}}_k) + \theta\delta t \int \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{n}^T \delta \boldsymbol{\sigma} d\Gamma^e - \int \boldsymbol{\psi}^T Q_\infty \delta \alpha dV^e = \mathbf{0} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{H} = \int \boldsymbol{\psi}^T \rho c \boldsymbol{\psi} dV^e \quad (4.14)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_{e0} = \int \boldsymbol{\psi}^T R_{e0} dV^e \quad (4.15)$$

5. O termo de fronteira é separado de forma a impor as condições (3.7) e (3.9), obtendo-se a definição da matriz de convecção-radiação, \mathbf{C} , o vector de fluxo de calor, \mathbf{Q}_σ , o vector nodal equivalente de calor, \mathbf{Q}_i , e os resíduos associados:

$$[\theta\delta t (\mathbf{K} + \mathbf{C}) + \mathbf{H}] \delta T + [\theta\delta t (\bar{\mathbf{R}}_{h0} - \bar{\mathbf{R}}_k) + \bar{\mathbf{R}}_{e0}] + \theta\delta t (\mathbf{Q}_\sigma + \mathbf{Q}_i) - \int \boldsymbol{\psi}^T Q_\infty \delta \alpha dV^e = \mathbf{0} \quad (4.16)$$

$$\mathbf{C} = \int \boldsymbol{\psi}^T h_0 \boldsymbol{\psi} d\Gamma_q^e \quad (4.17)$$

$$\mathbf{Q}_\sigma = \int \boldsymbol{\psi}^T \delta \bar{t} d\Gamma_\sigma^e \quad (4.18)$$

$$\mathbf{Q}_i = \int \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{n}^T \delta \boldsymbol{\sigma} d\Gamma_{\Gamma_i}^e \quad (4.19)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_{h0} = \int \boldsymbol{\psi}^T R_{h0} d\Gamma_q^e \quad (4.20)$$

6. É inserida a lei de Arrhenius (3.25), obtendo-se a definição da matriz de hidratação, \mathbf{A} , e o termo residual associado:

$$[\theta\delta t (\mathbf{K} + \mathbf{C}) + \mathbf{H} - \mathbf{A}]\delta T + [\theta\delta t (\bar{\mathbf{R}}_{h0} - \bar{\mathbf{R}}_k) + \bar{\mathbf{R}}_{e0} - \bar{\mathbf{R}}_{\alpha 0} - \bar{\mathbf{R}}_\alpha] + \theta\delta t (\mathbf{Q}_\sigma + \mathbf{Q}_i) = \mathbf{0} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{A} = \int \boldsymbol{\psi}^T Q_\infty A_{T0} \boldsymbol{\psi} dV^e \quad (4.22)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_{\alpha 0} = \int \boldsymbol{\psi}^T Q_\infty R_{\alpha 0} dV^e \quad (4.23)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_\alpha = \int \boldsymbol{\psi}^T Q_\infty A_{\alpha 0} R_\alpha dV^e \quad (4.24)$$

4.3.2 Balanço Energético

As mesmas equações podem ser obtidas fazendo o balanço energético do sistema. Assim, utilizando a convenção da mecânica, o trabalho das forças interiores é dado por,

$$W_i = \int \varepsilon^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int u^T K_d \dot{u} dV \quad (4.25)$$

onde, ε e σ representam o campo de deformações e de tensões, respectivamente, u simboliza o campo de deslocamentos e K_d é o coeficiente de amortecimento. O trabalho das forças exteriores tem a seguinte expressão,

$$W_e = \int \mathbf{u}^T \mathbf{p} d\Gamma + \int \mathbf{u}^T \mathbf{F} dV \quad (4.26)$$

em que p representa as forças aplicadas na fronteira e F o campo de forças de massa.

Utilizando as mesmas expressões, mas alterando as grandezas para o problema térmico (como feito anteriormente), tem-se,

$$W_i = - \int \varepsilon^T \sigma dV + \int T \rho c \dot{T} dV \quad (4.27)$$

$$W_e = - \int T \mathbf{n}^T \sigma d\Gamma + \int T \dot{Q} dV \quad (4.28)$$

para o trabalho das forças interiores e exteriores, respectivamente.

Introduzindo a lei de Fourier (2.3) e a definição (2.15) do gradiente térmico obtém-se,

$$W_i = \int (\nabla T)^T k \nabla T dV + \int T \rho c \dot{T} dV \quad (4.29)$$

ou, para as aproximações da temperatura (4.1) e do seu gradiente (4.5):

$$W_i = \mathbf{T}^T \int \mathbf{B}^T k \mathbf{B} dV \mathbf{T} + \mathbf{T}^T \int \psi^T \rho c \psi dV \dot{\mathbf{T}} \quad (4.30)$$

Para a mesma aproximação, a definição (4.28) para o trabalho das forças exteriores tem a seguinte expressão:

$$W_e = -\mathbf{T}^T \int \psi^T \mathbf{n}^T \sigma d\Gamma + \mathbf{T}^T \int \psi^T \dot{Q} dV \quad (4.31)$$

Igualando as definições (4.30) e (4.31), para qualquer aproximação da temperatura, e usando as definições (4.11) e (4.14) para o instante t , obtém-se:

$$\mathbf{K}\mathbf{T} + \mathbf{H}\dot{\mathbf{T}} = - \int \psi^T \mathbf{n}^T \sigma d\Gamma + \int \psi^T \dot{Q} dV \quad (4.32)$$

Desenvolvendo o termo de fronteira, de acordo com as definições (4.6) e (4.7), obtém-se,

$$\mathbf{K}\mathbf{T} + \mathbf{H}\dot{\mathbf{T}} = - \int \psi^T \mathbf{n}^T \sigma d\Gamma_\sigma^e - \int \psi^T \mathbf{n}^T \sigma d\Gamma_q - \int \psi^T \mathbf{n}^T \sigma d\Gamma_{\Gamma_i} + \int \psi^T \dot{Q} dV \quad (4.33)$$

ou, depois de impor as condições (2.20), (2.21) e (2.22),

$$\mathbf{K}\mathbf{T} + \mathbf{H}\dot{\mathbf{T}} = -\mathbf{Q}_\sigma - \mathbf{Q}_i - \int \psi^T h_{cr} (T - T_a) d\Gamma_q + \int \psi^T \dot{Q} dV \quad (4.34)$$

em que as definições (4.18) e (4.19) são aplicáveis para as variáveis totais, t e σ , respectivamente.

Introduzindo a aproximação da temperatura no termo de convecção-radiação, obtém-se o resultado,

$$(\mathbf{K} + \mathbf{C})\mathbf{T} + \mathbf{H}\dot{\mathbf{T}} = -\mathbf{Q}_\sigma - \mathbf{Q}_i + \int \psi^T h_{cr} T_a d\Gamma_q + \int \psi^T \dot{Q} dV \quad (4.35)$$

em que se aplica a definição (4.17) para a matriz de convecção-radiação, calculada no instant t .

O resultado (4.21) é recuperado tomando a forma incremental da equação (4.35) e impondo a aproximação no tempo definida pela equação (3.22).

Utilizando qualquer uma das vias apresentadas, a forma final e compacta do sistema resolvente é a seguinte:

$$\mathbf{S}_{TT}\delta\mathbf{T} = \mathbf{R}_T - \theta\delta t (\mathbf{Q}_\sigma + \mathbf{Q}_i) \quad (4.36)$$

$$\mathbf{S}_{TT} = \mathbf{H} - \mathbf{A} + \theta\delta t (\mathbf{K} + \mathbf{C}) \quad (4.37)$$

$$\mathbf{R}_T = \bar{\mathbf{R}}_{\alpha 0} + \bar{\mathbf{R}}_\alpha - \bar{\mathbf{R}}_{e0} - \theta\delta t (\bar{\mathbf{R}}_{h0} - \bar{\mathbf{R}}_k) \quad (4.38)$$

4.4 Assemblagem do Sistema

Após o cálculo separado dos vários termos elementares, é necessário proceder à assemblagem das matrizes e vectores que compõem o sistema. Assim, é necessário saber, de forma inequívoca, qual a correspondência entre a numeração local (dentro dos elementos) e global (na estrutura) dos nós. A maneira habitualmente utilizada para guardar esta informação é através da tabela de incidências.

Considerando as matrizes e vectores globais, o sistema resolvente continua a ser dado por (4.36).

4.4.1 Tabela de Incidências

De forma a ser possível a sua implementação computacional, importa clarificar o conceito de tabela de incidências. Esta tabela permite guardar, sob a forma de uma matriz, a informação necessária à assemblagem do sistema. Intuitivamente esta matriz pode ser vista como uma espécie de ábaco de duas entradas onde, na horizontal, entra a informação relativa ao número dos elementos e , na vertical, a numeração local dos nós, conforme se pode ver na figura 4.2.

		Número do nó no elemento		
			↓	
		1	...	$N_{\text{nós}}$
Número do elemento ⇒	1			
	...			
	$N_{\text{elementos}}$			

Figura 4.2: Tabela de incidências

Faz-se notar que não é necessário guardar de forma explícita a matriz de incidências.

4.5 Solução Inicial

Para poder prosseguir é necessário definir as condições iniciais do problema. Por definição, as equações básicas são válidas em qualquer instante, conseqüentemente, também o são no instante inicial. Assim, utilizando o método de Galerkin, a obtenção da solução inicial pode ser sumarizada nos seguintes passos:

1. As funções de aproximação da temperatura são utilizadas para impor em média a condição de equilíbrio térmico (2.10):

$$-\int \boldsymbol{\psi}^T (\nabla \boldsymbol{\sigma}_0 + \dot{Q}_0) dV = \int \boldsymbol{\psi}^T \rho c \dot{T}_0 dV \quad (4.39)$$

2. O primeiro termo é integrado por partes de forma a obter, de forma explícita, o termo associado às condições de fronteira:

$$\int \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dV - \int \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Gamma - \int \boldsymbol{\psi}^T \dot{Q}_0 dV = \int \boldsymbol{\psi} \rho c \dot{T}_0 dV \quad (4.40)$$

3. As condições (2.3) e (2.15) são impostas por forma a obter a matriz de rigidez do elemento, obtendo-se o seguinte resultado depois de expandir o termo de fronteira:

$$\begin{aligned} & - \int \mathbf{B}^T k_0 \mathbf{B} dV T_0 - \int \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Gamma_\sigma - \int \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Gamma_q - \\ & - \int \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Gamma_i - \int \boldsymbol{\psi}^T \dot{Q}_0 dV = \int \boldsymbol{\psi}^T \rho c \boldsymbol{\psi} \dot{T}_0 dV \end{aligned} \quad (4.41)$$

4. Introduzindo as definições (4.11), (4.17) e (4.14), obtém-se o sistema,

$$-(\mathbf{K} + \mathbf{C}) \mathbf{T}_0 = \mathbf{Q}_\sigma + \mathbf{Q}_i - \overline{R}h_0 + \int \boldsymbol{\psi}^T \dot{Q}_0 dV + \mathbf{H}\dot{\mathbf{T}}_0 \quad (4.42)$$

onde:

$$\mathbf{Q}_\sigma \llcorner \int \boldsymbol{\psi}^T \bar{t}_0 d\Gamma_\sigma \quad (4.43)$$

$$\overline{R}h_0 \llcorner \int \boldsymbol{\psi}^T h_0 T_{a0} d\Gamma_q \quad (4.44)$$

$$\int \boldsymbol{\psi}^T \dot{Q}_0 dV = \int \boldsymbol{\psi}^T A_T f(\alpha) \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right) dV \quad (4.45)$$

Olhando para o sistema (4.42), verifica-se que será necessário fornecer uma primeira estimativa para a T ou para \dot{T} , por forma a dar início ao cálculo: é esse o sentido da condição inicial. É imperativo recorrer à condição inicial de temperatura prescrita, quando se pretende realizar um teste adiabático, uma vez que, neste caso, \dot{T} é nulo. Neste caso, para a temperatura inicial deverá ser prescrito o valor medido aquando da betonagem. Prescrever um valor para \dot{T} é a

condição inicial mais corrente, uma vez que se aplica à generalidade das situações. Neste caso, dada a dificuldade em arbitrar valores precisos para este parâmetro, opta-se por assumir que na solução inicial o seu valor é suficientemente pequeno para poder ser tomado como zero, embora tal seja apenas uma aproximação para iniciar o processo.

4.5.1 Hidratação

O início do processo de hidratação não é ainda claro, sendo por isso matéria de investigação.² Actualmente, pensa-se que existe uma libertação inicial de calor, o que implica $f(\alpha = 0) = \varepsilon$, com $\varepsilon > 0$. Todavia, nos resultados experimentais disponibilizados (tabela 2.3) tal não é considerado.

Matematicamente, caso se considere nula a libertação de calor inicial, $f(\alpha = 0) = 0$, o sistema (4.42) torna-se indeterminando e o processo de hidratação não é iniciado. Para contornar este problema, alguns autores arbitram um valor para $f(\alpha = 0)$ diferente de zero [33]. No entanto, para resolver o problema, considerando como nula a libertação inicial de calor, basta arbitrar para o grau de hidratação um valor suficientemente próximo da origem, cuja finalidade é unicamente dar início ao processo iterativo. Esta alternativa é conhecida como *push over* e é utilizada, por exemplo, no *software* DIANA [34].

O programa agora criado permite as duas alternativas. No caso do *push over* permite ainda escolher o grau de hidratação que se pretende arbitrar para o início do processo. Assim, sempre que se opte pela segunda via, recomenda-se a adopção de valores bastante pequenos (na ordem de 10^{-6}), uma vez que tal é praticamente imperceptível no tempo gasto pelo programa.

Por uma questão de coerência, sempre que são feitas comparações com outros trabalhos, opta-se por seguir a via ali escolhida.

4.6 Funções de Aproximação

O vector ψ e a matriz B que tomam a forma genérica,

$$\boldsymbol{\psi} = [\psi_1 \psi_2 \dots \psi_N] \quad (4.46)$$

$$\mathbf{B} = [\nabla \psi_1 \nabla \psi_2 \dots \nabla \psi_N] \quad (4.47)$$

são obtidos através das funções de aproximação e da sua derivada. O número de entradas depende directamente do grau de aproximação, sendo sempre uma unidade superior a esse grau.

As funções de aproximação a utilizar podem ser de vários tipos, nomeadamente polinómios de Legendre, funções de Chebychev ou polinómios de Lagrange. Os polinómios de Legendre têm

²Neste momento, no IST, está a decorrer um trabalho de doutoramento sobre o assunto

a grande vantagem de serem ortogonais entre si (ver figura 4.3),

$$\int_{-1}^1 P_i P_j d\varepsilon = \begin{cases} \frac{2}{1+2i} & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (4.48)$$

o que faz com que muitos termos do sistema se anulem. Consequentemente, pode ser poupado espaço de armazenamento, recorrendo a matrizes esparsas respeitando apenas os coeficientes não nulos. As funções de Chebychev são mais estáveis para graus de aproximação elevados, mas não são ortogonais, pelo que ambos têm o seu espaço de aplicação.

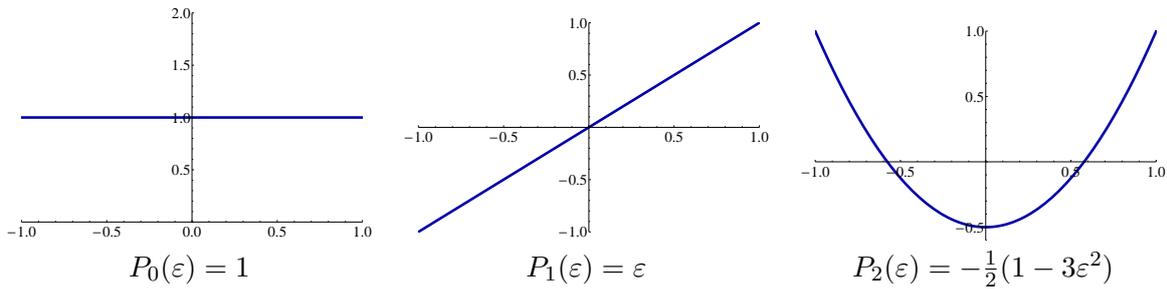


Figura 4.3: Polinómios de Legendre

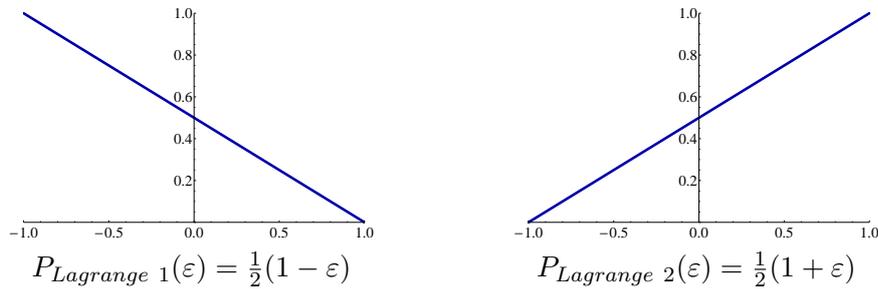


Figura 4.4: Polinómios de Lagrange de 1º grau

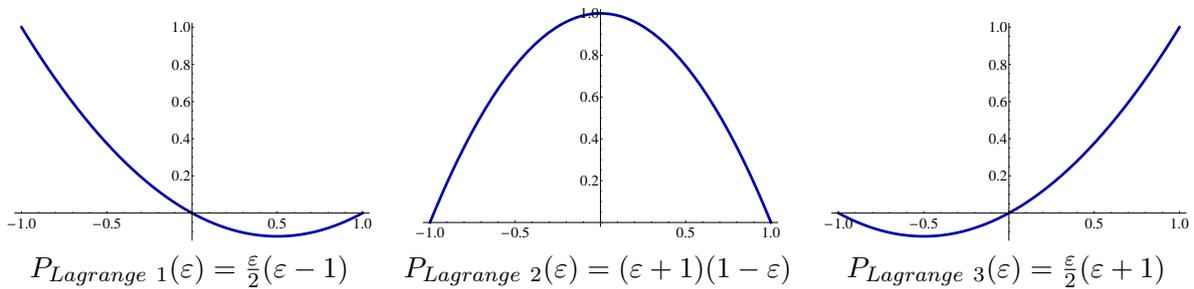


Figura 4.5: Polinómios de Lagrange de 2º grau

Os polinómios de Lagrange são os mais intuitivos, uma vez que são obtidos directamente através do produto das várias rectas que tomam o valor zero em todos os nós em que se pretende que a função se anule. Existe ainda um coeficiente que serve apenas para se obter o valor unitário

no único nó em que se pretende que a função seja diferente de zero. Prova-se [31] que o polinómio interpolador é único. Os polinómios de Lagrange,

$$P_{Lagrange}(x, grau, k) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{grau+1} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} \quad (4.49)$$

são a única opção para implementar a formulação convencional do método dos elementos finitos em problemas unidimensionais.

O gradiente, no caso de problemas unidimensionais, simplifica, ficando $\nabla = \partial x$. Assim, o vector B será composto pela derivada em x dos polinómios de Lagrange previamente apresentados,

$$\frac{d}{dx} P_{Lagrange}(x, grau, k) = \frac{d}{dx} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{grau+1} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} \quad (4.50)$$

ou, de forma a ser programável:

$$\frac{d}{dx} P_{Lagrange}(x, grau, k) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{grau+1} -x_i \left[\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{grau+1} \frac{1}{(x_k - x_j)} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k \\ j \neq i}}^{grau+1} (x - x_j) \right) \right] \quad (4.51)$$

4.7 Aspectos Numéricos

Existe uma tendência natural para desvalorizar (ou encobrir de forma expedita) os problemas numéricos até ao ponto em que se tornam insustentáveis. Existem, no entanto, casos de pequenos erros que resultaram em perda de vidas humanas e que mostram as proporções que um simples erro de arredondamento pode tomar, como se pode ver no exemplo seguinte:

”A 25 de Fevereiro de 1991, durante a guerra do Golfo, uma bateria de mísseis Patriot Americana em Dharan, Arábia Saudita, faliu a interceptação de um míssil Scud Iraquiano. O Scud atingiu assim um quartel Americano, matando 28 soldados e ferindo cerca de 100 pessoas. A falha que causou este incidente deveu-se, em última instância, a erros de arredondamento.” [35]

Tendo em mente situações como a apresentada, tomaram-se algumas precauções no sentido de eliminar ou, pelo menos, mitigar eventuais erros numéricos. Apresentam-se, assim, nesta secção as técnicas utilizadas. Aproveita-se ainda para esclarecer o método numérico de integração utilizado e a forma com as não linearidades são tratadas. Por fim, são apresentados os critérios de convergência dos métodos θ que foram utilizados para fazer a integração no tempo.

4.7.1 Escalas

De acordo com [36], para melhorar a estabilidade numérica e aumentar a velocidade de convergência, o sistema deve ser implementado e resolvido em forma adimensional, utilizando para tal um critério que garanta que as grandezas têm uma grandeza da ordem da unidade.

Deste modo, definiu-se um sistema que permitisse escalar todas as grandezas envolvidas nos cálculos. As escalas básicas são o comprimento, L_s (a definir pelo utilizador), a temperatura, T_s (a definir pelo utilizador), o calor total, $Q_s = Q_\infty$, e a condutividade térmica esperada após a conclusão das reacções de hidratação do cimento, $K_s = K_\infty$.

É necessário um segundo conjunto de escalas que garanta a coerência do problema térmico: o gradiente de temperatura, $\varepsilon_s = T_s/L_s$; a velocidade do fluxo de calor, $\sigma_s = k_s\varepsilon_s$; o tempo, $t_s = Q_sL_s/\sigma_s$; o calor específico, $(\rho c)_s = L_s/T_s$; o coeficiente de convecção-radiação, $h_s = k_s/L_s$. O termo exponencial da lei de Arrhenius deve ser estabilizado, sendo o valor de escala usado para o valor máximo da taxa de produção de calor,

$$A_{T_s} = \exp(\beta_s)Q_s/t_s \quad (4.52)$$

onde:

$$\beta_s = \frac{E_a}{RT_s} \quad (4.53)$$

Todas as variáveis e parâmetros foram escalados, de acordo com a regra geral,

$$v = v_s\hat{v} \quad (4.54)$$

onde v_s representa o factor de escala e \hat{v} o valor adimensional da variável v . A maioria das equações já definidas são escaladas através da substituição directa das grandezas, v , pelo seu valor escalado, \hat{v} . As equações mantêm as expressões anteriormente definidas, sendo, no entanto, necessário substituir o termo $\exp[\beta(T)]$ por $\exp[\beta(T) - \beta_s]$ na lei de Arrhenius (3.15),

$$\exp[\beta(T)] \llcorner \exp[\beta(T) - \beta_s] = \exp[\beta(T)(1 - \hat{T})]$$

A forma escalada da lei de Arrhenius (3.15) fica:

$$\hat{Q}_\infty\hat{\alpha} = \hat{A}_T f(\alpha)\exp[\beta(\hat{T} - 1)] \quad (4.55)$$

4.7.2 Método de Integração de Gauss

Muitos dos integrais que é necessário calcular no âmbito da aplicação do método dos elementos finitos não são triviais pois, ou a primitiva da função integranda não tem expressão analítica, ou é demasiado complicada para viabilizar a sua utilização prática. Por este motivo, é essencial

recorrer a técnicas de integração numérica que também recebem a designação de regras de quadratura.

Existem vários métodos de integração numérica, como se pode constatar em [31]. Neste trabalho utiliza-se sempre a quadratura de Gauss,

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_1^n W_i f(P_i) \quad (4.56)$$

onde n representa o número de pontos de Gauss, fazendo a mudança de coordenadas para o intervalo $[-1, 1]$ para evitar recalculer os pontos, P_i , e pesos de Gauss, W_i , em cada integração. A dedução para um polinómio de grau 5 encontra-se no apêndice F. Esta regra permite integrar exactamente polinómios de grau $2n - 1$. No entanto, uma vez que não se está a integrar polinómios, devido à presença de termos não lineares, foi necessário acrescentar uma margem a esta regra por forma a obter bons resultados [37].

4.7.3 Mudança de Coordenadas

Para realizar todas as integrações no mesmo intervalo é necessário proceder a uma mudança de coordenadas, passando das coordenadas genéricas de cada elemento (ver figura 4.6) para coordenadas fixas e pré-definidas. Neste caso utiliza-se o intervalo $[-1, 1]$. Convencionando x_A como a primeira coordenada de um elemento genérico e x_B como a última, $L = x_B - x_A$ define o comprimento do elemento, tomando para transformação de coordenadas a seguinte expressão:

$$\varepsilon = \frac{2x}{L} - 1 \quad \text{com } -1 \leq \varepsilon \leq 1 \quad (4.57)$$



Figura 4.6: Mudança de coordenadas

4.7.4 Método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson é um algoritmo que permite resolver iterativamente equações (ou sistemas) não lineares. Concretizando para o caso das estruturas, este método caracteriza-se por [38],

$$F(d_i) = k(d_0)d_{i+1} \quad (4.58)$$

onde F representa as forças aplicadas, k a matriz de rigidez e d o deslocamento. É necessário escolher um valor inicial, d_0 , e dar início ao processo iterativo. É importante escolher com cuidado a estimativa inicial pois, caso contrário, pode contribuir para a não convergência do algoritmo. O método de Newton-Raphson tem a particularidade de recalculer em cada incremento a matriz de rigidez, k .

Este método não é estritamente convergente, independentemente da função. De forma sucinta, é preciso verificar se a primeira derivada da função é bem comportada, *i.e.*, é necessário assegurar que a função não apresenta os fenômenos apelidados de *snap-trough* e *snap-back*. Na figura 4.7 apresentam-se os fenômenos referidos e o caminho seguido por este método nessas situações.

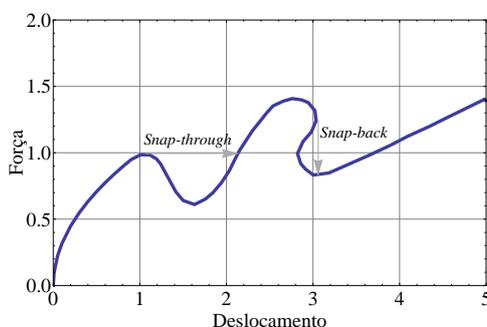


Figura 4.7: *Snap-trough* e *snap-back*

4.7.5 Convergência dos métodos θ

Antes de mais, os métodos θ apenas são aplicáveis a funções lipschitzianas, ou seja,

$$|f| \leq L \quad (4.59)$$

sendo L uma constante. Assim, para garantir a convergência destes métodos é necessário respeitar a condição,

$$\delta t < \frac{1}{\theta L} \quad (4.60)$$

onde δt representa o passo de integração no tempo.

Aquilo que se verifica é que o passo de integração no tempo depende do tipo de ensaio. No entanto, em geral, passos inferiores a trinta minutos fornecem boas soluções.

Capítulo 5

Modelo Numérico

5.1 Introdução

O objectivo deste capítulo é clarificar o funcionamento do programa desenvolvido, explicando como deve ser utilizado adequadamente. Deste modo, pretende-se que seja possível a qualquer pessoa a utilização do programa de forma fácil e eficaz, sem perdas de tempo excessivas no processo de aprendizagem, mas obtendo os resultados pretendidos.

É, ainda, importante que o funcionamento do algoritmo implementado fique claro, de forma a possibilitar um controlo efectivo dos resultados. Pretende-se, por isso, que esta parte do trabalho possa, posteriormente, ser utilizada como um manual do utilizador, fazendo a ponte entre a formulação teórica, os detalhes do funcionamento interno e os aspectos práticos da utilização do programa.

Neste capítulo principia-se por clarificar o conceito genérico de algoritmo, explica-se o funcionamento interno do programa e introduzem-se os aspectos práticos da utilização do *software*.

5.2 Algoritmo

De modo genérico, um algoritmo pode ser visto como uma *receita* para executar bem uma tarefa, independentemente do operador. Dito de outra forma, um algoritmo pode ser considerado como uma sequência de passos que, em teoria, dispensa a imaginação e inspiração de quem os segue mas que, apesar disso, continua a permitir a obtenção do resultado esperado. Usualmente, associa-se a palavra algoritmo a conjuntos de operações numéricas mas, a verdade é que, uma receita culinária ou um trajecto pré-definido entre dois locais podem também ser apelidados de algoritmos.

O facto de ser obtido o resultado esperado não é, por si só, satisfatório, pois, uma vez que se está a padronizar uma determinada operação, importa que o resultado seja obtido da forma tão eficiente quanto possível. Por exemplo, existem muitos trajectos para ir do ponto A ao ponto B mas, sobretudo se for necessário fazer a viagem com grande frequência, interessa que o caminho a percorrer seja tão curto ou tão rápido quanto possível.

Assim, o conceito de algoritmo pode, de acordo com [39], ser formalizado do seguinte modo:

- A descrição de um procedimento, numa linguagem cujo vocabulário e regras matemáticas são definidos de forma precisa;
- Esta descrição consiste numa sequência *finita* de frases discretas, as instruções que um agente computador (humano ou não) é suposto ser capaz de executar.

O facto de a sequência de operações ser finita ou não pode ser discutível, dependendo do contexto mas, no presente texto, esse detalhe não será abordado, uma vez que todos os algoritmos implementados contêm um número de acções finito.

Um outro aspecto que importa referir é o conceito (nada óbvio) de eficiência. Existem vários critérios (tempo de execução, espaço de memória, consumo de energia, etc) mas, de modo geral, quando se fala de algoritmos pensados para implementações computacionais os dois principais critérios são: tempo de execução e memória requerida. Infelizmente, em muitos casos, estes dois objectivos são antagónicos, pelo que é necessário encontrar uma solução de compromisso.

Face ao exposto, um programa pode ser visto como a implementação de um algoritmo num dado ambiente computacional.

5.3 Estrutura do programa

Analizando as definições dos coeficientes do sistema resolvente conclui-se que há coeficientes que são independentes do tempo (constantes durante a análise), coeficientes que dependem da solução inicial em cada incremento (constantes no incremento) e coeficientes que variam em cada incremento (designadamente os resíduos não lineares).

A implementação numérica criada pode ser sumarizada nos seguintes passos:

1. Ler e, com o intuito de conter possíveis erros numéricos, escalar os dados;
2. Calcular e guardar de forma esparsa os coeficientes constantes não nulos do sistema resolvente;

3. Inicializar o tempo, $t = 0$, e o campo do grau de hidratação, α , resolver as condições iniciais para obter o campo de temperatura, T , e da taxa de variação no tempo, \dot{T} ;
4. Implementar o incremento de tempo, $t = t + \delta t$, inicializar as variáveis incrementais, $\delta t = 0$ e $\delta T = 0$, calcular e guardar de forma esparsa os elementos do sistema resolvente constantes no incremento δt ;
5. Calcular os coeficientes que dependem do tempo e resolver o sistema;
6. Actualizar os valores do grau de hidratação, $\alpha = \alpha + \delta\alpha$;
7. Verificar a convergência das variáveis incrementais e, caso a margem prescrita como critério de convergência não tenha sido atingida, voltar ao passo 5;
8. Actualizar as variáveis do sistema, $T = T + \delta T$ e $t = t + \delta t$, e voltar ao passo 4, caso ainda não se tenha atingido o tempo de análise, ou seja, $t < t_{max}$.

Na figura 5.1 apresenta-se o fluxograma do programa e na figura 5.2 o fluxograma do cálculo da solução inicial.

Apenas a título de exemplo, inclui-se ainda na figura 5.3 o fluxograma do cálculo da matriz de rigidez, \mathbf{K} . As restantes matrizes e, de modo geral, os vectores foram implementados seguindo o mesmo tipo de lógica, pelo que é desnecessário apresentar os restantes fluxogramas, apesar de existirem algumas diferenças.

Existem várias maneiras de conceber as rotinas de incidências, dependendo de quem programa. No programa criado, existem várias rotinas diferentes para este efeito, cada uma com o seu campo de aplicação. Sendo impossível explicar detalhadamente aqui o funcionamento de cada uma delas e estando os conceitos subjacentes amplamente divulgados [39, 40, 41, 42, 43] opta-se por omitir o funcionamento destas rotinas. De qualquer modo, na secção 4.4 foi explicada a linha de raciocínio seguida.

5.4 Leitura de Dados

O primeiro ponto da implementação computacional é ler, escalar e armazenar os dados necessários à execução do programa.

O ficheiro de dados principal, com a extensão ".DAD", pode ser encontrado no apêndice G e é auto-explicativo. A única opção que, neste caso, é dada de forma ligeiramente diferente do habitual prende-se com o comprimento dos elementos. O utilizador define se pretende uma malha regular ou irregular. No primeiro caso, basta definir o número de elementos e o comprimento total

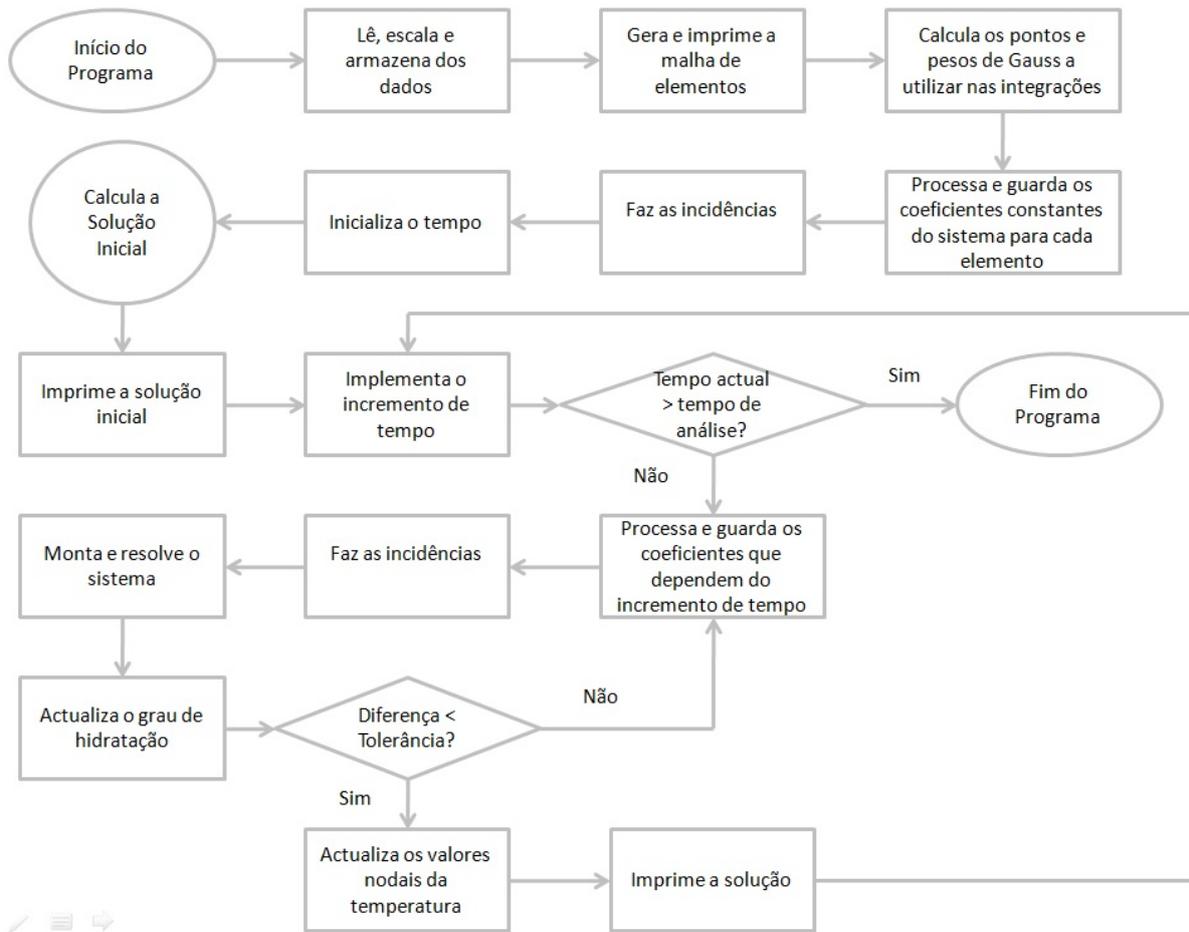


Figura 5.1: Fluxograma do programa

da estrutura, ficando o programa encarregue de gerar a malha. Na segunda situação, o utilizador deve definir o número de elementos que pretende e as coordenadas dos nós inter-elementares. É também pedida a escala a utilizar nos comprimentos, definida sobre o comprimento total e não sobre um elemento. Com o intuito de mitigar eventuais erros numéricos, é conveniente que o valor desta escala seja escolhido por forma a que o comprimento escalado de cada elemento se situe próximo da unidade, no caso de uma malha regular, ou seja,

$$L_s \approx \frac{L}{N_{elementos}} \quad (5.1)$$

onde L_s representa o valor da escala, L o comprimento total e $N_{elementos}$ o número de elementos. Recomenda-se, também, algum cuidado na escolha da tolerância numérica, valor a partir do qual um determinado número é tomado como nulo. Ao prescrever uma tolerância grande o programa corre mais rapidamente, mas pode não convergir para a solução correcta, pelo que é necessário algum cuidado. À partida, salvaguardando eventuais casos particulares, um valor da ordem dos

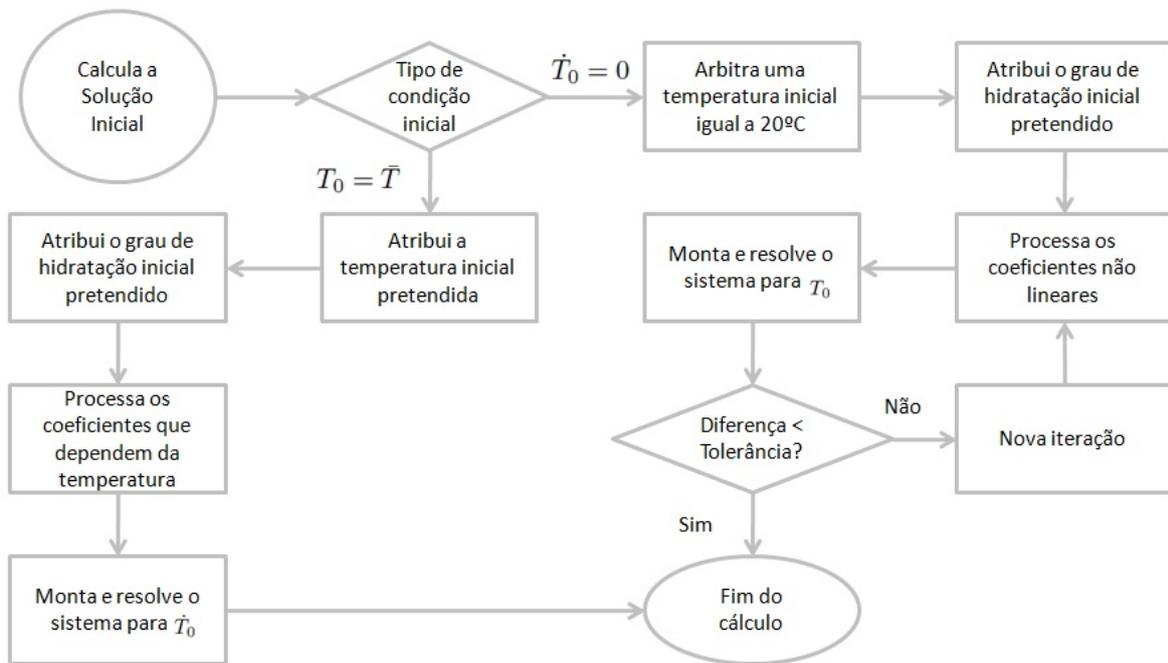


Figura 5.2: Fluxograma da solução inicial

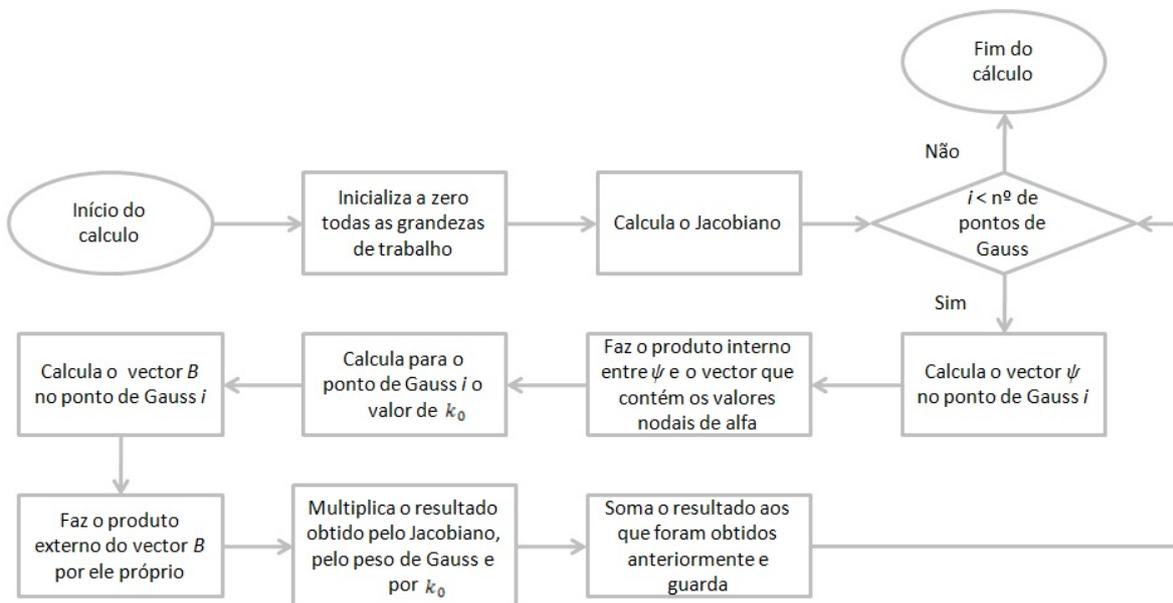


Figura 5.3: Fluxograma do cálculo da matriz, K

10^{-9} permite obter bons resultados.

Relativamente às condições de fronteira, será necessário fornecer dados adicionais. No entanto, podendo ser necessário ler séries grandes de valores, optou-se por ler as temperaturas

impostas ou as temperaturas ambiente, velocidades do vento e emissividades a partir de outros ficheiros que podem ser consultados no apêndice I. Caso se trate do caso de temperatura imposta as séries de valores são lidas do ficheiro cuja a extensão é "_BD_TEMP.txt" e, caso se trate da condição de convecção de "_BD_CONV.txt".

É ainda necessário ler os valores da função de hidratação, $f(\alpha)$. Esta função é lida do ficheiro de texto com extensão "_BD_HYDR.txt", como se exemplifica no apêndice H.

Finalmente, é necessário ler a distribuição inicial pretendida para a temperatura (sempre que tal se justifique) e para o grau de hidratação que, na maioria dos casos, é zero em todo o domínio. Os valores iniciais do grau de hidratação e da temperatura são lidos dos ficheiros "_PRES_ALFA.txt" e "_PRES_T.txt", respectivamente.

5.5 Escrita de Resultados

O programa escreve dois tipos de ficheiros de dados. Um apresenta os resultados efectivamente calculados e outro limita-se a apresentar informações relevantes para detectar eventuais erros ou para confirmar resultados intermédios.

Nos ficheiros cujas extensões são "_TPL.txt" e "_HTL.txt" são apresentadas as evoluções da temperatura e do grau de hidratação, respectivamente, numa secção da peça previamente escolhida. Existe, para cada um destes dois ficheiros, um programa (cujo o nome é igual ao de cada ficheiro) em ambiente *Mathematica* que permite a criação imediata de um gráfico para facilitar futuras leituras dos dados.

Do mesmo modo, nas extensões "_TPL.txt" e "_HTF.txt" são apresentados os valores das mesmas grandezas em vários instantes, mas em todo o domínio. À semelhança do que sucedia anteriormente, existem mais dois programas criados em ambiente *Mathematica* que processam automaticamente a informação ali contida, criando uma animação da evolução das grandezas ao longo do tempo no domínio.

Os ficheiros de carácter mais informativo e, portanto, dispensáveis na maior parte das aplicações são:

- "_RES.txt", onde se escreve as opções gerais tomadas, as várias grandezas lidas e escaladas, as matrizes e vectores elementares, as matrizes e vectores globais, o sistema resolvente e a solução em cada instante;
- "_SCL.txt", onde se escrevem as escalas usadas;

- "_INF.txt", onde se apresentam as informações relativas ao armazenamento interno de variáveis e que pode ser útil caso se pretenda acrescentar funcionalidades ao programa;
- "_ALFA.txt", onde se escreve os valores lidos para a função de hidratação, $f(\alpha)$.

Capítulo 6

Convergência das Soluções

6.1 Introdução

Antes de apresentar os problemas de aplicação, importa analisar a convergência das soluções do modelo anteriormente descrito. Assim, principia-se por fazer uma análise de sensibilidade ao grau de aproximação e ao número de elementos, no sentido de encontrar um equilíbrio entre a qualidade dos resultados e a eficiência computacional. É certo que, em geral, o programa criado não consome um tempo desmesurado na análise, mesmo com um refinamento relativamente forte. No entanto, a procura de uma aproximação equilibrada deve ser feita, pois caso se utilize uma discretização da estrutura demasiado grande desperdiçam-se recursos computacionais, o que, por princípio, deve ser evitado, e caso se escolha uma aproximação demasiado fraca pode dar-se o caso de a solução obtida não fazer sentido.

No modelo criado, os elementos finitos aproximam directamente o campo da temperatura, sendo posteriormente calculado o valor do grau de hidratação através da equação (3.25). Deste modo, é expectável que o campo de temperatura convirja mais rapidamente do que o grau de hidratação. No entanto, para evitar eventuais surpresas, é conveniente analisar a convergência de ambos os campos.

À parte de erros numéricos, os resultados da análise de problemas lineares aproximam-se sempre da solução exacta com o aumento do número de elementos e/ou com o aumento do grau de aproximação, sendo a convergência mais rápida no segundo caso. No entanto, importa referir que o problema em apreço é não linear, pelo que, à partida, não é possível garantir que tal se verifique.

Importa clarificar os critérios a considerar nesta análise, uma vez que existem várias opções possíveis. Assim, procura-se um equilíbrio entre o tempo consumido, os recursos dispendidos

e, obviamente, a qualidade da solução. O binómio recursos computacionais - qualidade da solução determina a malha mais adequada para cada aplicação, mas é necessário atender aos condicionantes de tempo¹.

6.2 Testes

Como se apresenta na figura 6.1, para esta análise considera-se uma laje suficientemente grande em planta de forma a que seja possível admitir como nulo o fluxo de calor nas faces laterais. Nas faces superior e inferior considera-se uma temperatura imposta $\bar{T} = 25^\circ C$ (condição de Dirichlet). Apesar de ter pouca aplicação prática, esta é a condição de fronteira que origina maiores gradientes de temperatura no interior da peça, sendo portanto a mais desfavorável para este estudo. Utiliza-se sempre o mesmo tipo de cimento (CA CEM I 42.5R, na notação de [2]) e arbitra-se uma espessura $h = 0.5m$, uma vez que parece ser um valor equilibrado para chegar a um bom compromisso. As restantes características dos testes estão resumidas na tabela 6.1.

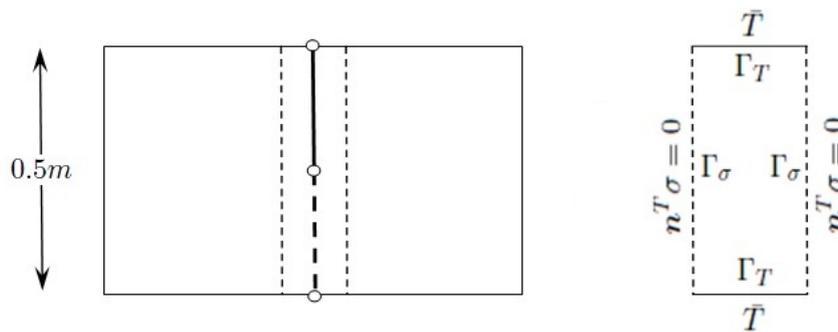


Figura 6.1: Caracterização dos testes de convergência das soluções

Na figura 6.2 apresenta-se a evolução da temperatura e do grau de hidratação de referência na secção média e nas secções extremas da peça.² Como era expectável, devido à condição de fronteira, nas secções de extremidade a temperatura é constante e igual a $25^\circ C$. Na figura 6.3 ilustra-se a distribuição de referência da temperatura e do grau de hidratação na secção em quatro instantes de tempo. Uma vez que os máximos ocorrem sempre no ponto médio, na análise subsequente apresentam-se apenas os resultados nesse ponto.

Posto isto, para que seja possível tirar conclusões, procede-se a uma análise de sensibilidade ao número de elementos (refinamento-h) e, em separado, ao grau de aproximação (refinamento-p), considerando apenas o ponto médio da secção. Posteriormente, juntam-se ambos os resulta-

¹Inclui o tempo gasto na corrida do programa, mas também o tempo dispendido na preparação dos dados.

²Obtidas com uma malha de 8 elementos de grau 13.

Tabela 6.1: Características do ensaio - Convergência das soluções

Propriedades Térmicas do Betão	
Tipo de Cimento	CA CEM I 42.5R
Condutividade Térmica	$k_{\infty} = 2.6 \text{ W/mK}$
Calor Específico	$\rho c = 2400 \text{ kJ/m}^3\text{K}$
Energia de Activação	$E_a = 43.83 \text{ kJ/mol}$
Taxa de produção de calor	$A_T = 2.15 \times 10^8 \text{ W/kg}$
Calor libertado a tempo infinito	$Q_{\infty} = 355.2 \text{ kJ/kg}$
Peso volúmico do cimento	$C_c = 290 \text{ kg/m}^3$

Geometria e Malha de Elementos Finitos	
Espessura da peça	0.50 m
Número de Elementos	varia
Grau de Aproximação	varia

Integração no tempo	
Passo	15 min

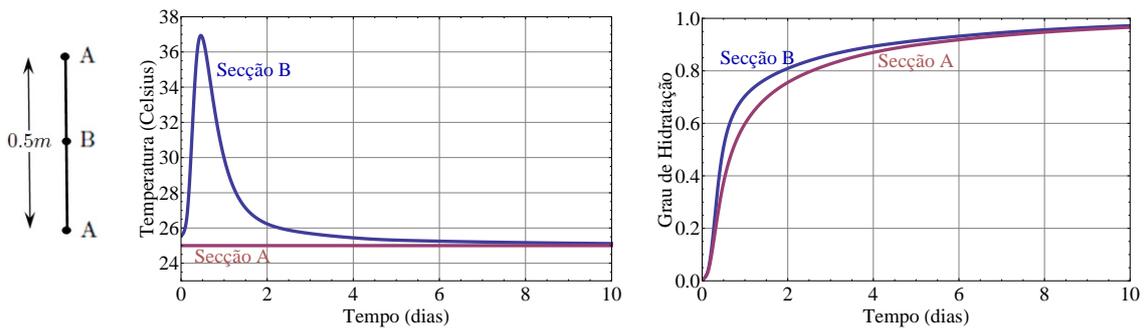


Figura 6.2: Evolução da temperatura e do grau de hidratação em duas secções

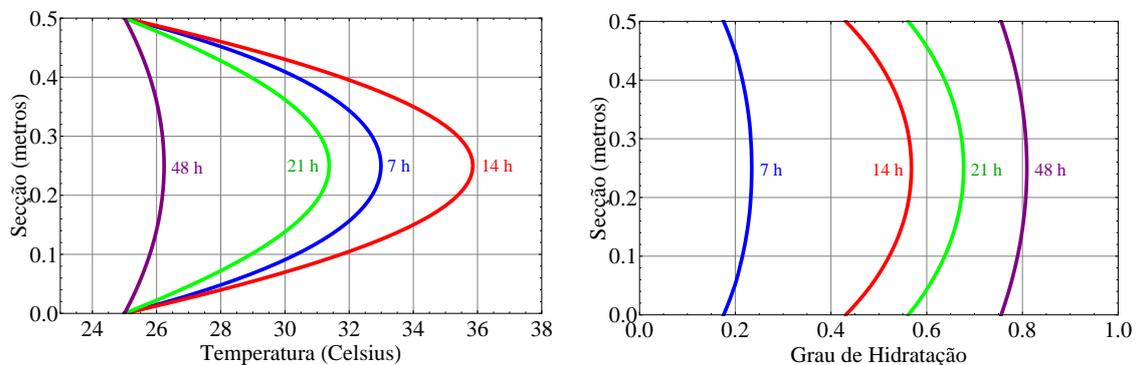


Figura 6.3: Secção em alguns instantes de tempo

dos com o propósito de obter uma visão geral do problema. Sendo este um problema que varia

ao longo do tempo e dada a impossibilidade de comparar as soluções em todos os instantes, os resultados são comparados em apenas três momentos que se consideram como representativos: às sete, catorze e quarenta e oito horas. No primeiro instante a temperatura encontra-se em fase ascendente, no segundo está perto do seu ponto máximo e próximo da estabilização no terceiro, conforme se ilustra na figura 6.2.

6.2.1 Formatação dos Resultados

A análise de sensibilidade que foi feita produziu um grande volume de resultados, pelo que foi necessário escolher um processo de representação que permita comparar a informação sem dificultar a interpretação do processo de convergência das soluções obtidas.

Os resultados obtidos para a temperatura e para o grau de hidratação no centro da laje, o ponto B indicado na figura 6.2, encontram-se resumidos nas figuras 6.5 a 6.18.

Nesses gráficos, o eixo das abscissas define o logaritmo do número de graus de liberdade da aproximação da temperatura, N , e o eixo das ordenadas define a razão entre o valor obtido com essa aproximação e o valor tomado como referência.

Uma vez que o presente problema não tem solução analítica, os valores de referência para a temperatura, T_{ref} , e para o grau de hidratação, α_{ref} , foram determinados numericamente. A solução de referência utilizada foi obtida com uma malha de 8 elementos de grau 13, tendo a sua convergência sido assegurada analisando os resultados obtidos com malhas mais refinadas.

Como se ilustra nas 6.5 a 6.18, o refinamento-p é feito utilizando sempre graus ímpares e o refinamento-h é feito subdividindo o domínio em 2^n elementos. Em cada gráfico, a convergência com refinamento-p é definida por interpolações lineares dos pontos que representam as soluções obtidas com o mesmo grau de aproximação, estando a cor associada a um dado refinamento-h. Para analisar a convergência desta forma de refinamento basta interpolar os pontos que definem o mesmo grau de aproximação, como se ilustra na figura 6.5 para a aproximação linear. De referir que se optou por não apresentar as curvas de refinamento-h para evitar uma densificação excessiva dos resultados resumidos em cada figura.

Para além disso, e com o intuito de mostrar as conclusões de forma tão clara quanto possível, optou-se por separar os resultados em aproximações fracas e fortes, utilizando o grau cinco como charneira. Limitou-se as ilustrações a malhas com oito elementos, por se ter confirmado serem suficientes para assegurar a convergência da solução.

Ainda com o intuito de facilitar a leitura, apresentam-se apenas as linhas correspondentes ao refinamento-p e, junto de cada ponto, encontra-se o número do grau de aproximação utilizado para aproximar o campo de temperatura.

6.3 Aproximações Fracas

Apresentam-se a seguir os resultados dos ensaios de convergência sobre as soluções obtidas para os campos de temperatura e do grau de hidratação quando se utilizam aproximações fracas, isto é, quando o grau de aproximação da temperatura é menor ou igual a cinco.

6.3.1 Convergência do Campo de Temperatura

No âmbito das aproximações fracas, o primeiro aspecto a referir é que não faz sentido utilizar um elemento de primeiro grau quando se impõe a temperatura nas fronteiras. Na prática, uma vez que a temperatura nas fronteiras é imposta, esta malha não tem graus de liberdade. Assim, qualquer que seja o instante considerado obtém-se sempre a distribuição de temperaturas que se mostra na figura 6.4, ou seja a distribuição de temperatura no domínio fica condicionada exclusivamente pelas condições de fronteira.

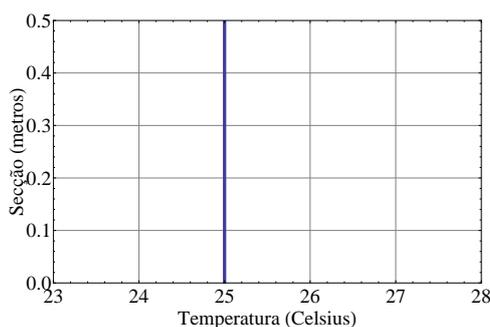


Figura 6.4: Temperatura prescrita - 1 elemento de grau 1

Observando as figuras 6.5 e 6.6, verifica-se que quando o número de graus de liberdade é baixo (um elemento com grau inferior a cinco ou dois elementos com grau inferior a três) as soluções do modelo ainda apresentam um erro apreciável. De facto, conforme se confirmará adiante, quando se utilizam poucos graus de liberdade a reacção de hidratação não é processada de forma adequada.

Note-se, ainda, que a qualidade da solução cresce muito mais rapidamente com o aumento do grau de aproximação do que com o número de elementos, o que recupera um resultado bem estabelecido na solução de problemas lineares. Conclui-se ainda que, com malhas relativamente grosseiras e quando o processo de hidratação está em franco desenvolvimento, contra o que sucede na análise de problemas lineares, a solução pode piorar quando, para um dado grau de aproximação, se aumenta o número de elementos, como ilustra a linha de refinamento-h representada na figura 6.7.

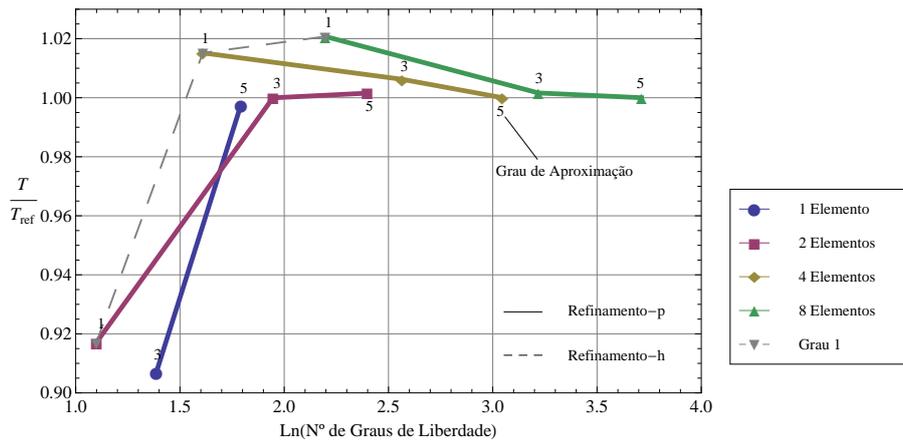


Figura 6.5: Temperatura, aproximações fracas - 7 horas ($T_{ref} = 27.708^\circ C$)

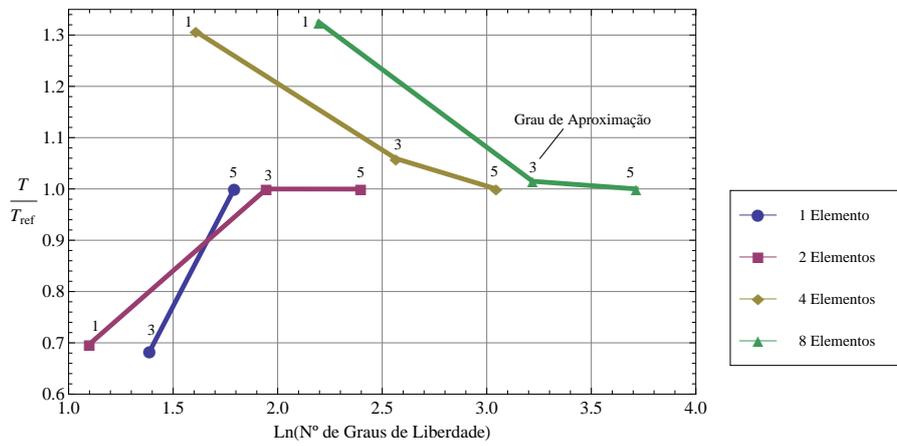


Figura 6.6: Temperatura, aproximações fracas - 14 horas ($T_{ref} = 36.868^\circ C$)

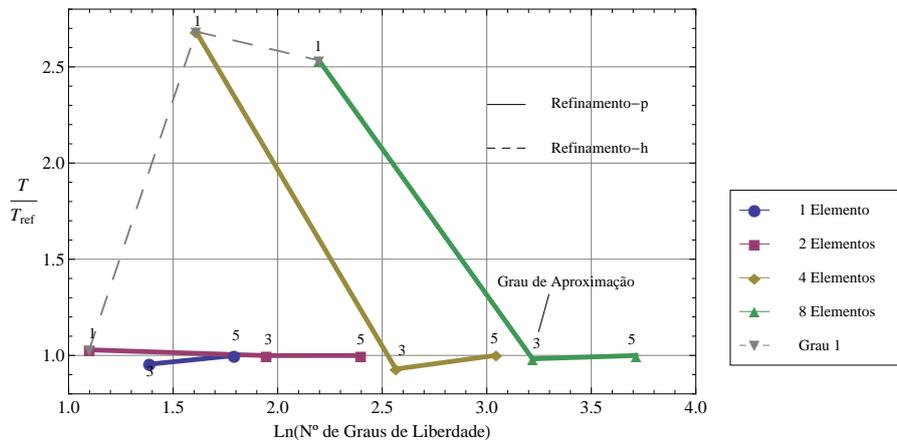


Figura 6.7: Temperatura, aproximações fracas - 48 horas ($T_{ref} = 26.372^\circ C$)

6.3.2 Convergência do Grau de Hidratação

Nas figuras 6.8 a 6.10, é visível a convergência do modelo para aproximações baixas no que diz respeito ao grau de hidratação. Verifica-se que, para modelar a reacção de hidratação do cimento, é necessário um número de graus de liberdade mínimo, facto que se deve à existência do termo exponencial na lei de Arrhenius (2.18).

Na interpretação do gráfico da figura 6.8 são necessários especiais cuidados, uma vez que se trata de um gráfico normalizado, onde o valor de referência é muito pequeno. Assim, podem existir eventuais desvios causados não pelo modelo numérico em si, mas pelo *software* utilizado na criação dos gráficos. De qualquer forma, as oscilações próximo da unidade representam, na realidade, discrepâncias muitas vezes abaixo da milésima e são, portanto, desprezáveis.

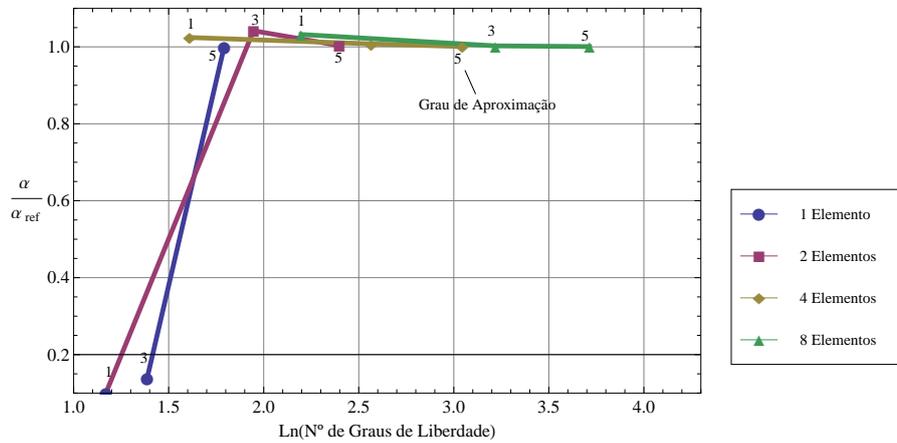


Figura 6.8: Grau de hidratação, aproximações fracas - 7 horas ($\alpha_{ref} = 0.072$)

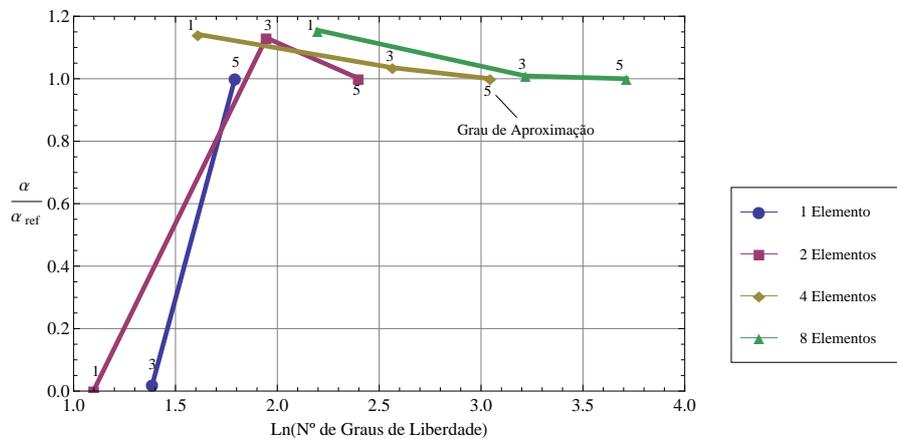


Figura 6.9: Grau de hidratação, aproximações fracas - 14 horas ($\alpha_{ref} = 0.480$)

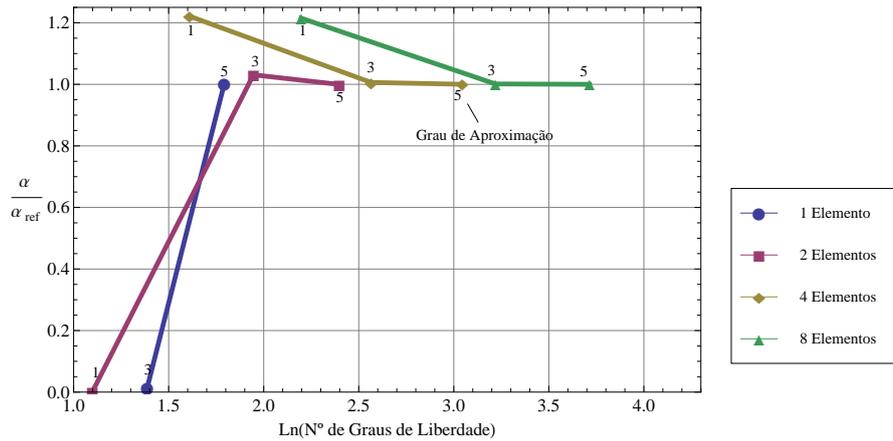


Figura 6.10: Grau de hidratação, aproximações fracas - 48 horas ($\alpha_{ref} = 0.801$)

6.4 Aproximações Fortes

O aumento do grau de aproximação é cessado no momento em que se considera que já existem dados suficientes para tirar as conclusões pretendidas, pois não faz sentido aumentar, indefinidamente, o grau quando deixa de ser evidente que existam melhorias na solução. Assim, considera-se suficiente apresentar apenas aproximações até ao grau nove. Para permitir comparar de forma directa os gráficos que agora são apresentados com os seus congêneres correspondentes às aproximações fracas, inclui-se novamente as aproximações de grau cinco.

Convém referir que, a partir de certo ponto, os gráficos referentes às aproximações fortes podem apresentar oscilações que se devem a problemas de precisão numérica e não a problemas nas soluções obtidas. Assim, na interpretação dos gráficos seguintes (figuras 6.13 a 6.18), é conveniente reparar na margem de erro que existe relativamente à solução de referência, pois, em muitos casos, apresenta valores bastante abaixo de 1%.

6.4.1 Convergência do Campo de Temperatura

Descartando o desperdício de recursos computacionais, existe muitas vezes a tendência para pensar que o grau de aproximação dos elementos pode ser aumentado indefinidamente, convergindo sempre para a solução exacta. Na realidade, esta ideia não é correcta. Ao aumentar o grau da aproximação a solução converge para a exacta mas, a partir de um certo ponto, começam a aparecer erros numéricos que levam, muitas vezes, à rotura do programa. Na figura 6.11, é visível que, para um elemento, a solução deixa de ter significado quando se utilizam graus superiores a vinte e um. Os polinómios de Lagrange são instáveis para graus elevados, *i.e.*, o polinómio começa a ter oscilações grandes. Na figura 6.12 apresenta-se o polinómio de Lagrange

de grau vinte que toma o valor um em -0.143 e zero nos restantes nós de interpolação.

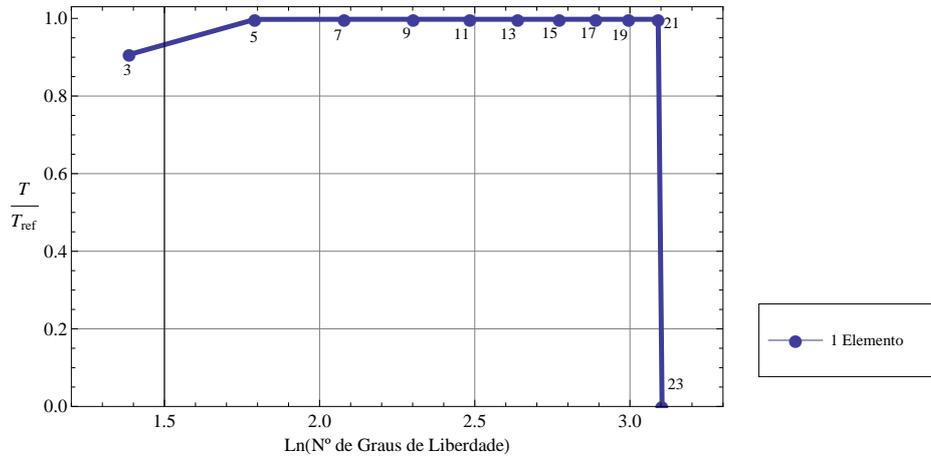


Figura 6.11: Temperatura - 7 horas ($T_{ref} = 27.708^{\circ}C$)

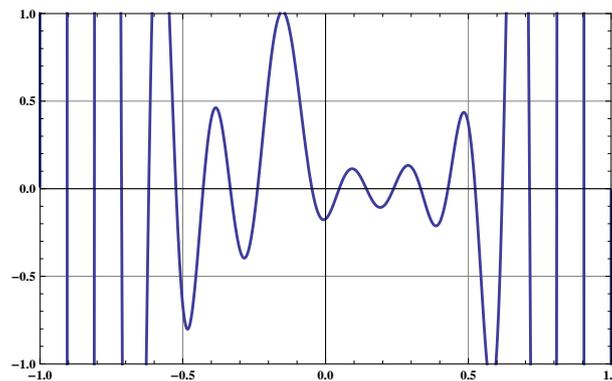


Figura 6.12: Polinômio de Lagrange - grau 21

Nos gráficos 6.13 a 6.15 é visível que, à parte dos erros numéricos já referidos, se obtêm sempre boas soluções quando se utilizam aproximações fortes. O problema passa a ser o desperdício de recursos computacionais. As oscilações visíveis na convergência para a solução de referência devem-se a problemas de precisão numérica, mas estão sempre a baixo de 1%, pelo que se podem considerar desprezáveis.

6.4.2 Convergência do Grau de Hidratação

Nas figuras 6.16 a 6.18, é visível a convergência do modelo no que diz respeito ao grau de hidratação quando se utilizam aproximações fortes. Verifica-se que, para graus de aproximação superiores a cinco e esquecendo erros numéricos provenientes do aumento do grau, o erro da grau de hidratação é também sempre inferior a 1%.

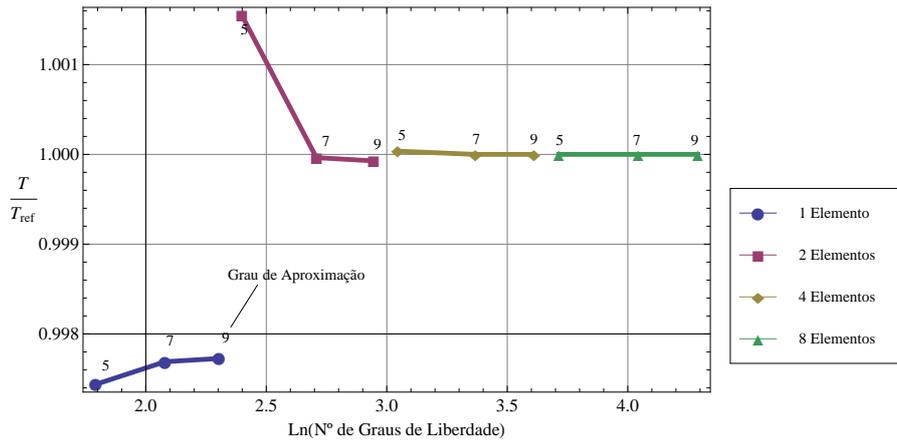


Figura 6.13: Temperatura, aproximações fortes - 7 horas ($T_{ref} = 27.708^{\circ}C$)

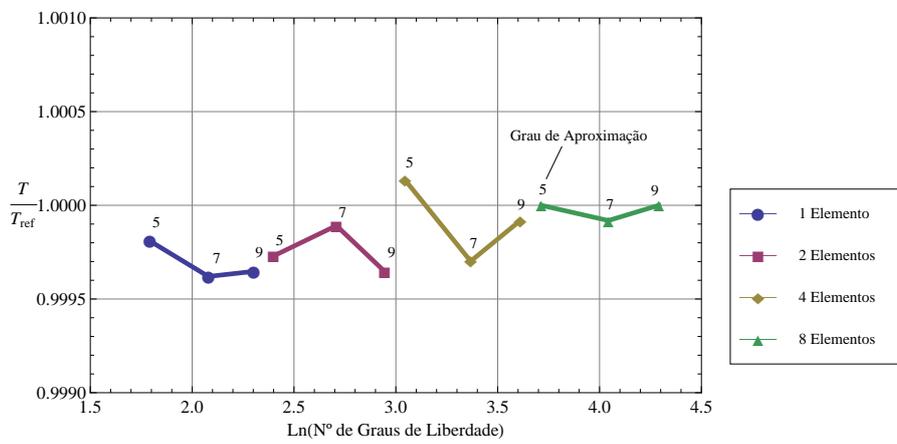


Figura 6.14: Temperatura, aproximações fortes - 14 horas ($T_{ref} = 36.868^{\circ}C$)

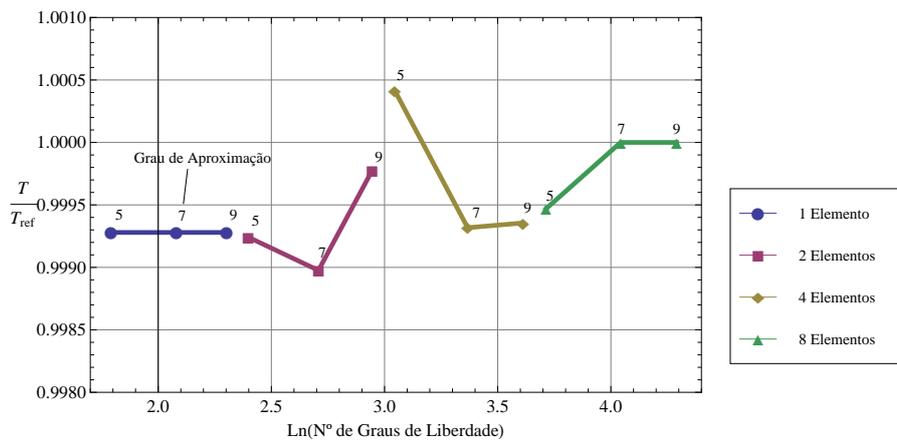


Figura 6.15: Temperatura, aproximações fortes - 48 horas ($T_{ref} = 26.372^{\circ}C$)

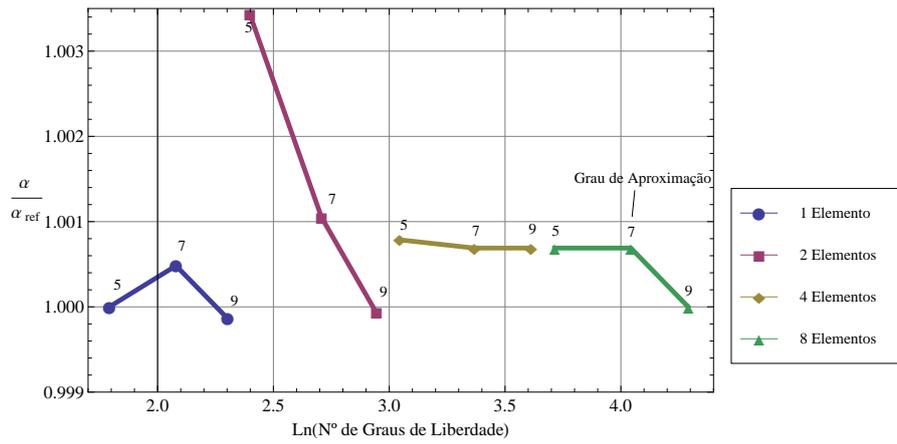


Figura 6.16: Grau de hidratação, aproximações fortes - 7 horas ($\alpha_{ref} = 0.072$)

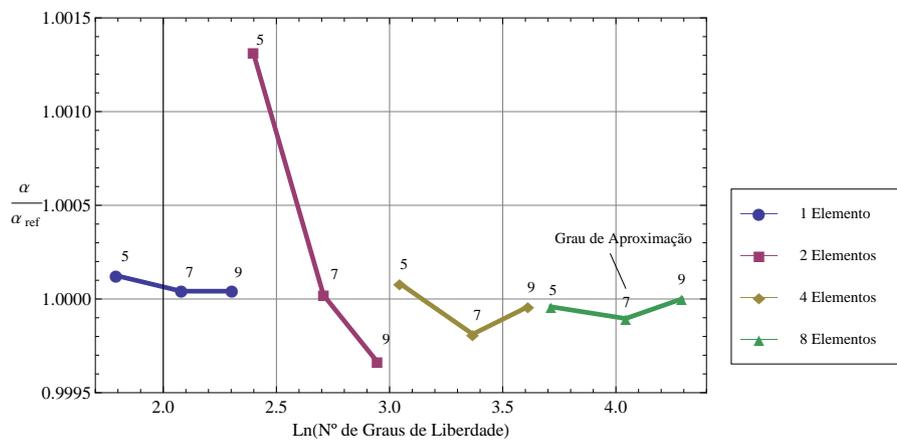


Figura 6.17: Grau de hidratação, aproximações fortes - 14 horas ($\alpha_{ref} = 0.480$)

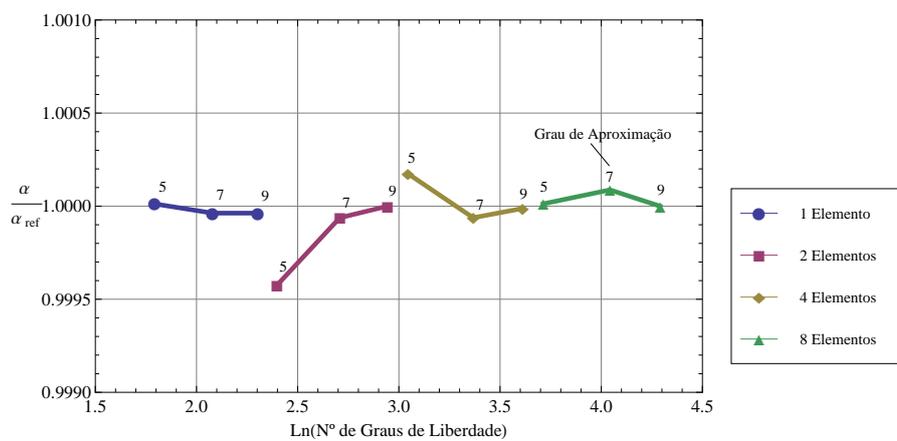


Figura 6.18: Grau de hidratação, aproximações fortes - 48 Horas ($\alpha_{ref} = 0.801$)

6.5 Conclusões

Em suma, e para o problema ensaiado, utilizando graus de aproximação iguais ou superiores a cinco consegue-se sempre boas soluções. À partida, quanto maior for o grau utilizado, melhor será a solução obtida. No entanto, mostrou-se que o grau não pode ser aumentado indefinidamente, atendendo a que aparecem erros de precisão numérica. No exemplo criado, o erro ocorreu quando se utilizou elementos de grau vinte e três. Sugere-se que relativamente a este valor seja dada uma margem de segurança ou, pelo menos, se confira que não estão a aparecer resultados descabidos sempre que se opte por graus próximos deste valor.

É visível que o refinamento-p converge mais rapidamente para uma boa solução do que o refinamento-h. Observando os gráficos e escolhendo uma malha que permita obter boas soluções com o menor número possível de graus de liberdade, verifica-se que o número de elementos não é preponderante. Assim, escolhendo correctamente o grau de aproximação, um único elemento parece ser suficiente, embora tal possa gerar algum desconforto na aplicação a casos reais.

Na prática, o principal factor a considerar na geração de uma malha é o tempo, que não foi, até ao momento, tido em conta nesta análise. Não faz, obviamente, sentido dizer aqui quanto tempo demorou cada uma das corridas do programa, visto que tal varia de computador para computador. No entanto, como ordem de grandeza, um processador Intel(R)Core(TM) i3 CPU M330 @ 2.13GHz, demora vinte e quatro segundos para fazer uma análise a dez dias, utilizando quatro elementos de grau sete. Relativamente ao operador, não existe diferença no tempo gasto ao adoptar qualquer uma das malhas apresentadas. O único acréscimo encontrado deve-se à utilização de malhas de elementos finitos de diferentes dimensões que não foram consideradas neste capítulo, pois não se encontraram vantagens que as justifiquem. Assim, verifica-se que, para este exemplo, existe claramente margem para utilizar aproximações fortes, aumentando a confiança na resultado.

Posto isto, convém referir que, do ponto de vista da qualidade dos resultados, o refinamento é sobretudo influenciado pela geometria, pelas condições de fronteira e pelo carregamento. Neste problema o carregamento torna-se pouco importante, pois o calor libertado pelos vários tipos de cimento é sempre da mesma ordem de grandeza, para cada tipo de cimento. Porém, continua a ser necessário ponderar a geometria e as condições de fronteira. Se por um lado, se utilizou a condição de fronteira mais desfavorável, por outro a geometria poderá em alguns casos reais ser superior e deve ser tido isso em conta. Logo, continua a ser necessário, caso a caso, ponderar um pouco a malha a utilizar mas, a partir deste momento, os valores estão balizados, isto é, devem ser utilizados graus entre cinco e dezanove e um número de elementos que pareça adequado

tendo em conta a dimensão da peça, os gradientes esperados e os próprios graus considerados nas aproximações. Para além disso, deve ser refinada a malha nas zonas em que se espere (ou venha a verificar) a ocorrência de grandes gradientes da temperatura.

Capítulo 7

Comparação com Outros Modelos Numéricos

7.1 Introdução

Neste capítulo, os testes visam, essencialmente, a validação do código criado e a compreensão das valências do modelo. Depois de validar a implementação do modelo desenvolvido, comparam-se, no capítulo seguinte, os resultados com medições experimentais realizadas em aplicações reais.

A opção seguida para validar o modelo passou por confirmar todas as matrizes e vectores usando o programa *Mathematica*, e por comparar directamente os resultados obtidos com os de modelos desenvolvidos por outros autores. O confronto com outros programas tem a vantagem adicional de permitir comparar diferentes formulações do método dos elementos finitos.

Assim, neste capítulo, mais do que uma simples validação, é feita uma comparação entre várias abordagens. Ressalva-se ainda que, à partida, todas as soluções apresentadas neste capítulo são aproximações numéricas, pelo que a proximidade entre resultados não implica necessariamente que a solução real esteja, de facto, próxima. No entanto, se todos, ou grande parte, dos modelos dessem resultados semelhantes, seria necessária uma reflexão profunda acerca das hipóteses admitidas se, posteriormente, houvesse um grande desfasamento para os resultados experimentais.

Para efeitos de comparação, são utilizados dois programas cujas informações podem ser encontradas em [33, 44]; ambos utilizam elementos finitos híbridos que aproximam directamente a temperatura e o grau de hidratação, sendo um unidimensional [33], como o modelo aqui criado, e outro bidimensional [44]. Posto isto, começa-se por comparar resultados com o modelo unidimensional e, posteriormente, faz-se o confronto com o modelo bidimensional.

7.2 Modelo Unidimensional

Por convenção, quando nada for dito em contrário, todos os gráficos temperatura/tempo apresentados nesta secção representam medições feitas no centro da laje. Para facilitar a análise, opta-se por utilizar um refinamento mais apertado do que qualquer um dos utilizados em [33] e correr ambos os modelos com o mesmo número de elementos e com o mesmo grau de aproximação. O cimento é do tipo CA CEM I 42.5R[2]. As propriedades térmicas do betão, a geometria da peça, a malha de elementos finitos e o passo de integração no tempo utilizado nos ensaios estão definidos na tabela 7.1. De referir ainda que, nas comparações efectuadas com o modelo unidimensional de elementos híbridos, se utilizou como condição inicial para a hidratação a que é sugerida em [33], *i.e.*, $f(\alpha = 0) = 0.1$.

Tabela 7.1: Características dos ensaios - Modelo unidimensional de elementos híbridos

Propriedades Térmicas do Betão	
Tipo de cimento	CA CEM I 42.5R
Condutividade Térmica	$k_{\infty} = 2.6 \text{ W/mK}$
Calor Específico	$\rho c = 2400 \text{ kJ/m}^3\text{K}$
Energia de Activação	$E_a = 43.83 \text{ kJ/mol}$
Taxa de produção de calor	$A_T = 2.15 \times 10^8 \text{ W/kg}$
Calor libertado a tempo infinito	$Q_{\infty} = 355.2 \text{ kJ/kg}$
Peso volúmico do cimento	$C_c = 290 \text{ kg/m}^3$
Geometria e Malha de Elementos Finitos	
Espessura da peça	0.30 m
Número de Elementos	4
Grau de Aproximação	7
Integração no tempo	
Passo	15 min

7.2.1 Teste Adiabático

O primeiro ensaio simula um teste adiabático. Esta condição é muito utilizada para calibrar os ensaios experimentais, pelo que parece ser a escolha ideal para principiar a validação do modelo. Este teste tem ainda a vantagem de, na prática, se a distribuição inicial de temperatura for constante, reduzir todo o domínio a um ponto (distribuição de temperaturas constante), o que facilita a interpretação de resultados. Considera-se uma temperatura de 25°C no instante da betonagem.

Como se pode observar na figura 7.1, as duas abordagens produzem os mesmos resultados até ao terceiro dia. A divergência que se verifica após esse momento decorre de uma simplificação (fisicamente inaceitável) assumida na implementação do modelo híbrido.

Na implementação desse modelo, e em consequência de se aproximar directamente o grau de hidratação, ocorre uma dificuldade numérica quando termina o processo de hidratação, sob a condição $f(\alpha = 1) = 0$ como se ilustra na figura 2.7.

Apesar de ser possível resolver essa dificuldade respeitando a condição $\alpha_{max} = 1$, na implementação [33] do modelo híbrido optou-se por estender a definição da função de hidratação admitindo que $f(\alpha = 1) = \varepsilon$, sendo ε um número pequeno e mantendo a função constante a partir desse ponto, $f(\alpha) = \varepsilon$ para $\alpha \geq 1$, o efeito desta simplificação está claramente ilustrado na figura 7.1.

Faz-se notar que o modelo de hidratação aqui adoptado, descrito no capítulo 2, assume existir sempre o teor de humidade necessário para a hidratação ser completa.

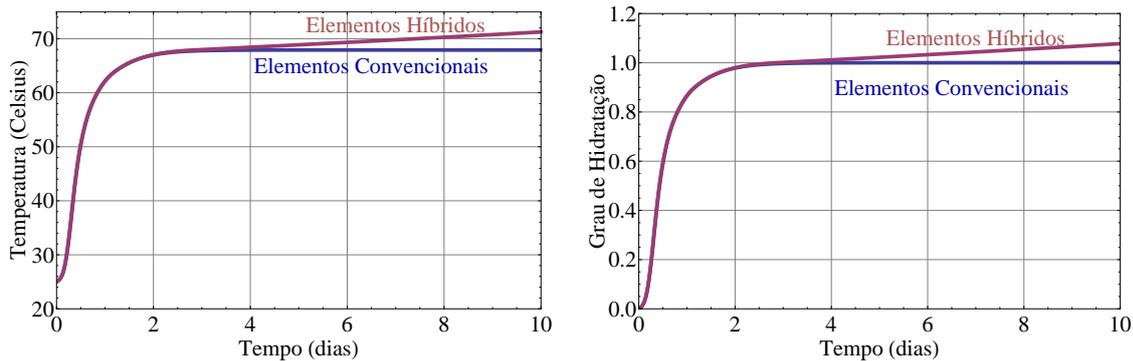


Figura 7.1: Comparação com modelo híbrido unidimensional - Teste adiabático

7.2.2 Temperatura Prescrita

No segundo ensaio, considera-se a temperatura nas fronteiras constante e igual a $25^{\circ}C$. Este caso, apesar de ser essencialmente teórico, é particularmente crítico para a validação do programa que foi desenvolvido, uma vez que testa o procedimento adoptado para implementar as condições de incidência na presença de condições de Dirichlet.

Na figura 7.2 observa-se que a correspondência entre os dois modelos é praticamente perfeita. Existe, no entanto, uma discrepância no instante inicial de $0.431^{\circ}C$, ou seja 1.7%, devida a diferentes hipóteses assumidas na dedução dos elementos. Esta diferença será explicada no exemplo seguinte, onde é mais evidente.

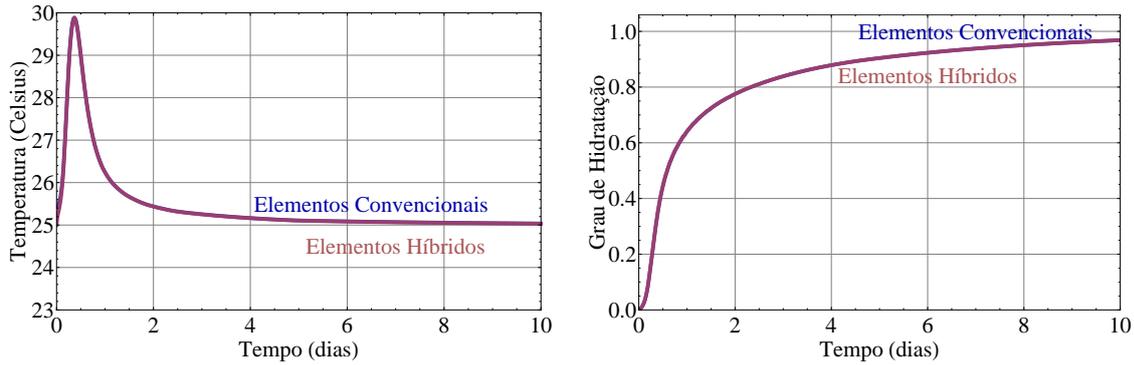


Figura 7.2: Comparação com modelo híbrido unidimensional - Temperatura prescrita

7.2.3 Convecção-Radiação

Com o intuito de validar todas as condições de fronteira, o terceiro ensaio incide sobre a simulação da condição de convecção-radiação, a condição mais importante para a aplicação a casos reais. Utiliza-se novamente condições de fronteira simétricas, considerando uma temperatura de 25°C , uma velocidade do vento de 3m/s e uma emissividade de 0.9. Os resultados obtidos estão representados na figura 7.3.

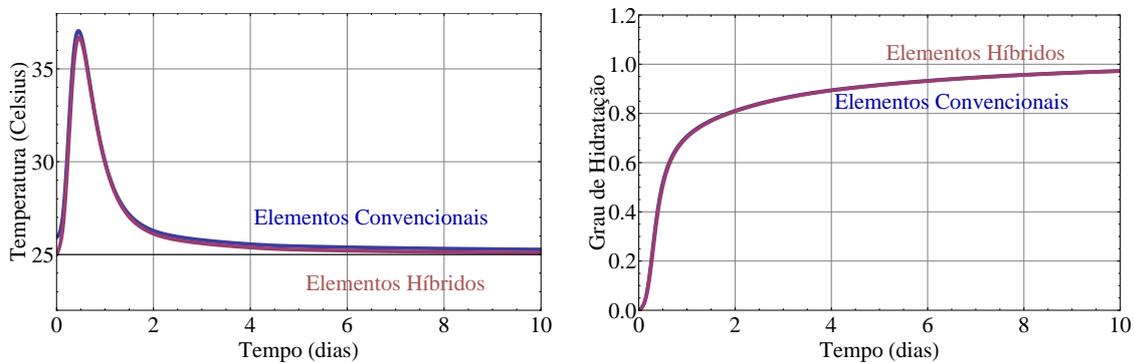


Figura 7.3: Comparação com modelo híbrido unidimensional - Convecção

À semelhança daquilo que já acontecia no caso da temperatura prescrita, existe uma diferença no ponto inicial do gráfico tempo/temperatura que, neste caso, tem o valor de 1.3°C , ou seja 5.2%. Esta diferença pode ser vista com maior clareza na figura 7.4, que apresenta a distribuição de temperaturas em $t = 0$ nas duas formulações. A origem desta discrepância prende-se com o facto de no modelo de elementos híbridos se assumir que \dot{Q} é nulo no instante inicial, $f(\alpha = 0) = 0$, mas não no programa de elementos convencionais, o que explica o valor de temperatura nas fronteiras apresentado na figura 7.4 (25.8°C em vez de 25.0°C).

Na figura 7.5 encontra-se o resultado do mesmo ensaio, considerando $\dot{Q} = 0$ no instante inicial em ambos os modelos. A sobreposição das soluções torna-se evidente.

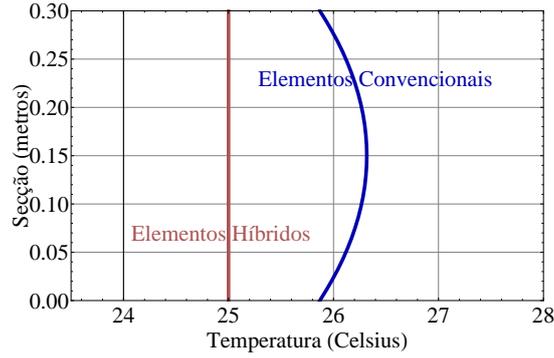


Figura 7.4: Comparação com modelo híbrido unidimensional - Secção no instante inicial

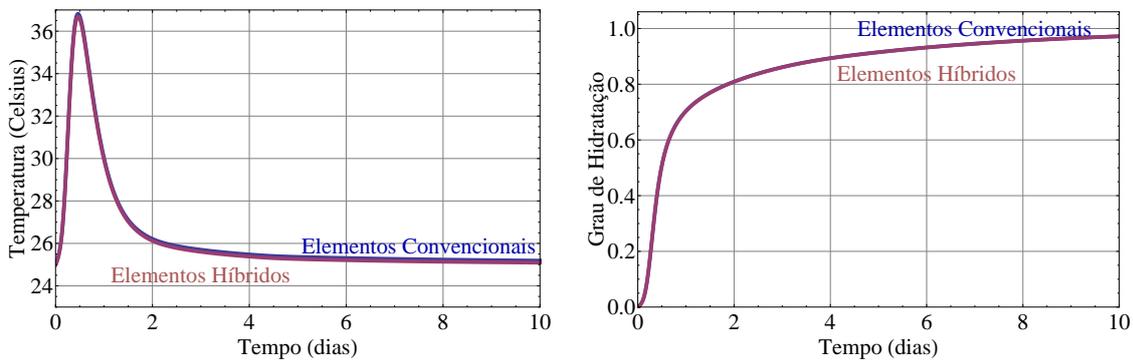


Figura 7.5: Comparação com modelo híbrido unidimensional - Convecção e $\dot{Q}_0 = 0$

Posto isto, conclui-se que à parte de pequenos detalhes que se prendem com a implementação das equações do problema, ambos os programas fornecem valores idênticos.

7.3 Modelo Bidimensional

Na comparação com o modelo bidimensional é seguida uma estratégia diferente. Uma vez que já foram testadas, separadamente, algumas situações consideradas mais críticas, agora faz-se a comparação directa com um teste escolhido pelos autores deste segundo programa [44]. Este caso apresenta duas fronteiras com fluxo nulo e duas com convecção, pelo que, na prática, se trata de um ensaio unidimensional.

Na figura 7.6 é definido o problema (geometria, condições de fronteira e discretização do modelo bidimensional). O elemento do modelo bidimensional híbrido utiliza aproximações de grau nove para a temperatura e para o grau de hidratação, o modelo convencional utiliza aproximações de grau nove para a temperatura. Nas condições de fronteira apresentadas, o fluxo de calor é nulo e as fronteiras convecção-radiação são implementadas assumindo uma temperatura do ar, uma velocidade do vento e uma emissividade constantes: $T_a = 20^\circ C$, $v = 0.3m/s$ e $\varepsilon = 0.88$.

Ao considerar o fluxo como zero em duas fronteiras o ensaio passa a ser unidimensional, pois, conforme se pode observar na figura 7.7 que apresenta as distribuições de temperatura obtidas com o modelo bidimensional em vários instantes, as linhas isotérmicas são rectas. Na figura 7.8, ilustram-se as distribuições de temperatura obtidas nos mesmos instantes de tempo com o modelo agora criado. Para o grau de hidratação as conclusões são idênticas, encontrando-se nas figuras 7.9 e 7.10 os resultados obtidos com os modelos bi e unidimensional, respectivamente.

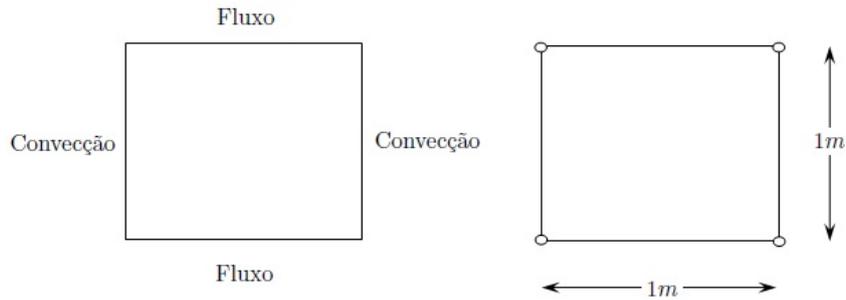


Figura 7.6: Malha de 2×2 elementos

No Apêndice J encontram-se os resultados obtidos com o modelo bidimensional num maior número de instantes de tempo. Do mesmo modo, no Apêndice K apresentam-se os resultados do modelo unidimensional. Na tabela 8.1 pode ser encontrada a informação referente a este ensaio.

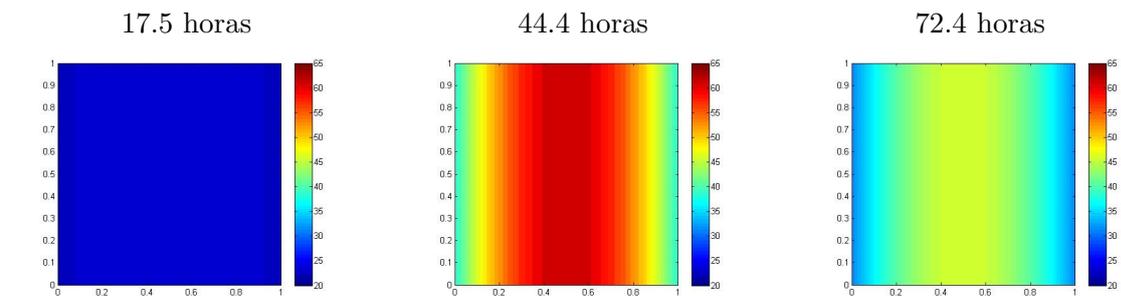


Figura 7.7: Modelo bidimensional - Campo de temperatura às 17.5, 44.4 e 72.5 horas

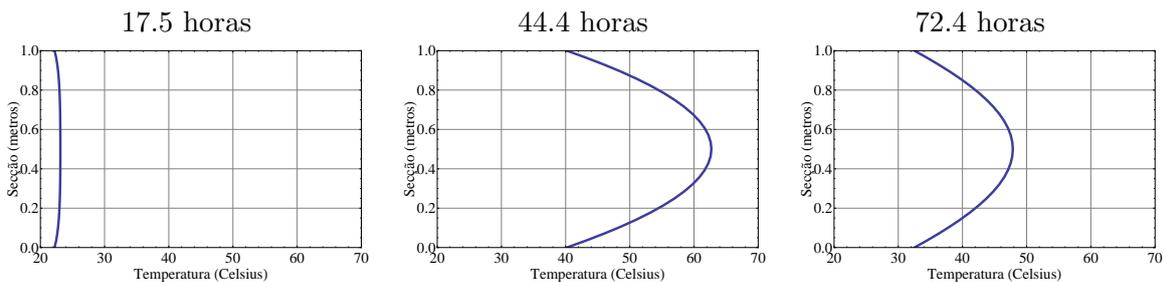


Figura 7.8: Modelo unidimensional - Campo de temperatura às 17.5, 44.4 e 72.5 horas

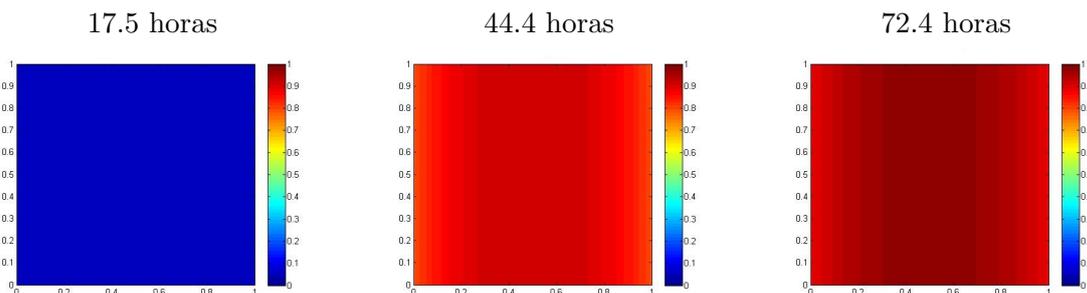


Figura 7.9: Modelo bidimensional - Grau de hidratação às 17.5, 44.4 e 72.5 horas

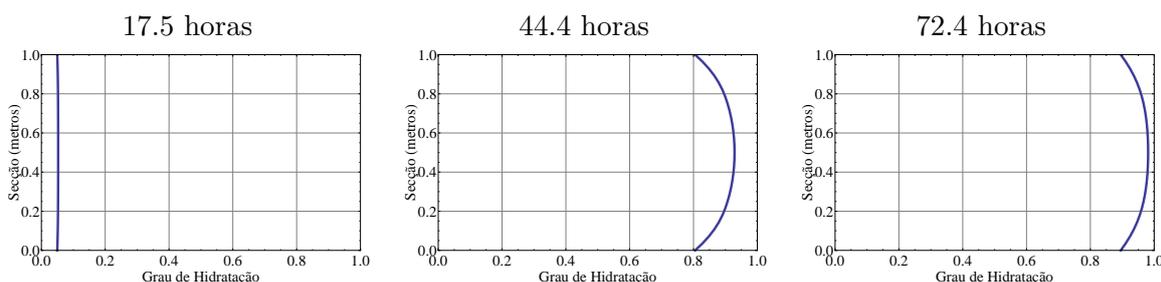


Figura 7.10: Modelo unidimensional - Grau de hidratação às 17.5, 44.4 e 72.5 horas

Tabela 7.2: Características do ensaio - Modelo bidimensional de elementos híbridos

Propriedades Térmicas do Betão	
Tipo de cimento	CA CEM I 42.5R
Condutividade Térmica	$k_{\infty} = 2.6 \text{ W/mK}$
Calor Específico	$\rho c = 2400 \text{ kJ/m}^3\text{K}$
Energia de Activação	$E_a = 43.83 \text{ kJ/mol}$
Taxa de produção de calor	$A_T = 2.15 \times 10^8 \text{ W/kg}$
Calor libertado a tempo infinito	$Q_{\infty} = 355.2 \text{ kJ/kg}$
Peso volúmico do cimento	$C_c = 400 \text{ kg/m}^3$
Geometria e Malha de Elementos Finitos - Modelo Unidimensional	
Espessura da peça	1 m
Número de Elementos	1
Grau de Aproximação	9
Integração no tempo	
Passo	15 min

Na figura 7.11, são apresentadas as evoluções da temperatura e do grau de hidratação ao longo do tempo em ambos os modelos, sendo visível a proximidade dos valores relativos ao grau de hidratação. Na evolução de temperatura, existem pequenas discrepâncias após o valor máximo, mas sempre inferiores a 2°C . Diferenças desta ordem podem ser devidas apenas a

problemas de precisão, nomeadamente a diferenças nos valores da tolerância numérica. Para clarificar as diferenças apresentam-se, na figura 7.12 as distribuições da temperatura e do grau de hidratação ao longo da secção em cinco instantes de tempo, onde se representa com linha contínua os resultados do modelo criado e a tracejado os resultados do modelo bidimensional.

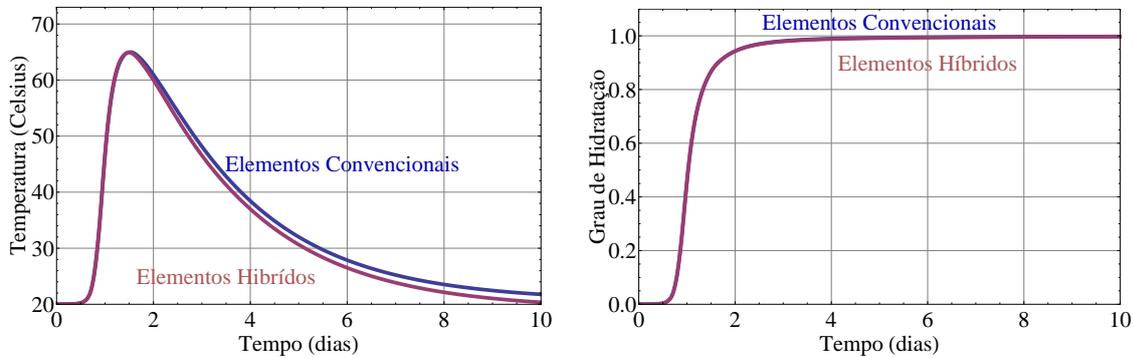


Figura 7.11: Comparação com modelo híbrido bidimensional - 1 camada

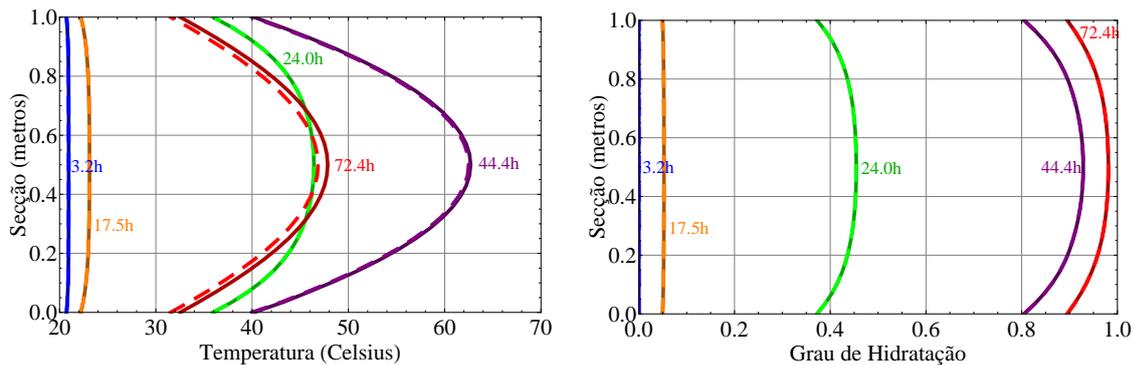


Figura 7.12: Comparação com o modelo bidimensional às 3.2, 17.5, 24.0, 44.4 e 72.4 horas

7.4 Conclusões

Neste momento, o modelo unidimensional de elementos finitos convencionais encontra-se validado por comparação com outros programas. Quando se consideram hipóteses semelhantes, todos os modelos aqui considerados dão resultados praticamente coincidentes.

Verificou-se uma grande correspondência com o modelo unidimensional de elementos híbridos. As discrepâncias verificadas no teste adiabático devem-se a problemas de representação da lei de hidratação e estão claramente justificadas. Todas as outras diferenças encontradas foram motivadas pela consideração (ou não) de uma libertação inicial de calor.

Olhando para o teste com o modelo bidimensional, parece legítimo concluir que nos casos em que o comportamento é unidimensional ambos os programas recuperam os mesmos resultados.

Capítulo 8

Comparação com Ensaios Experimentais

8.1 Introdução

Pretende-se agora comparar os resultados fornecidos por este modelo com resultados experimentais. Tem-se a certeza de que a implementação está correcta e de que as hipóteses são, pelo menos, plausíveis. Todavia, falta saber até que ponto estas hipóteses são válidas na simulação de casos reais. Assim, são utilizados dois casos experimentais retirados de [2, 4, 45, 46] que se apresentam em seguida.

8.2 Laje de um Armazém

O primeiro caso é a betonagem de uma laje estrutural de um armazém que servirá para armazenamento de leite, que se ilustra na figura 8.1. Trata-se de uma laje de grandes dimensões em planta, cuja betonagem terá, forçosamente, de ser faseada. Na figura 8.2 encontram-se as dimensões da laje, bem como o faseamento das betonagens e o local dos sensores térmicos em planta.

Conforme se pode observar, trata-se de um exemplo de aplicação claro para um modelo unidimensional. As dimensões da laje, mesmo considerando as etapas de betonagem ($\approx 6 \times 137m^2$), tornam a influência das fronteiras de extremidade muito diminuta na zona central. O ensaio é, portanto, claramente controlado pelas faces superior e inferior da peça. Considerou-se a condição de convecção em ambas as fronteiras, adoptando para o solo $17^\circ C$ e um conjunto de valores medidos por um sensor para a temperatura ambiente. Considera-se a velocidade do vento nula em ambas as faces, numa porque está em contacto com o solo e na outra porque se



Figura 8.1: Fotografia da laje antes da betonagem [4]

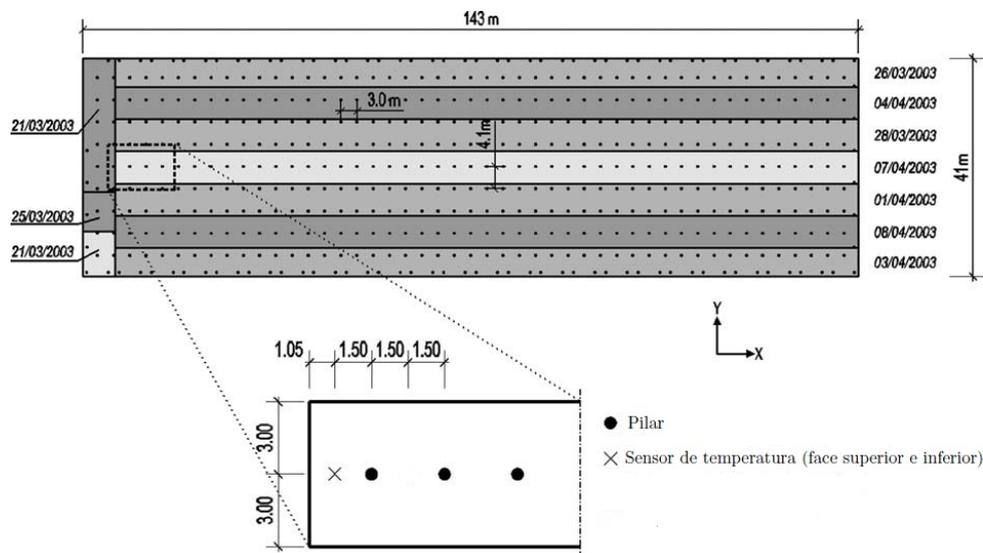


Figura 8.2: Planta da laje [4]

trata do interior de um pavilhão, conforme se pode observar na figura 8.1. Para a emissividade, adopta-se o valor 0.95. Na tabela 8.1 encontram-se as restantes especificações necessárias à corrida do exemplo.

Este ensaio levanta, contudo, um problema de modelação. Em [45] o tipo de cimento utilizado é identificado como CEM I 42.5R, mas não é identificado o fabricante. Esta omissão poderia, de facto, ser desprezável mas, neste caso concreto, os dois produtores nacionais apresentam algumas diferenças significativas, sobretudo relativamente à energia de activação, conforme se observa na tabela 8.1. Existe, em [4], uma curva pseudo-adiabática (ver figura 8.3) que poderia ajudar a esclarecer a situação. No entanto, este gráfico não foi obtido experimentalmente, mas com um modelo que o traçou a partir da composição química do cimento. De facto, à partida, utilizando

Tabela 8.1: Características dos ensaios - Laje de armazém

Propriedades Térmicas do Betão	
Tipo de cimento	CEM I 42.5R
Empresa A	
Condutividade Térmica	$k_{\infty} = 2.6 \text{ W/mK}$
Calor Específico	$\rho c = 2400 \text{ kJ/m}^3\text{K}$
Energia de Activação	$E_a = 43.83 \text{ kJ/mol}$
Taxa de produção de calor	$A_T = 2.15 \times 10^8 \text{ W/kg}$
Calor libertado a tempo infinito	$Q_{\infty} = 355.2 \text{ kJ/kg}$
Empresa B	
Condutividade Térmica	$k_{\infty} = 2.6 \text{ W/mK}$
Calor Específico	$\rho c = 2400 \text{ kJ/m}^3\text{K}$
Energia de Activação	$E_a = 44.38 \text{ kJ/mol}$
Taxa de produção de calor	$A_T = 3.522 \times 10^8 \text{ W/kg}$
Calor libertado a tempo infinito	$Q_{\infty} = 370.3 \text{ kJ/kg}$
Peso volúmico do cimento	$C_c = 285 \text{ kg/m}^3$
Geometria e Malha de Elementos Finitos	
Espessura da peça	0.35 m
Número de Elementos	4
Grau de Aproximação	7
Integração no tempo	
Passo	15 min

a equação de calor aplicada ao caso adiabático,

$$\dot{Q} = \rho c \dot{T} \quad (8.1)$$

substituindo \dot{Q} pela definição,

$$A_t f(\alpha) \exp\left[-\frac{E_a}{RT}\right] = \rho c \dot{T} \quad (8.2)$$

obtém-se:

$$A_t f(\alpha) = \rho c \dot{T} \exp\left[\frac{E_a}{RT}\right] \quad (8.3)$$

Sabendo ρc , E_a , R , os valores da temperatura ao longo do tempo e que o valor máximo $f(\alpha)$ é unitário, juntando a expressão retirada de [47],

$$\alpha = \frac{T^{ad}(t) - T_0}{T_{\infty} - T_0} \quad (8.4)$$

e aproximando,

$$\dot{T} = \frac{T_{i+1} - T_i}{t_{i+1} - t_i} \quad (8.5)$$

tem-se, supostamente, tudo o que se necessita para a determinação da evolução da taxa de calor.

Porém, conforme se pode observar na figura 8.3, a curva obtida (traçada a azul) não apresenta nenhum ponto de inflexão, ao contrário das duas simulações obtidas com o modelo criado utilizando os valores do fornecedor A (CA) e B (CB). Fisicamente, a curva de um teste adiabático não pode apresentar um máximo da derivada logo de início, a menos que $f(\alpha)$ seja sempre decrescente, o que não faz sentido. O modelo utilizado na elaboração da curva retirada da literatura assume que $f(\alpha = 0) = 0$ e $\alpha_0 > 0$ por forma a iniciar a reacção, embora não seja claro qual o valor arbitrado para o grau de hidratação inicial, α_0 . Importa ainda observar, na figura 8.3, que a curva apresentada na literatura está sempre acima daquelas que foram calculadas.

Assim, é provável que os cimentos utilizados na determinação de valores a utilizar no modelo (tabelas 2.2 e 2.3) tenham uma composição química diferente daquele que é utilizado nesta laje. É, ainda, expectável que os valores da empresa B forneçam uma melhor aproximação do que os da companhia A mas, em qualquer caso, é provável que a solução fique sempre abaixo das medições reais. Estas discrepâncias não devem, contudo, ser atribuídas ao programa, mas à variação que existe na composição dos cimentos e, conseqüentemente, à indefinição que existe quanto aos parâmetros a introduzir no modelo.

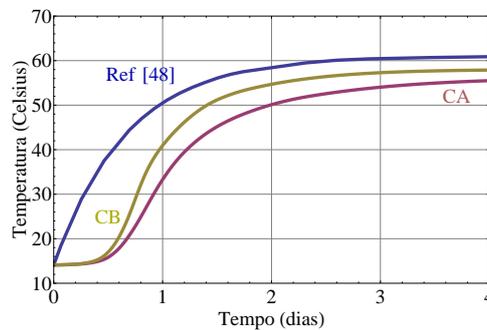


Figura 8.3: Curva de caracterização pseudo-adiabática

Posto isto, opta-se por realizar a simulação utilizando os valores de ambos os fabricantes, onde, como era esperado, devido à grande discrepância entre os valores da energia de activação, A_t , se observam diferenças claras na amplitude dos gráficos obtidos. Observando as figuras 8.4 e 8.5, conclui-se que, em princípio, foi utilizado o cimento do fornecedor B.

Olhando apenas para a empresa B (figura 8.5), verifica-se que próximo da superfície o modelo aproxima bastante bem as medições. Porém, existem algumas discrepâncias no sensor inferior durante a fase descendente, que se pode dever à aproximação assumida para a temperatura do solo. Note-se que, no ensaio, se considera que o solo permanece sempre com uma temperatura constante de $17^{\circ}C$, o que não é completamente fiel à realidade. Nessa fronteira devia ser imposta

uma condição de condução em vez da condição adoptada. No entanto, apesar de tudo, as diferenças são sempre inferiores a 5°C , o que parece razoável.

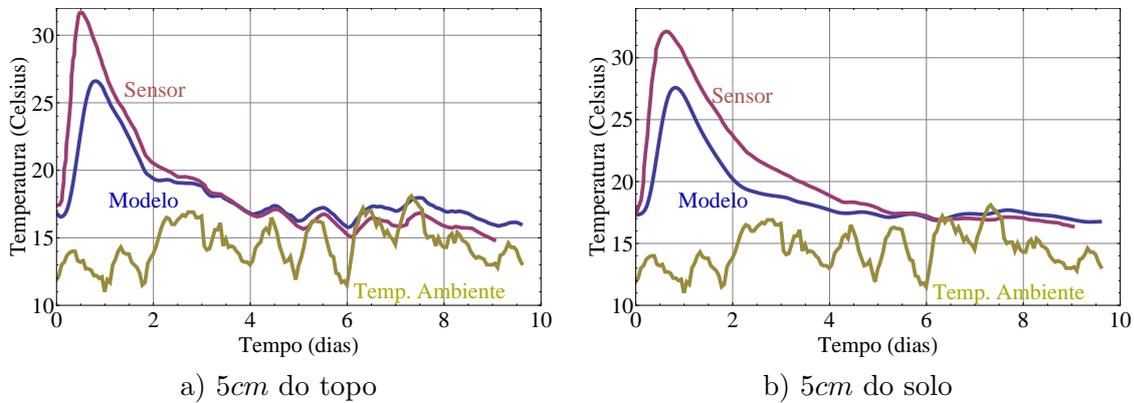


Figura 8.4: Evolução das temperaturas - CA CEM I 42.5R

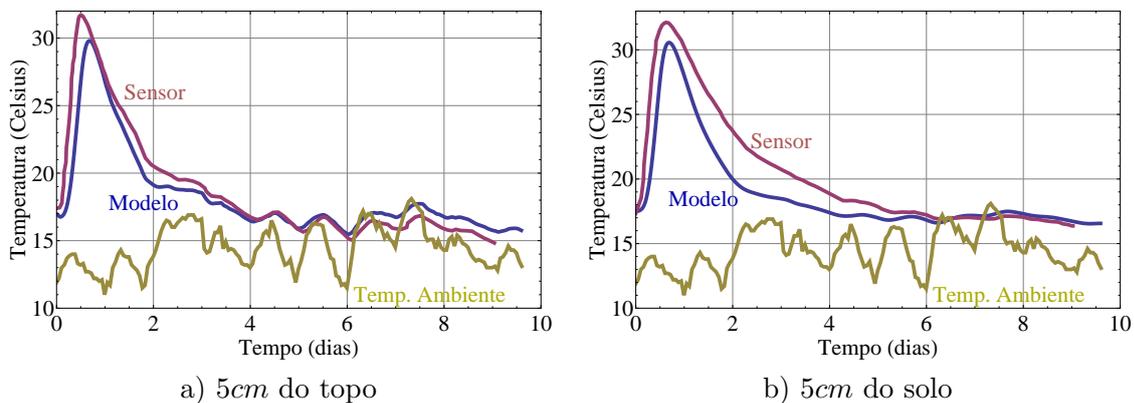


Figura 8.5: Evolução das temperaturas - CB CEM I 42.5R

Neste momento, não é ainda claro como deve ser modelado o início do processo de hidratação. Contudo, à semelhança do que é feito, por exemplo, no *software* comercial DIANA (bastante utilizado na resolução destes problemas), optou-se pelo *push over*, isto é, por forçar a primeira iteração não nula no primeiro passo do processo de análise incremental.

8.3 Torre Eólica

Por fim, optou-se por ensaiar a fundação de uma torre eólica, cujo comportamento é tridimensional. No entanto, verificou-se que, tirando partido da simetria axial, é possível obter bons resultados com um modelo bidimensional [34]. Agora pretende-se saber se, tirando novamente partido do comportamento próximo do eixo, é possível obter uma boa solução no eixo recorrendo a um modelo unidimensional. Até à data e com base na literatura consultada, este caso

nunca foi testado com um modelo unidimensional, pelo que existe todo o interesse em saber se é aplicável. Referências a este ensaio podem ser encontradas em [2, 46].

Com o fim das energias fósseis à vista e, mais recente, com o receio dos desastres nucleares, as energias alternativas têm vindo a ganhar força. Falando no caso português, tonaram-se bastante comuns torres com cerca de $100m$ de altura, onde são instaladas pás que rondam os $50m$ de envergadura. No entanto, estruturas deste porte obrigam, necessariamente, a fundações com enormes dimensões. Estas torres apresentam fundações que em planta têm dimensões na ordem dos $20 \times 20 \times 2m^3$ feitas, geralmente, em betão armado, sendo betonadas de uma só vez.

Como é facilmente perceptível neste ponto do trabalho, atendendo às grandes quantidades de betão envolvidas, são estruturas onde é grande a probabilidade de aparecimento de fendilhação prematura, ou de instalação de um estado de fendilhação eminente causado pelo calor de hidratação. Assim, estamos perante um caso prático onde estas análises fazem todo o sentido (as medições utilizadas adiante resultam, aliás, de uma investigação contratada).

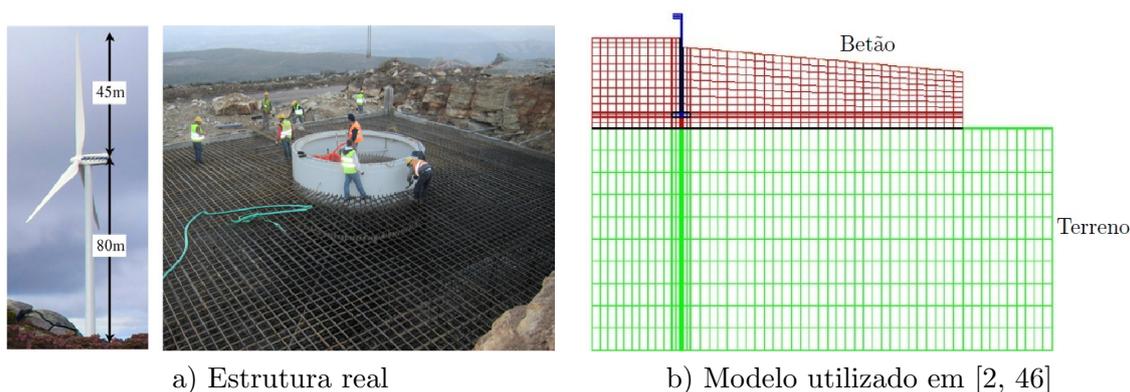


Figura 8.6: Torre eólica e modelo utilizado em [2, 46]

Esta estrutura é axissimétrica, pelo que em [2, 46] foi utilizado o modelo bidimensional representado na figura 8.6 (onde o vermelho simboliza o betão, o azul o anel metálico e o verde o terreno), tendo-se constatado que o erro cometido era aceitável. Contudo, verificou-se que as linhas isotérmicas eram perpendiculares ao eixo central (ver figura 8.7), pretendendo-se então saber se é possível obter bons resultados aproximando o comportamento na zona central da torre com um modelo unidimensional. Na realidade, verifica-se na figura 8.8 que a maioria dos sensores foram, de facto, colocados na zona que agora se pretende analisar, o que vai permitir uma melhor comparação com o modelo criado. Na figura 8.9, é ainda visível uma aproximação da zona central da estrutura onde se incluíram as posições dos sensores cotadas, bem como uma fotografia de pormenor.

Uma betonagem destas dimensões não é, obviamente, instantânea, o que tem de ser tido em

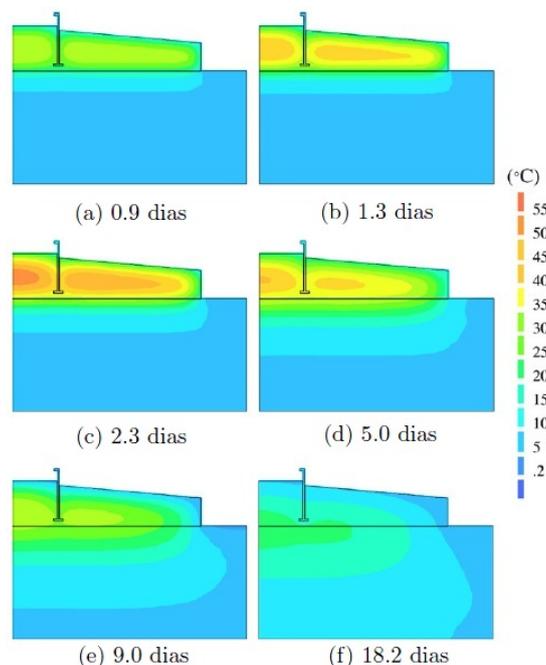


Figura 8.7: Resultados no domínio - Modelo bidimensional [2]

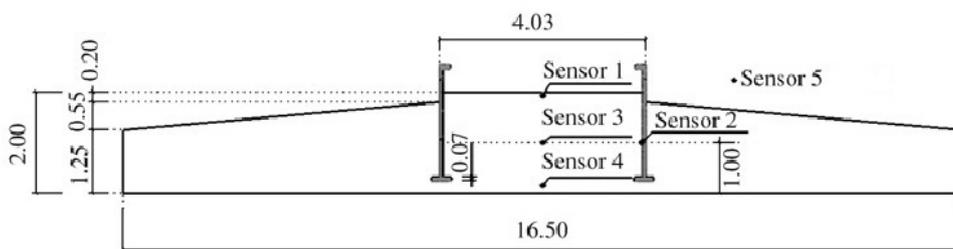
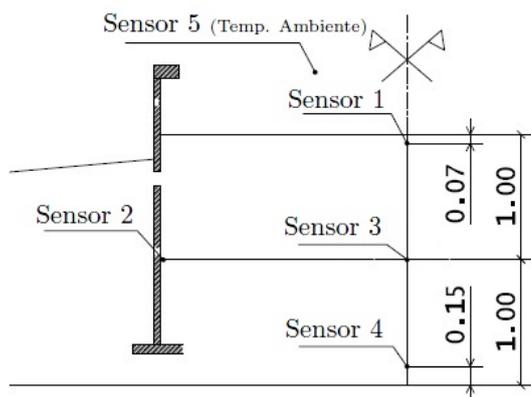
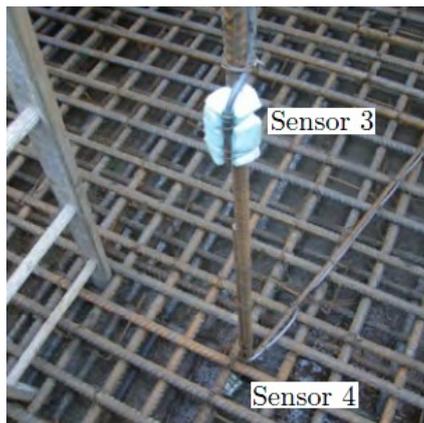


Figura 8.8: Dimensões da fundação e localização dos sensores [46]

conta na interpretação das medições experimentais. Os sensores instalados começaram todos a fazer medições ao mesmo tempo, mas nem todos entraram em contacto com o betão no mesmo instante. Verifica-se, assim, que existe, em todos os sensores, um período inicial onde os valores medidos correspondem à temperatura ambiente, seguidos de um salto que se assumiu como sendo o ponto de início da medição do calor de hidratação (ver figura 8.10). Também se percebe que, sendo uma peça de grandes dimensões em planta e com uma espessura considerável, não é possível que a hidratação tenha ocorrido ao mesmo tempo, o que também é perceptível na figura 8.10. Tentando ter em conta, indirectamente, este fenómeno considerou-se uma distribuição linear para o grau de hidratação inicial, α_0 , tomando o valor 0.004 junto à superfície e 0.005 junto ao maciço. Uma vez que não foi possível observar a betonagem *in situ* e como o programa criado não permite ter em conta casos em que a betonagem, apesar de ser realizada de uma só



Detalhe da localização dos sensores [2]



Fotografia dos sensores 3 e 4[2]

Figura 8.9: Torre eólica - Sensores

vez, é demorada, estas calibrações foram feitas recorrendo ao bom senso e a sucessivas tentativas.

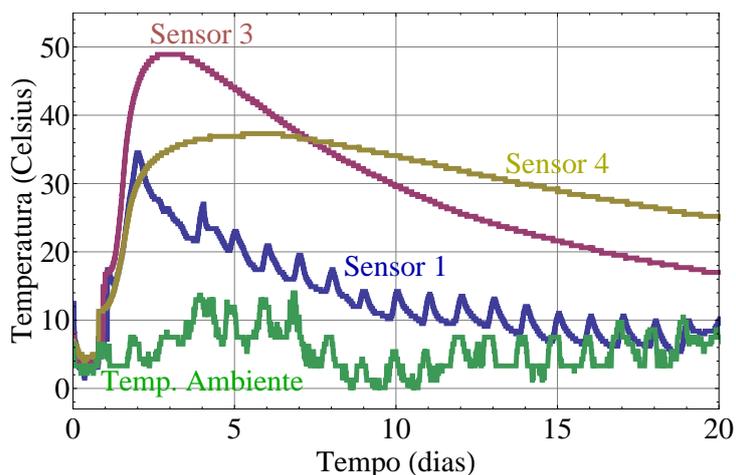


Figura 8.10: Valores medidos nos sensores

Olhando, novamente, para a figura 8.10 interessa identificar tendências gerais que, posteriormente, possam permitir, de alguma forma, verificar as hipóteses assumidas neste exemplo. Como era expectável, a temperatura máxima é obtida no sensor 3, que se localiza a meio da fundação onde, conseqüentemente, a energia demora mais tempo a dissipar. Apesar do sensor 4 ser o primeiro a entrar em contacto com o betão, é aquele em que o pico de calor ocorre mais tarde. Este facto é explicado pela proximidade do maciço rochoso que vai absorver algum calor. Posteriormente, verifica-se que este sensor é também aquele que demora mais tempo a retornar a valores próximos da temperatura ambiente, aparecendo uma zona com declive constante. O maciço rochoso revela alguma inércia térmica e, se é verdade que demorou algum tempo até elevar a sua temperatura, também leva algum tempo a dissipar o calor acumulado depois de ter

aumentado a temperatura.

Tal como na figura 8.6, opta-se por modelar 5m de terreno onde se utiliza uma malha de 5 elementos de grau 5, uma vez que se esperam gradientes relativamente baixos. Quanto à zona de betão, utiliza-se uma malha de 2 elementos de grau 13. O terreno e o betão são modelados com a formulação anteriormente descrita, admitindo no primeiro caso que $A_T = 0$, para assegurar que aí é nula a taxa de libertação de calor, definida pela equação (2.18).

À semelhança do que já acontecia na laje do armazém, neste caso também se conhece apenas o tipo do cimento (CEM II AL 42.5R), mas não a empresa que o fabricou. Assim, testam-se novamente as duas empresas, como se mostra na tabela 8.2.

Quanto às condições de fronteira, o modelo bidimensional considera convecção na face superior e fluxo nulo na face inferior. No entanto, no modelo agora criado opta-se por manter a convecção na fronteira superior, mas por adoptar a condição de temperatura prescrita para a inferior. Na face superior utilizam-se os valores medidos pelo sensor 5, e na base uma temperatura fixa e igual a $9.5^{\circ}C$. Os $9.5^{\circ}C$ são determinados com base numa análise da variação da temperatura em profundidade apresentada em [2], tendo-se constatado que, a partir dos 5m, a temperatura tende a estabilizar neste valor. Não sendo dito nada quanto à emissividade, utiliza-se o valor médio de 0.9. Relativamente à velocidade do vento na fronteira superior também nada é dito, mas em [46] é referido que, sendo este um local onde o vento circula a baixas velocidades próximo do solo ($< 5km/h$) e porque foi colocada uma membrana geotêxtil, se recomenda um coeficiente de convecção-radiação constante de $10Wm^{-2}K^{-1}$. Optou-se por, com base naquele coeficiente, calcular a temperatura ambiente média e determinar uma velocidade média do vento correspondente, ou seja $0.01m/s$. Na tabela 8.2 pode ser encontrada a ficha técnica do ensaio.

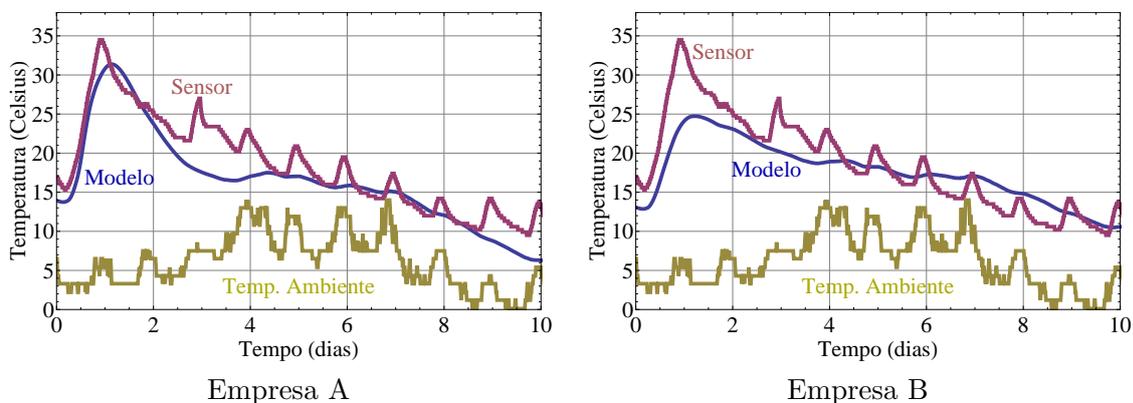


Figura 8.11: Torre Eólica - Sensor 1

Nas figuras 8.11, 8.12 e 8.13, apresentam-se os resultados para os vários sensores, considerando as empresas A e B. Observa-se que os valores da empresa A modelam melhor os

Tabela 8.2: Características dos ensaios - Torre eólica

Propriedades Térmicas do Betão	
Tipo de Cimento	CEM II A L 42.R
Empresa A	
Condutividade Térmica	$k_{\infty} = 2.6 \text{ W/mK}$
Calor Específico	$\rho c = 2400 \text{ kJ/m}^3\text{K}$
Energia de Activação	$E_a = 51.02 \text{ kJ/mol}$
Taxa de produção de calor	$A_T = 3.553 \times 10^9 \text{ W/kg}$
Calor libertado a tempo infinito	$Q_{\infty} = 352.5 \text{ kJ/kg}$
Empresa B	
Condutividade Térmica	$k_{\infty} = 2.6 \text{ W/mK}$
Calor Específico	$\rho c = 2400 \text{ kJ/m}^3\text{K}$
Energia de Activação	$E_a = 41.30 \text{ kJ/mol}$
Taxa de produção de calor	$A_T = 7.683 \times 10^7 \text{ W/kg}$
Calor libertado a tempo infinito	$Q_{\infty} = 333.9 \text{ kJ/kg}$
Peso volúmico do cimento	$C_c = 220 \text{ kg/m}^3$
Propriedades Térmicas do Granito	
Condutividade Térmica	$k_{\infty} = 2.79 \text{ W/mK}$
Calor Específico	$\rho c = 2040 \text{ kJ/m}^3\text{K}$
Geometria e Malha de Elementos Finitos na Zona de Betão	
Espessura da peça	2 m
Número de Elementos	2
Grau de Aproximação	13
Geometria e Malha de Elementos Finitos na Zona de granito	
Espessura da peça	5 m
Número de Elementos	5
Grau de Aproximação	5
Integração no tempo	
Passo	15 min

valores medidos até ao segundo dia no sensor 1, enquanto os valores da empresa B reproduzem melhor as restantes medições. Neste caso, não existe uma tendência clara para uma companhia, pelo que não é possível concluir qual foi o fornecedor. A consequência prática desta incerteza é que inviabiliza a realização de afinações adicionais, uma vez que se pode estar a cair no erro de, em vez de melhorar a solução, adulterar os resultados, conduzindo a solução para o fornecedor errado. É então preferível assumir as limitações encontradas e apresentar apenas conclusões gerais, tendo em conta sobretudo o andamento e não tanto o afastamento.

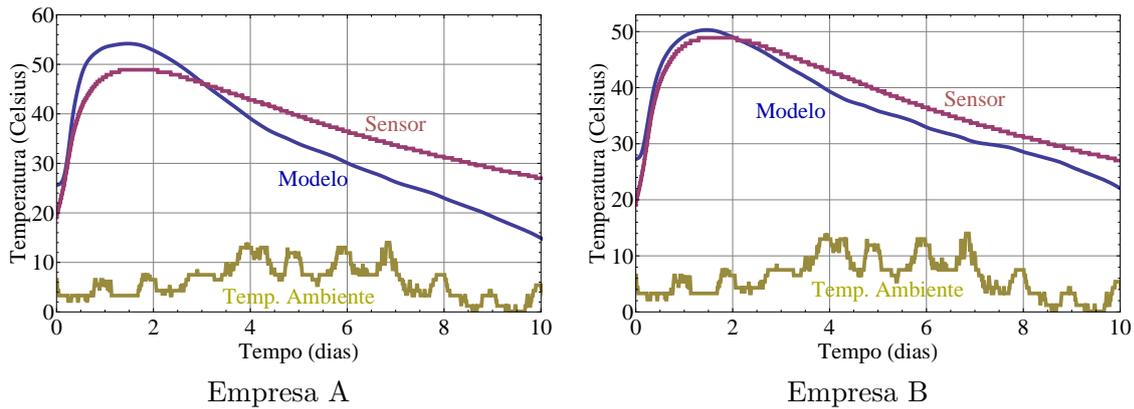


Figura 8.12: Torre Eólica - Sensor 3

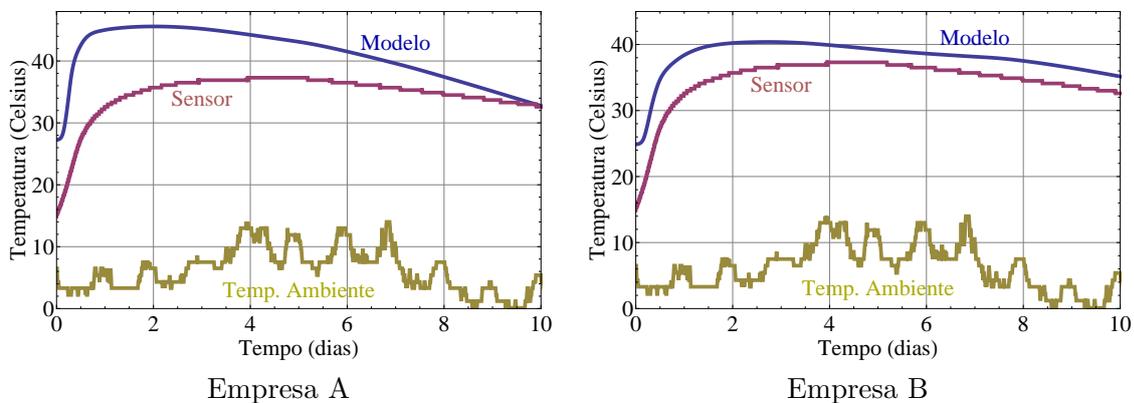


Figura 8.13: Torre Eólica - Sensor 4

Na figura 8.11 estão representados os resultados do sensor 1. É visível que o modelo não representa adequadamente as oscilações medidas pelo sensor. De facto, no caso de estruturas ao ar livre, existem factores que não são integrados no modelo, tais como a chuva (existe a indicação de que choveu¹) e o ciclo dia/noite (mesmo considerando que a temperatura é a mesma, não é indiferente ser de dia ou de noite devido à diferente radiação). Assim, sendo insuficiente a definição das condições ambientais, é normal que o programa não reproduza exactamente as oscilações que ocorrem próximo da superfície, embora, à partida, deva obter as tendências medidas, o que se verifica.

O sensor 3 encontra-se a meia altura da fundação, sendo portanto o local que sofre menos influência das condições de fronteira. Conforme se pode observar na figura 8.12, não surpreende que este seja o ponto onde são obtidos melhores resultados, com erros na ordem dos $5^{\circ}C$. Os valores obtidos recorrendo aos coeficientes da empresa B estão mais próximos dos medidos, embora não seja possível afirmar com certeza que foi este o fornecedor.

Os resultados numéricos e experimentais referentes ao sensor 4 estão representados na figura

¹Informação dada pelo autor do trabalho experimental.

8.13. Falando especificamente dos resultados com os valores da empresa B, verifica-se que o andamento é bem simulado pelo modelo e que, à parte do momento inicial, o erro se situa numa gama de valores aceitável.

Conclui-se que o modelo unidimensional traduz adequadamente as tendências da estrutura mas, infelizmente, os valores obtidos apresentam, nalguns casos, erros próximos dos $10^{\circ}C$. De referir ainda que, com o intuito de esclarecer algumas imprecisões nos dados, durante esta análise se contactou o autor dos trabalhos experimentais e foi transmitida a informação de que o cimento utilizado apresentava uma percentagem de cinzas superior ao normal, o que pode, por si só, justificar alguns dos desvios encontrados.

Existem parâmetros que ainda poderiam ser sujeitos a afinação, mas como existe uma grande incerteza relativamente às propriedades do cimento optou-se por não o fazer. Assume-se, assim, as limitações encontradas na modelação deste caso e, com grande frustração, admiti-se que, apesar das diligências efectuadas e do esforço dispendido, este ensaio não é totalmente conclusivo. No entanto, fica claro que o modelo recupera as tendências esperadas e existe a convicção forte de que grande parte dos erros se devem, muito provavelmente, à incerteza relativa aos parâmetros do cimento.

Capítulo 9

Conclusões

9.1 Resultados

Os resultados apresentados foram obtidos através do programa unidimensional de elementos finitos convencionais desenvolvido pelo autor e comparados com resultados obtidos com programas elementos híbridos-mistos e em ensaios experimentais.

Verifica-se que praticamente não existem diferenças na qualidade da solução entre os elementos convencionais e os híbridos-mistos. Quando é feita a comparação entre modelos unidimensionais a concordância é, de facto, enorme e as diferenças encontradas podem ser justificadas por factores externos às diferentes formulações. Assim, e analisando as discordâncias encontradas, é também possível concluir que na criação destes modelos é imperativo garantir que não é libertado calor após a hidratação total. Caso contrário, aparecem resultados sem sentido físico aquando da realização de análises mais longas ou em ensaios mais sensíveis a este efeito, *e.g.* o teste adiabático. Ainda por comparação com o mesmo modelo, verifica-se que não é indiferente considerar a libertação de calor no instante inicial como nula, embora as diferenças sejam pequenas. Relativamente à comparação com o modelo bidimensional, verificou-se que, considerando as mesmas hipóteses, os resultados são também bastante próximos. Neste caso, as diferenças encontradas devem-se apenas a problemas de precisão numérica.

Relativamente aos ensaios experimentais, é necessário fazer uma ressalva relativamente à incerteza encontrada na definição de alguns parâmetros importantes, nomeadamente o tipo de cimento e o momento exacto em que cada sensor ficou *submerso* no betão. Todavia este tipo de dúvidas são naturais na interpretação de ensaios, sobretudo quando apenas se tem acesso a valores medidos e a trabalhos realizados sobre o assunto, *i.e.*, quando não se assistiu *in loco* aos ensaios. Assim, as conclusões aqui retiradas devem ser vistas com alguma cautela, embora

pareça seguro tecer algumas considerações.

Conclui-se que, desde que se defina de forma criteriosa alguns dados, o modelo unidimensional fornece bons resultados dentro do seu domínio de aplicação. Existem, obviamente, limitações como a não consideração da radiação solar directa (considerada indirectamente através da temperatura ambiente) e da chuva. Todavia, aquilo que se verifica é que a não consideração explícita destes factores não conduz a soluções necessariamente erradas (excepto, naturalmente, em casos extremos), isto é, existem discrepâncias ao nível das oscilações, mas as tendências parecem ser bem modeladas.

A laje de betão do armazém encontra-se perfeitamente dentro do domínio de aplicação do modelo e os resultados falam, de facto, por si. Conclui-se, portanto, que nestes casos podem ser utilizados modelos unidimensionais com segurança. A torre eólica é um pouco diferente, uma vez que ficaram bastantes mais dúvidas relativamente a alguns parâmetros importantes. Além disso, o modelo considera as betonagens como instantâneas o que neste caso pode ser um pouco forçado. A via encontrada para ter, indirectamente, em conta este facto foi considerar diferentes valores para o grau de hidratação inicial ao longo da peça, *i.e.*, valores superiores junto à base que vão diminuindo até à superfície. Poderiam ainda ter sido feitos ajustamentos adicionais relativamente à distribuição do grau de hidratação. No entanto, uma vez que os resultados não estavam a tender de forma clara para nenhum dos dois tipos de cimento possíveis, optou-se por assumir as limitações encontradas de forma a evitar conclusões forçadas. Assim, escolheu-se a via intelectualmente honesta, assumindo as margens de erro encontradas (da ordem dos $10^{\circ}C$). Todavia, fica a ideia que, havendo maior certeza relativamente ao cimento e fazendo ajustamentos adicionais, o modelo tenderia para a solução correcta.

Apesar de tudo, aquilo que parece importante concluir é que, mesmo integrando as incertezas, o modelo nunca deu resultados inverosímeis e, caso se considere uma margem de segurança adequada para cada aplicação, pode perfeitamente ser utilizado na previsão de casos reais, onde também não se sabe *a priori* quais serão as temperaturas ambiente.

Posto isto, ficou criada, explicada e validada experimentalmente uma ferramenta que pode, de forma simples e acessível, ser utilizada por empreiteiros, projectistas e investigadores, embora falte ainda incorporar a parte mecânica do problema.

9.2 Formação

O presente trabalho permitiu ao autor adquirir um conjunto de competências que dificilmente desenvolveria de outra forma. Assim, neste caso concreto, o aspecto formativo em temas que não são abordados na parte curricular do mestrado em engenharia civil foi significativo. Neste âmbito, para além dos aspectos ligados à hidratação do cimento, destacam-se os conhecimentos adquiridos em programação (concretamente em Fortran77 e Mathematica), na aplicação de métodos numéricos em engenharia (durante a realização deste documento foi, inclusivamente, possível assistir ao Congresso sobre os Métodos Numéricos em Engenharia que se realizou em Coimbra), na interpretação e análise de resultados experimentais. De referir ainda que se aproveitou esta oportunidade para aprender a utilizar o \LaTeX .

9.3 Desenvolvimentos Futuros

O tema da hidratação do betão é relativamente recente e encontra-se muito longe de estar esgotado. Existem, portanto, muitas linhas que podem ser seguidas com o intuito de aumentar o conhecimento existente. O desenvolvimento óbvio de um modelo unidimensional passa por aumentar o número de dimensões. No entanto, existem outros caminhos possíveis.

A primeira proposta sugerida passa por uma melhor definição das condições iniciais de hidratação. Os resultados experimentais mostram que no momento em que começa a hidratação do betão existe logo uma libertação de calor. Contudo, conforme foi abordado, existem algumas dúvidas acerca de como se deve iniciar a reacção. Assim, este parece um terreno propício à realização de novos trabalhos.

Um outro caminho possível é a criação de um modelo em que seja possível introduzir os sistemas de refrigeração utilizados em barragens. Este modelo tem, forçosamente, de ser tridimensional por forma a permitir modelar adequadamente as estruturas em causa. Existem, neste campo concreto, propostas mais práticas para o desenvolvimento das técnicas de refrigeração. Tem sido tentado, até agora sem sucesso, o recurso a fluídos que possam ser mais competitivos do que a água na relação custo/qualidade. Existe ainda uma equipa que está a trabalhar com o intuito de alterar o próprio método de refrigeração, *i.e.*, em vez de apenas passar água (ou outro fluído) numa canalização própria e construída para o efeito, fazer uma rega controlada a partir do interior do betão durante o tempo da reacção.

A última sugestão prende-se com a relação do problema térmico com o problema mecânico. É sabido que a evolução das propriedades mecânicas do betão é fortemente influenciada pela evolução das temperaturas. No entanto, os modelos termo-mecânicos que existem actualmente

desprezam, em certa medida, esta relação. Sabe-se que, comparativamente, a influência do comportamento mecânico no campo de temperaturas é menor que o oposto. Contudo, sempre que aparece uma fenda, é criada uma descontinuidade no campo de temperaturas alterando a forma de transmissão de calor. Além disso, as variações de volume da peça podem alterar as próprias condições de fronteira ao originar, por exemplo, perdas de contacto. A maioria dos modelos encontrados limita-se a utilizar o *output* da análise térmica como *input* do problema mecânico. Mas, estas análises são pesadas e, conseqüentemente, demasiadamente lentas por forma a poderem ser utilizadas de forma corrente por projectistas e empreiteiros. As experiências de acoplamento que foram feitas noutros problemas tiveram resultados bastante animadores, não tanto na qualidade da solução, mas por exigirem de menos espaço de memória e permitem análises mais rápidas, sobretudo quando se considera mais de 100000 graus de liberdade [48]. Deste modo, propõe-se a criação de um modelo termo-mecânico acoplado para este problema.

Referências Bibliográficas

- [1] Branco F, Mendes P, Mirambell E. Heat of Hydration Effects in Concrete Structures. *ACI Materials Journal* 1992.
- [2] Azenha M. Numerical Simulation of the Structural Behaviour of Concrete Since its Early Ages, Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, 2009.
- [3] Estrada C, Godoy L, Prato T. Thermo-mechanical behavior of a thin concrete shell during its early ages. *Thin Walled Structures* 2006; **44**: 483-495.
- [4] Faria R, Azenha M, Figueiras JA. Modelling of concrete at early ages: Application to an externally restrained slab. *Cement and Concrete Composites* 2006; **28** (6): 572-585.
- [5] Van Breugel K. Prediction of temperature development in hardening concrete. *In Prevention of thermal cracking in concrete at early ages*, Report 15, (R. Springenschmid, Ed), E&FN SPON, 1998.
- [6] Gutsch A. Properties of early age concrete: Experiments and modelling. *In Early Age Cracking in Cementitious Systems*, EAC 01, Haifa, 2001.
- [7] Atrushi D, Bjontegaard O, Kanstad T, Sellevold E. Creep deformations in hardening concrete: Test method investigations and the effect of temperature”, IPACS Document, Subtask 3.2, 2001.
- [8] Holt E. Early age autogeneous shrinkage of concrete, VTT Publications, Technical Research Centre of Finland, 2001.
- [9] Jennings HM, Johnson S. Simulation of microstructure development during the hydration of a cement compound. *J Am Ceramic Society* 1986; **11**: 790-795.
- [10] Van Breugel K. Simulation of Hydration and Formation of Structure in Hardening Cement-Based Materials, Tese de Doutoramento, Technical University of Delft, 1991.

- [11] Navi P, Pignat C. Simulation of cement hydration and the connectivity of the capillary pore space, *Advanced Cement Based Material* 1996; 4 (2): 58-67.
- [12] Bentz D. Three-dimensional computer simulation of Portland cement hydration and microstructure development. *J Am Ceramic Society* 1997; 80 (1): 3-21.
- [13] Bishnoi S. Vector Modelling of Hydrating Cement Microstructure and Kinetics, Tese de Doutorado, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2008.
- [14] Nothnagel R, Budelmann H. Model for the formation of microstructure in cement paste during hydration. In *Proc Int RILEM Symp CONMOD'08* (E Schlangen, G de Scutter, Eds), Delft, 2008, pp 362-368.
- [15] Wang X-Y, Lee H-S. Modelling the hydration of concrete incorporating fly ash or slag. *Cement and Concrete Research* 2010; 40: 984-996.
- [16] Ulm F, Coussy O. Modeling of thermo-chemo-mechanical couplings of concrete at early age. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 1995; 121(7): 1123-1132.
- [17] De Schutter G, Taerwe L. General hydration model for Portland cement and blast furnace slag cement. *Cement and Concrete Research* 1995; 25: 953-604.
- [18] Cervera M, Faria R, Oliver J, Prato T. Numerical modeling of concrete curing, regarding hydration and temperature phenomena. *Computers & Structures* 2002; 80 (18-19): 1511-1521.
- [19] Schindler AK, Folliard KJ. Heat of hydration models for cementitious materials. *ACI Materials Journal* 2005; 102 (1): 24-33.
- [20] Gawin D, Pesavento F, Schrefler BA. Hygro-thermo-chemo-mechanical modeling of concrete at early ages and beyond. Part I: Hydration and hygro-thermal phenomena. *Int J Numerical Method in Engineering* 2006; 67: 299-331.
- [21] Myers TG, Charpin JPF. Modelling the temperature, maturity and moisture content in a drying concrete block. *Mathematics-in-Industry Case Studies Journal* 2008; 1: 24-48.
- [22] Lin F, Meyer C. Hydration kinetics modeling of Portland cement considering the effects of curing temperature and applied pressure. *Cement and Concrete Research* 2009; 39: 255-265.

- [23] Di Luzio G, Cusatis G. Hygro-thermo-chemical modeling of high performance concrete: Theory. *Cement and Concrete Research* 2009; **31**: 301-308.
- [24] D'Aloia L. Early age kinetics: Activation energy, maturity and equivalent age. Early age cracking in cementitious systems, Report 25 (A Bentur, Ed), RILEM Publications, 2001.
- [25] Teixeira de Freitas J, Pham C, Marques J. Application to the Modelling of the Early Age Thermal Response of Concrete. Internal Report DECivil; Lisboa 2010.
- [26] Marchão C, Appleton J. Betão Armado e Pré-Esforçado I: folhas de apoio às aulas. IST; Lisboa 2007.
- [27] Wilson E. Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures, A Physical Approach With Emphasis on Earthquake Engineering. *Computers and Structures, Inc.* 2002.
- [28] Lienhard IV J, Lienhard V J; A Heat Transfer Textbook. *Phlogiston Press* 2008.
- [29] Deus J, Dias J, Pimenta M, Noronha A, Peña T, Brogueira P. Introdução à Física. *McGraw-Hill*; Lisboa 2000. *RILEM Publications*; 2001.
- [30] D'Aloia L, Chanvillard G. Determining the "apparent" activation energy of concrete: E_a - Numerical simulations of the heat of hydration of cement. *Cement and Concrete Research* 2002.
- [31] Pina H. Métodos Numéricos. *Escolar Editora*; Lisboa 2010.
- [32] Turner M, Clough R, Martin H, Topp L. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *Journal of Aeronautical Sciences*, Vol. **23**(9), 805-823; 1956.
- [33] Pargana J, Teixeira de Freitas J. One Dimensional Mixed Hybrid Element for the Early Age Transient Thermal Response of Concrete. IST; Lisboa 2009.
- [34] N.A. Manual do utilizador do DIANA; sem data. Consultado em <http://tnodiana.com/upload/files/DIANA/942/HTML/Diana.html> a 2011/05/25.
- [35] General Accounting Office. GAO/IMTEC-92-26. *General Accounting Office*; Washington D.C. 1992.
- [36] Teixeira de Freitas J, Pargana J, Pham C. Hybrid-Mixed Finite Element Modelling of the Early Age Thermal Response of Concrete. Internal Report DECivil; Lisboa 2010.

- [37] Pereira O. Integração Numérica e Locking. IST; Lisboa 2003.
- [38] Camotim D. Análise Geometricamente Não Linear de Estruturas Reticuladas. IST; Lisboa 2010.
- [39] Lemos C, Pina H. Métodos numéricos, complementos e guia prático. *IST Press*; Lisboa 2006.
- [40] Teixeira de Freitas J, Castro L. Introdução ao Método dos Elementos Finitos: Estruturas Articuladas. IST; Lisboa 2010.
- [41] Teixeira de Freitas J, Castro L. Introdução ao Método dos Elementos Finitos: Elasticidade Plana e Tridimensional. IST; Lisboa 2010.
- [42] Teixeira de Freitas J, Castro L. Pórticos. IST; Lisboa 2010.
- [43] Azevedo A. Método dos Elementos Finitos. FEUP; Porto 2003.
- [44] Teixeira de Freitas J, Pargana J, Pham C. Hybrid-Mixed Finite Element Modelling of the Early Age Thermal Response of Concrete. Congress on Numerical Methods in Engineering; Coimbra 2011.
- [45] Azenha M. Comportamento do betão nas primeiras idades. Fenomenologia e análise termo-mecânica. Tese de Mestrado FEUP; Porto 2004.
- [46] Faria R, Azenha M. Temperatures and stress due to cement hydration on the R/C foundation of a wind tower -A case study. *Engineering Structures* **30**: 2392-2400, 2007.
- [47] Ulm F, Coussy O. Couplings in early-age concrete: from material modeling to structural design. *Splids Structures Vol.35* (31-32): 4295-4311, 1996.
- [48] Koric S, Hibbeler L, Thomas B. Explicit coupled thermo-mechanical finite element model of steel solidification. *Int J Numerical Methods in Engineering*; 2009.
- [49] Apostol T. Cálculo - Volume 1. *Editora Reverté*; Barcelona 1979.

Bibliografia

Almeida P. Introdução ao \LaTeX . *Escolar Editora*; Lisboa 1996.

Teixeira de Freitas J, Almeida J, Pereira E. Non-Conventional Formulations for the Finite Element Method; IST; Lisboa 1999.

Page C. Professional Programmer's Guide to Fortran 77. University of Leicester; 1995.

Oetiker T, Partl H, Hyna I, Schlegl E; Uma não tão pequena introdução ao \LaTeX 2 ϵ . Cambridge 2007.

Pereira O. Introdução ao Método dos Elementos Finitos na Análise de Problemas Planos de Elasticidade. IST; Lisboa 2005.

Grupo de Análise de Estruturas do IST. Tabelas de Análise de Estruturas. IST; Lisboa 2002.

Lewis R, Nithiarasu P, Seetharamu K. Fundamentals of the finite element method for heat and fluid flow. *John Wiley & sons, Ltd* 2004.

R. Bento, M. Lopes; Modelação Fisicamente Não Linear de Estruturas de Betão Armado. IST; Lisboa 1999.

Reddy J. An Introduction to the Finite Element Method. *McGraw-Hill*; 1993.

Marques J, Simões F; Análise de uma laje pelo método dos Elementos Finitos. IST; Lisboa 2010.

Quintela A. Hidráulica. *Fundação Calouste Gulbenkian*; Lisboa 2005.

Kreyszig E. Advanced Engineering Mathematics. *John Wiley & Sons, Inc*; 2006.

Baker A. Finite Element Computational Fluid Mechanics. *McGraw-Hill*; 1985.

Virtuoso F. Disciplina de Estruturas metálicas, Estabilidade de estruturas: Colunas e vigas-coluna. IST; Lisboa 2009.

Neville A, Brooks J. Concrete Technology. *Prentice Hall*; 2004.

Cook R, Malkus D, Plesha M, Witt R. Concepts and Applications of Finite Element Analysis. *John Wiley & Sons*; 1988.

Mangano S. Mathematica Cookbook. *O'Reilly*; 2010.

Hoste J. Mathematica Demystified. *McGraw-Hill*; 2009

Adams JC, Brainerd WS, Hendrickson RA, Main RE, Martin JT, Smith BT. The Fortran 2003 Handbook. *Springer*; 2009

Apostol T. Cálculo - Volume 2. *Editores Reverté*; Barcelona 1979.

Oetiker T, Partl H, Hyna I, Schlegl E. Uma não tão pequena introdução ao $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$. Versão 4.20.1; 2007

Pakin S. The Comprehensive \LaTeX Symbol List. 2009

Robson P. \LaTeX Table Tricks. 2009

Cervera M, Oliver J, Prato T. Thermo-chemo-mechanical model for concrete - I: hydration and aging. *Journal of Engineering Mechanics*; 1999.

Ulm F. Couplings in early-age concrete: from material modelling to structural design. *Int. J. Solids Structures* 1998; Vol. **35**, Nos 31-32 pp 4295-4311.

Zreiki J, Bouchelaghem F, Chaouche M. Early-age behaviour of concrete in massive structures, experimentation and modelling. *Nuclear Engineering and Design* 2010; **240** pp 2643-2654.

Aurich M, Filho A, Shah S. Modelagem por elementos finitos do comportamento do concreto nas primeiras idades. *Ibracon Structures and Materials Journal* 2009; Vol. **2** pp37-58.

Apêndice A

Formulação incremental da lei Constitutiva

Pretende-se obter a expressão incremental da lei constitutiva,

$$\sigma = -k\varepsilon \quad (\text{A.1})$$

para tal, é necessário substituir k pela sua definição empírica,

$$k_0 = k_\infty(1.33 - 0.33\alpha_0) \quad (\text{A.2})$$

obtendo-se:

$$\sigma = -k_\infty(1.33 - 0.33\alpha_0)\varepsilon \quad (\text{A.3})$$

Introduzindo a formulação incremental em (A.3), obtém-se:

$$\sigma_0 + \delta\sigma = -K_\infty(1.33 - 0.33(\alpha_0 + \delta\alpha))(\varepsilon_0 + \delta\varepsilon) \quad (\text{A.4})$$

Por último, basta substituir a definição,

$$\sigma_0 = -K_\infty(1.33 - 0.33\alpha_0)\varepsilon_0 \quad (\text{A.5})$$

em (A.4) e simplificar até a expressão pretendida,

$$\delta\sigma = -K_0\delta\varepsilon + R_K \quad (\text{A.6})$$

onde:

$$R_K = 0.33K_\infty\delta\alpha(\varepsilon_0 + \delta\varepsilon) \quad (\text{A.7})$$

Apêndice B

Teorema de Taylor

O teorema de Taylor refere que qualquer função suficientemente suave pode ser localmente aproximada através de um polinómio,

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n \quad (\text{B.1})$$

O teorema pode ser enunciado, de acordo com [49] do seguinte modo:

Teorema B.1. *Se f é uma função que admite derivadas até à ordem n no ponto $x = a$, então existe um e um só polinómio P de grau $\leq n$ que satisfaz as $n + 1$ condições,*

$$P(a) = f(a), \quad P'(a) = f'(a), \quad \dots, \quad P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

Este polinómio é definido pela equação B.1.

Apêndice C

Formulação Incremental do Fluxo de Calor

Pretende-se obter a formulação incremental da expressão,

$$Q_{\infty} \dot{\alpha} = A_T f(\alpha) \exp(-\beta) \quad (\text{C.1})$$

onde:

$$\beta = \frac{E_a}{RT} \quad (\text{C.2})$$

A função $f(\alpha)$ é definida por troços lineares:

$$f(\alpha) = f_0 + f'_0 \delta\alpha \quad (\text{C.3})$$

Por forma a obter o resultado pretendido, é necessário aproximar $\exp(-\beta)$ recorrendo ao teorema de Taylor - ver apêndice B. Por comodidade define-se,

$$g = \exp(-\beta) \quad (\text{C.4})$$

Nas expressões apresentadas, o índice "0" significa que se está a referir ao valor tomado no instante inicial da grandeza onde for aplicado. As primeiras derivadas de g tomam a forma:

$$g' = (-\beta)' g = \left(\frac{E_a}{RT^2}\right) g \quad (\text{C.5})$$

$$g'' = -2 \frac{E_a}{RT^3} g + \frac{E_a}{RT^2} \frac{E_a}{RT^2} g = \frac{E_a}{RT^2} \left(\frac{E_a}{RT^2} - \frac{2}{T}\right) g \quad (\text{C.6})$$

Substituindo na expressão geral do teorema de Taylor (B.1), truncada no terceiro termo, para facilitar a exposição, obtém-se,

$$g \approx \exp\left(-\frac{E_a}{RT_0}\right) + \frac{E_a}{RT_0^2} \exp\left(-\frac{E_a}{RT_0}\right) \delta T + \frac{E_a}{RT_0^2} \left[\frac{E_a}{RT_0^2} - 2\frac{1}{T_0}\right] \exp\left(-\frac{E_a}{RT_0}\right) \quad (\text{C.7})$$

ou, depois de simplificar,

$$g \approx g_0 + \frac{E_a}{RT_0^2} g_0 \delta T + \frac{E_a}{RT_0^2} \left[\frac{E_a}{RT_0^2} - 2 \frac{1}{T_0} \right] g_0 \frac{\delta T^2}{2} \quad (\text{C.8})$$

$$g \approx g_0 \left[1 + \beta_0 \frac{\delta T}{T_0} + \frac{1}{2} \beta_0 (\beta_0 - 2) \frac{\delta T^2}{T^2} \right] \quad (\text{C.9})$$

Substituindo (C.9) em (C.1) e utilizando a formulação incremental,

$$Q_\infty (\dot{\alpha}_0 + \delta \dot{\alpha}) = A_T (f_0 + f' \delta \alpha) g_0 \left[1 + \beta_0 \frac{\delta T}{T_0} + \frac{1}{2} \beta_0 (\beta_0 - 2) \frac{\delta T^2}{T^2} \right] \quad (\text{C.10})$$

introduzindo (C.1),

$$A_T f_0 g_0 + Q_\infty \delta \dot{\alpha} = A_T f_0 \left(1 + \frac{f' \delta \alpha}{f_0} \right) g_0 \left[1 + \beta_0 \frac{\delta T}{T_0} + \frac{1}{2} \beta_0 (\beta_0 - 2) \frac{\delta T^2}{T^2} \right] \quad (\text{C.11})$$

simplificando,

$$\delta \dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0 \left(1 + \frac{f' \delta \alpha}{f_0} \right) \left(\beta_0 \frac{\delta T}{T_0} + \frac{1}{2} \beta_0 [\beta_0 - 2] \frac{\delta_0 T^2}{T^2} \right) \quad (\text{C.12})$$

e colocando β_0 em evidência, obtém-se:

$$\delta \dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0 \left(1 + \frac{f' \delta \alpha}{f_0} \right) \beta_0 \left(\frac{\delta T}{T_0} + \frac{1}{2} [\beta_0 - 2] \frac{\delta_0 T^2}{T^2} \right) \quad (\text{C.13})$$

O resultado pretendido é obtido através do desenvolvimento da expressão anterior:

$$\delta \dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0 \beta_0 \frac{\delta T}{T_0} + \dot{\alpha}_0 \frac{f'_0}{f_0} \delta \alpha + \dot{\alpha}_0 \beta_0 R_\alpha \quad (\text{C.14})$$

$$R_\alpha = \left(1 + \frac{f'_0}{f_0} \delta \alpha \right) R_e + \frac{f'_0}{f_0} \frac{\delta T}{T_0} \delta \alpha \quad (\text{C.15})$$

$$R_e = - \left(\frac{\delta T}{T_0} \right)^2 \left[\left(1 - \frac{1}{2} \beta_0 \right) - \left(1 - \beta_0 + \frac{1}{6} \beta_0^2 \right) \frac{\delta T}{T_0} + \dots \right] \quad (\text{C.16})$$

Para obter o resultado (C.16) na forma apresentada é necessário utilizar mais termos da série de Taylor. Tal não foi feito por uma questão de clareza na explicação, uma vez que não existe qualquer complicação conceptual adicional.

Apêndice D

Forma Incremental dos métodos θ

Aplicando a formulação incremental,

$$v = v_0 + \delta v \quad (\text{D.1})$$

em v e em \dot{v} da expressão geral dos métodos θ ,

$$v = v_0 + (1 - \theta)\delta t\dot{v}_0 + \theta\delta t\dot{v} \quad (\text{D.2})$$

obtem-se:

$$v_0 + \delta v = v_0 + (1 - \theta)\delta t\dot{v}_0 + \theta\delta t(\dot{v}_0 + \delta\dot{v}) \quad (\text{D.3})$$

Simplificando chega-se à equação pretendida,

$$\delta v = \delta t\dot{v}_0 + \theta\delta t\delta\dot{v} \quad (\text{D.4})$$

ou, fazendo mudança de termo:

$$\theta\delta t\delta\dot{v} = \delta v - \delta t\dot{v}_0 \quad (\text{D.5})$$

Apêndice E

Discretização no Tempo do Fluxo de Calor

Partindo da forma incremental da lei de Arrhenius,

$$\delta\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0\beta_0\frac{\delta T}{T_0} + \dot{\alpha}_0\frac{f'_0}{f_0}\delta\alpha + \dot{\alpha}_0\beta_0R_\alpha \quad (\text{E.1})$$

onde,

$$R_\alpha = (1 + \frac{f'_0}{f_0}\delta\alpha)R_e + \frac{f'_0}{f_0}\frac{\delta T}{T_0}\delta\alpha \quad (\text{E.2})$$

$$R_e = -(\frac{\delta T}{T_0})^2[(1 - \frac{1}{2}\beta_0) - (1 - \beta_0 + \frac{1}{6}\beta_0^2)\frac{\delta T}{T_0} + \dots] \quad (\text{E.3})$$

e introduzindo a discretização no tempo em α ,

$$\theta\delta t\delta\dot{\alpha} = \delta\alpha - \delta t\dot{\alpha}_0 \quad (\text{E.4})$$

vem:

$$\frac{\delta\alpha}{\theta\delta t\dot{\alpha}_0} - \frac{1}{\theta} = \beta_0\frac{\delta T}{T_0} + \frac{f'_0}{f_0}\delta\alpha + \beta_0R_\alpha \quad (\text{E.5})$$

Simplificando:

$$\delta\alpha(\frac{1}{\theta\delta t\dot{\alpha}_0} - \frac{f'_0}{f_0}) = \beta_0\frac{\delta T}{T_0} + \frac{1}{\theta} + \beta_0R_\alpha \quad (\text{E.6})$$

Sabendo que,

$$\dot{\alpha}_0 = \frac{A_T}{Q_\infty}f_0\exp[-\beta_0] \quad (\text{E.7})$$

e introduzindo em (E.6) vem:

$$\delta\alpha = \beta_0f_0(\frac{Q_\infty e^{\beta_0}}{A_T\theta\delta t} - f'_0)^{-1}(\frac{\delta T}{T_0} + \frac{1}{\theta\beta_0} + R_\alpha) \quad (\text{E.8})$$

Denotando,

$$A_{\alpha 0} = \beta_0f_0(\frac{Q_\infty e^{\beta_0}}{A_T\theta\delta t} - f'_0)^{-1} \quad (\text{E.9})$$

$$A_{T0} = \frac{A_{\alpha 0}}{T_0} \quad (\text{E.10})$$

$$R_{\alpha 0} = \frac{1}{\theta \beta_0} \quad (\text{E.11})$$

obtem-se:

$$\delta\alpha = A_{T0}\delta T + A_{\alpha 0}(R_{\alpha 0} + R_{\alpha}) \quad (\text{E.12})$$

Apêndice F

Integração Numérica

Este apêndice foi baseado em [37, 43]. Na figura F.1 está representada uma função polinomial de quinto grau, cuja expressão genérica é dada por:

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 \quad (\text{F.1})$$

O integral exacto do polinómio no intervalo $[-1, 1]$ é dado por:

$$\begin{aligned} I = \int_{-1}^1 f(x)dx &= \int_{-1}^1 c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 dx = \\ &= 2c_0 + \frac{2}{3}c_2 + \frac{2}{5}c_4 \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

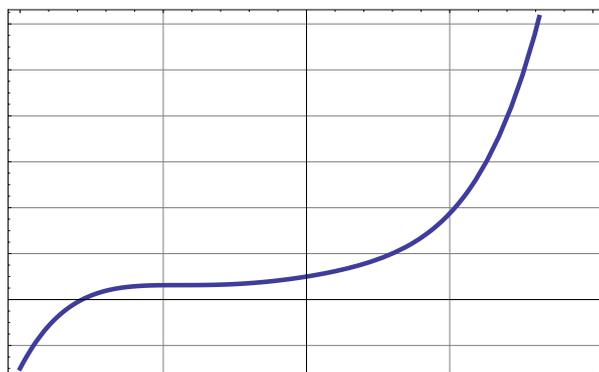


Figura F.1: Função polinomial de grau 5

Suponha-se agora que se pretende avaliar o integral de $f(x)$ por intermédio do somatório de avaliações da função $f(x)$ em determinados pontos, multiplicadas por pesos adequados. No caso do polinómio genérico de grau 5, mostra-se adiante que, para obter um resultado exacto, se deve avaliar a função $f(x)$ em três pontos de amostragem P_i e multiplicar cada um desses valores por pesos W_i . O integral avaliado desta forma é designado por J , sendo:

$$J = W_1f(P_1) + W_2f(P_2) + W_3f(P_3) \quad (\text{F.3})$$

Falta, contudo, saber a posição dos pontos de amostragem P_1 , P_2 e P_3 em que a função $f(x)$ deve ser avaliada e os respectivos pesos, W_1 , W_2 e W_3 . Uma vez que $f(x)$ é um polinómio do tipo (F.1), a expressão (F.3) passa a ser,

$$\begin{aligned}
J = & W_1(c_0 + c_1P_1 + c_2P_1^2 + c_3P_1^3 + c_4P_1^4 + c_5P_1^5) + \\
& + W_2(c_0 + c_1P_2 + c_2P_2^2 + c_3P_2^3 + c_4P_2^4 + c_5P_2^5) + \\
& + W_3(c_0 + c_1P_3 + c_2P_3^2 + c_3P_3^3 + c_4P_3^4 + c_5P_3^5)
\end{aligned} \tag{F.4}$$

ou, colocando em evidência os coeficientes c_i :

$$\begin{aligned}
J = & (W_1 + W_2 + W_3)c_0 + \\
& + (W_1P_1 + W_2P_2 + W_3P_3)c_1 + \\
& + (W_1P_1^2 + W_2P_2^2 + W_3P_3^2)c_2 + \\
& + (W_1P_1^3 + W_2P_2^3 + W_3P_3^3)c_3 + \\
& + (W_1P_1^4 + W_2P_2^4 + W_3P_3^4)c_4 + \\
& + (W_1P_1^5 + W_2P_2^5 + W_3P_3^5)c_5
\end{aligned} \tag{F.5}$$

Neste exemplo, relativo ao polinómio de grau 5, pretende-se que a expressão de J seja exactamente igual à de I ,

$$I = J \tag{F.6}$$

ou seja, de acordo com as definições (F.3) e F.6:

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{1}c_0 + 0c_1 + \frac{2}{3}c_2 + 0c_3 + \frac{2}{5}c_4 + 0c_5 = \\
& = (W_1 + W_2 + W_3)c_0 + \\
& + (W_1P_1 + W_2P_2 + W_3P_3)c_1 + \\
& + (W_1P_1^2 + W_2P_2^2 + W_3P_3^2)c_2 + \\
& + (W_1P_1^3 + W_2P_2^3 + W_3P_3^3)c_3 + \\
& + (W_1P_1^4 + W_2P_2^4 + W_3P_3^4)c_4 + \\
& + (W_1P_1^5 + W_2P_2^5 + W_3P_3^5)c_5
\end{aligned} \tag{F.7}$$

Uma vez que os coeficientes c_i são arbitrários, para que a igualdade (F.8) se verifique sempre, é

suficiente que:

$$\begin{cases} W_1 + W_2 + W_3 = \frac{2}{1} \\ W_1 P_1 + W_2 P_2 + W_3 P_3 = 0 \\ W_1 p_1^2 + W_2 P_2^2 + W_3 p_3^2 = \frac{2}{3} \\ W_1 p_1^3 + W_2 P_2^3 + W_3 p_3^3 = 0 \\ W_1 p_1^4 + W_2 P_2^4 + W_3 p_3^4 = \frac{2}{5} \\ W_1 p_1^5 + W_2 P_2^5 + W_3 p_3^5 = 0 \end{cases} \quad (\text{F.8})$$

Para obter os valores de P_1, P_2, P_3, W_1, W_2 e W_3 , resolve-se o sistema (F.9) de seis equações não lineares a seis incógnitas. A respectiva solução é dada por:

$$\begin{cases} P_1 = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = -0.77459 \\ P_2 = 0 = 0.00000 \\ P_3 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = 0.77459 \\ W_1 = \frac{5}{9} = 0.55556 \\ W_2 = \frac{8}{9} = 0.88889 \\ W_3 = \frac{5}{9} = 0.55556 \end{cases} \quad (\text{F.9})$$

O valor exacto do integral de um polinómio de grau 5, no intervalo $[-1,1]$, pode ser obtido através de:

$$I = J = \frac{5}{9}f\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right) \quad (\text{F.10})$$

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx = \frac{5}{9}f\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right) \quad (\text{F.11})$$

No caso de a função $f(x)$ ser não polinomial ou polinomial de grau superior a 5, a expressão (F.10) fornece um valor aproximado do integral I . O valor do integral calculado com o segundo membro de (F.11) é tanto mais correcto, quanto mais a função $f(x)$ se aproximar de um polinómio do tipo (F.1). Sempre que se deseje um valor mais correcto para o integral, existe a possibilidade de se utilizar mais pontos de Gauss (P_i) e correspondentes pesos (W_i).

O estudo agora realizado com um polinómio de grau 5 pode ser feito, de um modo semelhante, com polinómios de qualquer grau. Na tabela F.1 apresenta-se os resultados que se obtêm quando se faz o estudo com polinómios de grau 1, grau 3, grau 5 e grau 7.

Na tabela F.1 encontram-se os valores das posições dos pontos de amostragem e dos pesos para um dado número de pontos de Gauss. Por observação da tabela F.1, pode concluir-se que com n pontos de Gauss obtêm-se o valor exacto do integral de um polinómio de grau $p = 2n - 1$, ou inferior. Quando se pretende a solução exacta do integral de um polinómio de grau p , o número de pontos de Gauss que se tem de utilizar é $n = (p + 1)/2$, ou superior.

Tabela F.1: Posição dos pontos de Gauss e respectivos pesos

Número de pontos de Gauss	Grau do polinómio que é possível integrar de modo exacto	Posições e respectivos pesos dos pontos de Gauss
n	$p = 2n - 1$	P_i W_i
1	1	$P_1 = 0$ $W_1 = 2$
2	3	$P_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $P_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $W_1 = 1$ $W_2 = 1$
3	5	$P_1 = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ $P_2 = 0$ $P_3 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ $W_1 = \frac{5}{9}$ $W_2 = \frac{8}{9}$ $W_3 = \frac{5}{9}$

Nota: O intervalo de integração de todos os integrais referidos no âmbito da quadratura de Gauss é o intervalo $[-1, 1]$.

Para justificar a expressão $p = 2n - 1$ (ver a Tabela F.1) é suficiente considerar o seguinte (sugere-se que se acompanhem as seguintes considerações com o exemplo do polinómio de grau $p = 5$, atrás descrito):

- Suponha que se pretende integrar de um modo exacto um polinómio de grau p (sendo p um número ímpar);
- O número de coeficientes c_i no polinómio de grau p é igual a $p + 1$;
- Uma vez que existem $p + 1$ coeficientes c_i , o sistema de equações não lineares (F.9) vai ter $p + 1$ equações;
- Para que o sistema de equações (F.9) possa ser resolvido, o número de incógnitas deve ser também $p + 1$;

- Uma vez que as incógnitas são as posições dos pontos de Gauss e respectivos pesos ($P_1, P_2, P_3, \dots, W_1, W_2, W_3, \dots$) o número de pontos de Gauss (n) tem de ser metade do número de incógnitas ($p + 1$), i.e., $n = (p + 1) / 2$;
- Nesta expressão pode-se explicitar p , resultando $p = 2n - 1$, que é o resultado que se pretende demonstrar. Qualquer que seja o valor de n , o valor de p que se obtém é sempre um número ímpar.

É por este motivo que, conforme foi atrás referido, se deve passar p para o valor ímpar imediatamente superior, quando se utiliza a expressão $n = (p + 1) / 2$ e o valor de p é par.

A expressão genérica da quadratura de Gauss com n pontos é:

$$J = \sum_{i=1}^n W_i f(P_i) \quad (\text{F.12})$$

Apêndice G

Input Principal

```

1 1 PRINT DATA (1 - PRINT / 0 - DON'T PRINT)          .....READ IN DATA_CONTROL.....
1 1 PRINT MATRICES
1 1 PRINT SYSTEM
1 1 PRINT SYSTEM SOLUTION
1 1 PRINT SOLUTION IN DOMAIN
0 1 SCALING CRITERION (1 - SCALE SYSTEM / 0 - DON'T SCALE SYSTEM)
1.0D-6 NUMERICAL ZERO (TOL)
3 TRAPEZOIDAL RULE (1 - EULER, 2 - BACKWARD-EULER, 3 - CRANK-NICHOLSON METHOD)

0 0 MESH (Regular - 0 / Irregular - 1)          .....READ IN DAT_MESH.....
5 NUMBER OF ELEMENTS
0.3 0.1 LENGTH, LENGTH SCALE

35.0 TEMPERATURE SCALE (Celsius)          .....READ IN DAT_MATERIAL.....
24D+5 2.6 SPECIFIC HEAT (Ro.c) & CONDUCTIBILITY (k)
0 NUMBER OF ELEMENTS WITH DIFFERENT PROPERTIES (if > 0, repeat SPECIFIC HEAT (Ro.c) & CONDUCTIBILITY (k))
43830.0 2.15D + 8 ACTIVATION ENERGY (Ea) & RATE CONSTANT (A)
290.0 337867.88 CEMENT CONTENT (CC) & TOTAL HEAT GENERATION (Q_inf)
0 (A) // CEMENT CONTENT (CC) & TOTAL HEAT GENERATION (Q_inf)

0 ADIABATIC TEST (1 - YES / 0 - NO)          .....READ IN DATA_LOAD.....
1 BC FOR SIDE 1 (1 - PRESCRIBED TEMP, 2 - PRESCRIBED FLUX, 3 - CONV & RAD)
1 BC FOR SIDE 2 (1 - PRESCRIBED TEMP, 2 - PRESCRIBED FLUX, 3 - CONV & RAD)
100.0 0.25 4 DURATION OF TEST (HOURS), TIME INCREMENT (HOURS), PRINT STEP (NUMBER)          .....READ IN READ_TIME.....

7 DEGREE IN STRESS APPROXIMATION BY DEFAULT          .....READ IN DATA_BASE.....
1 ELEMENTS WITH DIFFERENT DEGREE IN STRESS APPROXIMATION
1 7 NUMBER OF THE ELEMENT & DEGREE OF APPROXIMATION

1 PLOT (1 - NON-SCALED / 0 - SCALED) SOLUTION          .....READ IN DATA_PLOT.....
0.15 X IN GLOBAL COORDINATES OF THE POINT TO BE PLOTTED          .....READ IN DATA_PLOT_SEC.....

```

Apêndice H

Input da função $f(\alpha)$

21			NUMBER OF SAMPLING POINTS
0.00	0.00	1	ALFA, F.ALFA, SAMPLING POINT NUMBER
0.05	0.65	2	
0.10	0.91	3	
0.15	1.00	4	
0.20	0.98	5	
0.25	0.94	6	
0.30	0.86	7	
0.35	0.75	8	
0.40	0.63	9	
0.45	0.51	10	
0.50	0.41	11	
0.55	0.32	12	
0.60	0.24	13	
0.65	0.18	14	
0.70	0.13	15	
0.75	0.09	16	
0.80	0.06	17	
0.85	0.04	18	
0.90	0.02	19	
0.95	0.01	20	
1.00	0.00	21	

Apêndice I

Inputs

I.1 Temperatura Prescrita

2					SAMPLING POINTS
0.0	17.0	1			TIME (HOURS), TEMPERATURE (CELSIUS)
240.0	17.0	2			

2					SAMPLING POINTS
0.0	17.0	1			TIME (HOURS), TEMPERATURE (CELSIUS)
240.0	17.0	2			

I.2 Convecção-Radiação

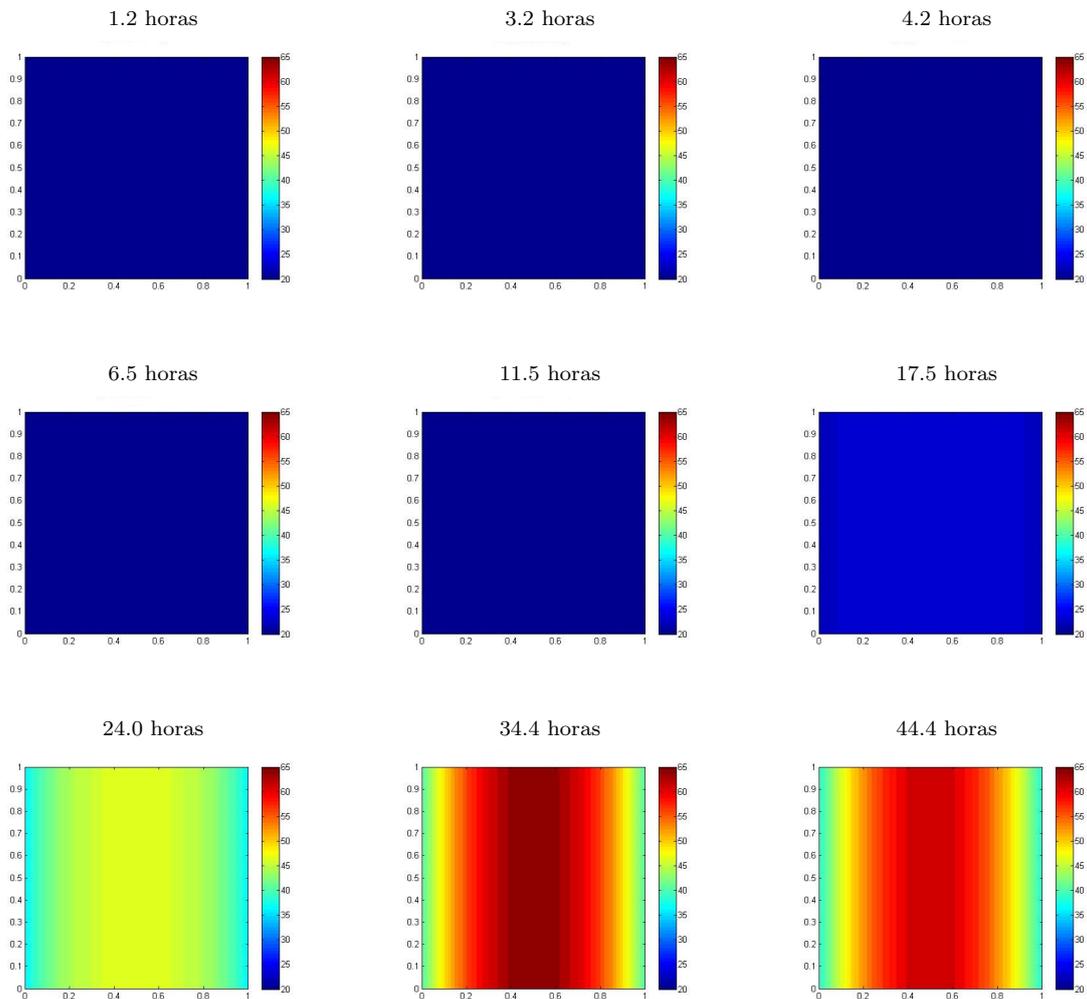
2					NUMBER OF SAMPLING POINTS
0.0	17.0	0.0	0.90	1	TIME (HOURS), AMBIENT TEMPERATURE (CELSIUS), WIND VELOCITY (M/S), EMISSIVITY (0.85 - 0.95)
2400.0	17.0	0.0	0.90	2	

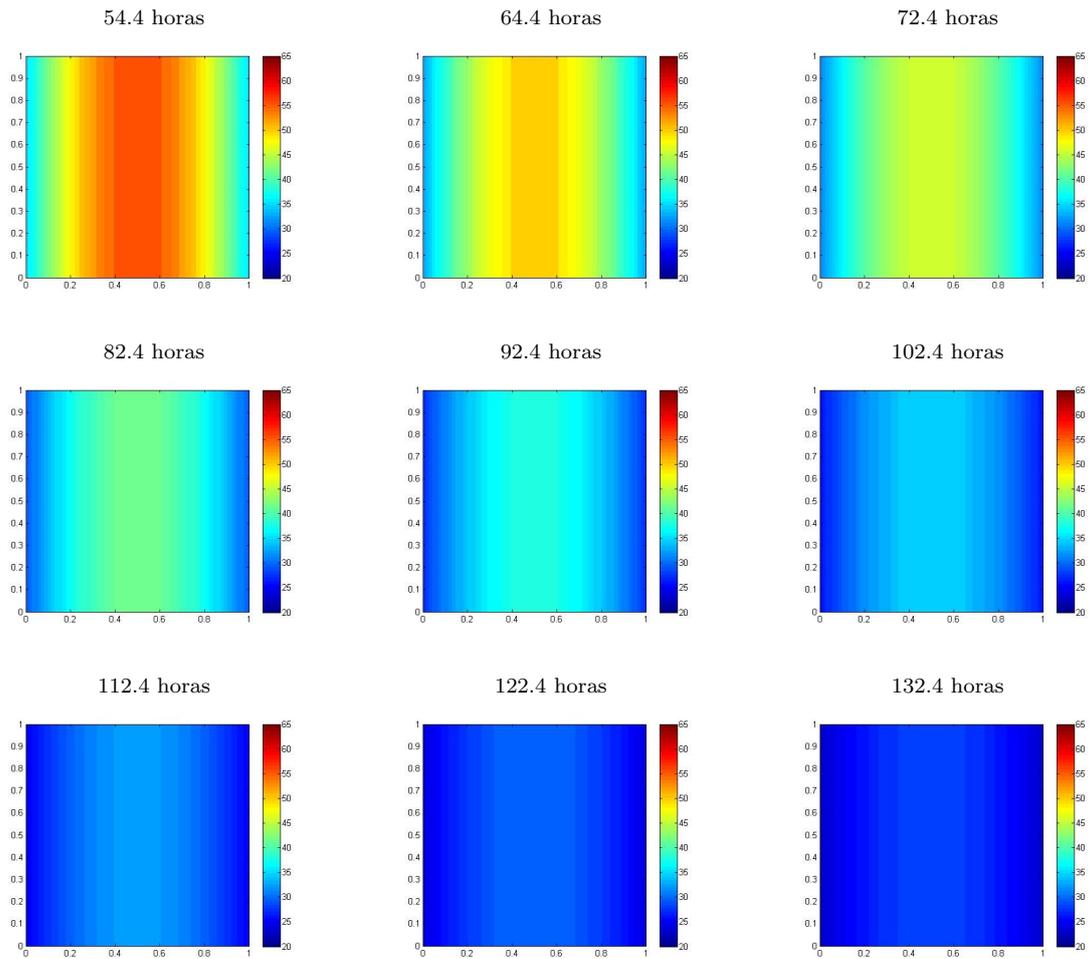
2					NUMBER OF SAMPLING POINTS
0.0	17.0	0.0	0.90	1	TIME (HOURS), AMBIENT TEMPERATURE (CELSIUS), WIND VELOCITY (M/S), EMISSIVITY (0.85 - 0.95)
2400.0	17.0	0.0	0.90	2	

Apêndice J

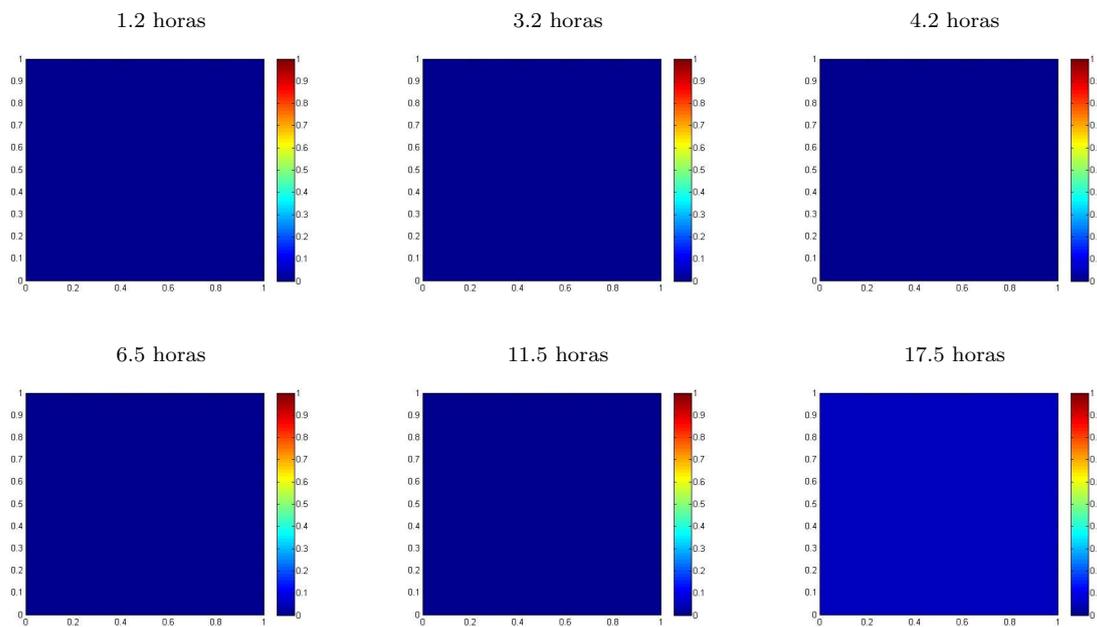
Resultados do Modelo Bidimensional

J.1 Temperatura

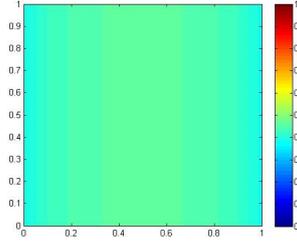




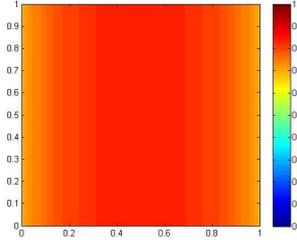
J.2 Grau de Hidratação



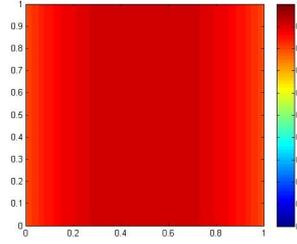
24.0 horas



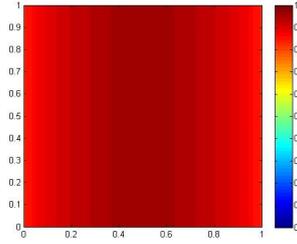
34.4 horas



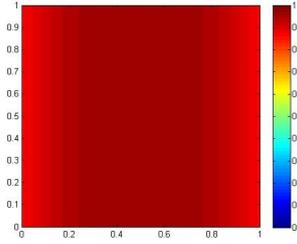
44.4 horas



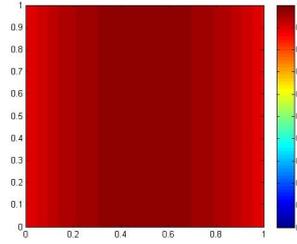
54.4 horas



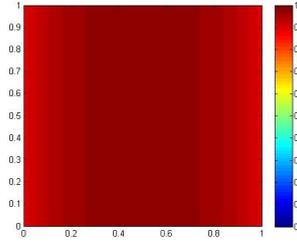
64.4 horas



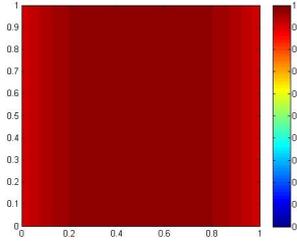
72.4 horas



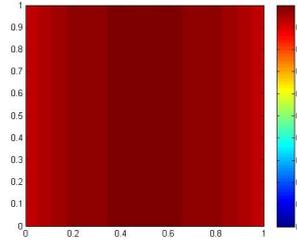
82.4 horas



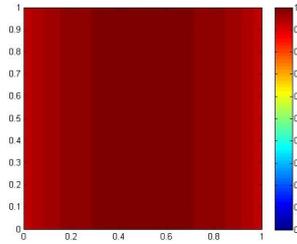
92.4 horas



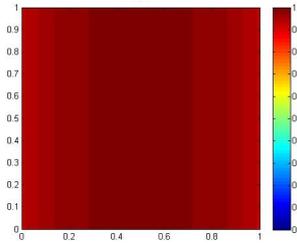
102.4 horas



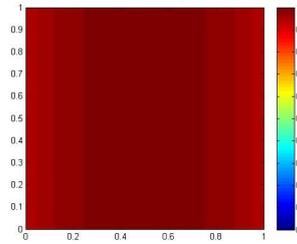
112.4 horas



122.4 horas



132.4 horas



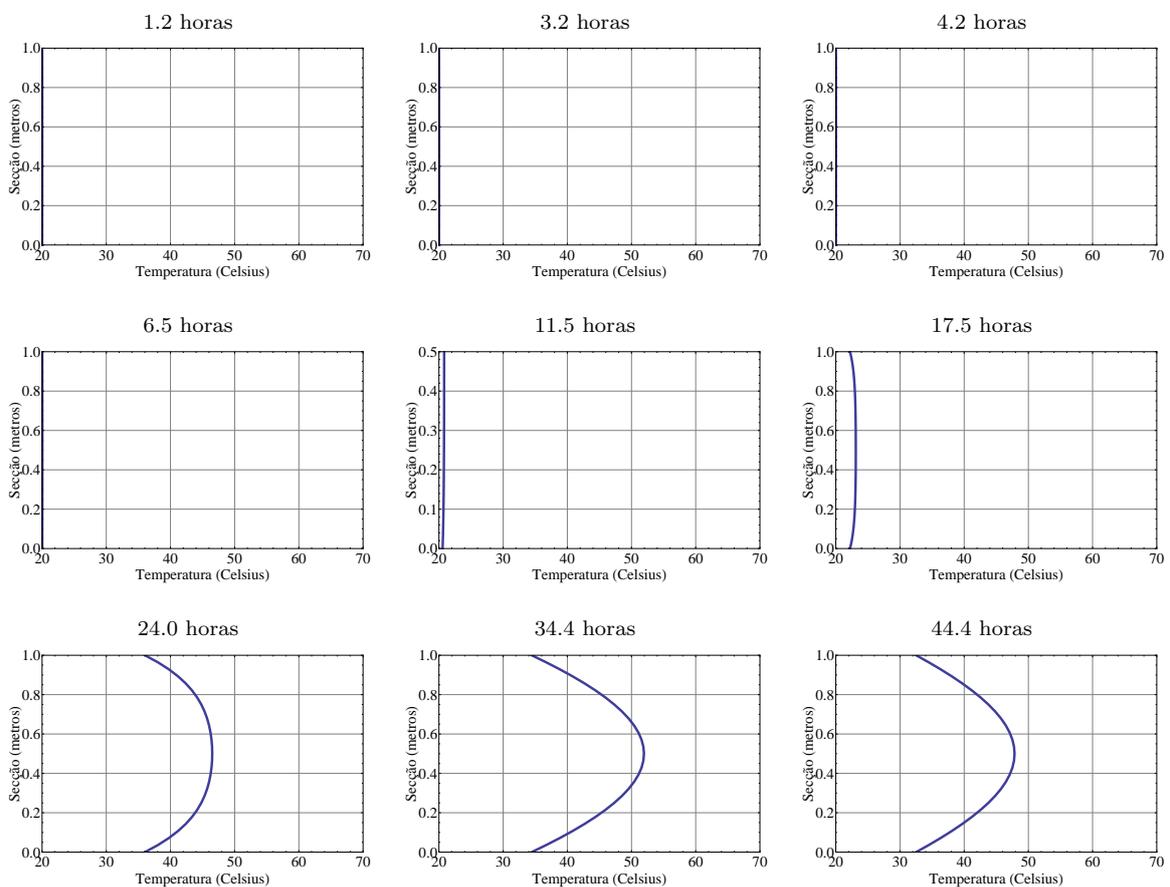
Apêndice K

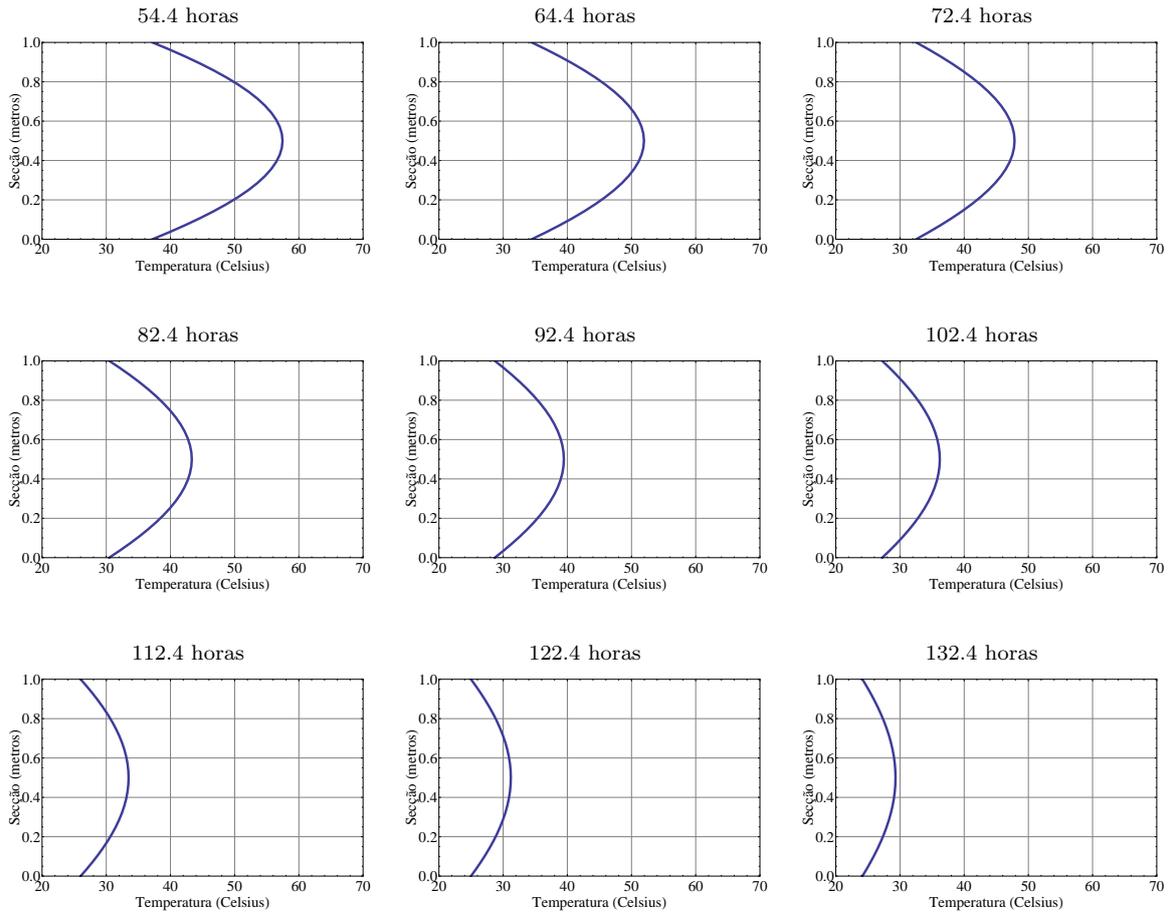
Resultados do Modelo

Unidimensional de Elementos

Convencionais

K.1 Temperatura





K.2 Grau de Hidratação

